Matemáticas en las aulas de Secundaria

Sección a cargo de

Inmaculada Fuentes Gil

GEOmetría + álGEBRA = GEOGEBRA

por

Mireia López Beltran

Resumen. GeoGebra permite, a través de sus vistas, trabajar con facilidad la relación entre la Geometría y el Álgebra. Desde la versión 4.0 cuenta, además, con una segunda vista gráfica que posibilita combinar en la misma pantalla dos versiones sobre un mismo problema: una potenciando la vertiente geométrica y la otra la vertiente algebraica. En este trabajo se presenta, a modo de ejemplo, la resolución de tres problemas de optimización propuestos en las pruebas de matemáticas de acceso a la universidad en Cataluña. Para la resolución se usarán las herramientas que GeoGebra nos proporciona, haciendo especial énfasis en aquellos aspectos que relacionan el uso del álgebra en la resolución de problemas geométricos.

1. Introducción

En [1] se encuentra una de mis citas preferidas, no solo por su significado histórico, sino también por el interés didáctico que se le deriva:

> *En tanto que el Álgebra y la Geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus usos limitados; pero cuando estas dos ciencias se han reunido, se han apoyado mutuamente y han avanzado rápidamente hacia la perfección. Debemos a Descartes la aplicación del Álgebra a la Geometría, una aplicación que se ha convertido en la clave de los mayores descubrimientos en todas las ramas de las matemáticas.*[1]

[1] *Tant que l'Algèbre et la Géométrie on été séparées, leur progrès ont été lents et leurs usages bornés mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles et on marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre a la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques. ([2])*

Conseguir transmitir a nuestros alumnos toda la matemática que hay detrás de estas palabras de Lagrange es, para mí, uno de los retos más importantes a los que nos enfrentamos como docentes en secundaria.

Fermat es uno de los matemáticos que, a principios del s. XVII, empieza a «comprobar que los métodos algebraicos eran una herramienta útil para resolver problemas geométricos» [4]. En nuestras clases podemos utilizar problemas como los que inspiraron a Fermat para mostrar a nuestros alumnos la potencia que resulta de utilizar las dos herramientas de forma simultánea.

Actualmente nosotros, a diferencia de Fermat, contamos con una herramienta ideal para ayudarnos a resolver problemas geométricos con álgebra: GeoGebra, un programa libre que se puede descargar en `http://www.geogebra.org`. Su nombre es más que una declaración de intenciones, **Geo**(metría) + (ál)**Gebra**.

En [5] encontramos uno de los ejemplos con los que Fermat ilustró su método para encontrar máximos y mínimos. Los procesos de optimización están presentes en amplios aspectos de la vida, desde la más inmediata cotidianidad hasta problemas científicos del más alto nivel [3]. Es por ello que la optimización tiene un papel importante en la educación matemática y, aunque no debe restringirse al cálculo diferencial, tiene en el final de la educación secundaria un peso destacado.

El problema propuesto por Fermat es más que conocido, pero, por su sencillez, nos puede servir para introducir los problemas de optimización en el aula (incluso antes de introducir el cálculo diferencial):

> *Dividir el segmento AC en E de manera que el rectángulo $AE \times EC$ sea de área máxima (figura 1).*

Figura 1: Segmento AC.

Este problema fue objeto de trabajo en una sesión dentro del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas UPF-UOC ([7])[2]. En la resolución del problema enunciado se usó GeoGebra. Para potenciar la relación entre el enunciado, en términos geométricos, y la resolución, usando el cálculo y el lenguaje algebraico, se empleó la segunda vista gráfica. En la segunda parte de la sesión del Máster se realizó un taller con los futuros profesores de matemáticas de secundaria. Este taller ha sido muy enriquecedor durante los tres años que se ha llevado a cabo. Es a partir de estas experiencias que nace la idea de utilizar este recurso para trabajar otros problemas de optimización.

A continuación se presentan tres problemas de optimización propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en Cataluña. En los tres casos se hace uso de

[2]Los materiales fueron elaborados por Pelegrí Viader, Antoni Gomà y Mireia López. Además de en la referencia, la actividad concreta que mencionamos se encuentra en `http://www.estalmat.org/tictactoc/activitat2.html`

GeoGebra en su resolución para mostrar, de forma visual, la potencia que obtenemos al emplear el álgebra (y el cálculo) en problemas de enunciado geométrico[3].

2. Problema junio 2011 – serie 1 – ejercicio 3

Definimos las funciones $f(x) = a(1 - x^2)$ *y* $g(x) = \frac{x^2-1}{a}$*, con* $a > 0$.

a) *Comprobad que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones es* $\frac{4(1-a^2)}{3a}$.

b) *Calculad el valor del parámetro* a *para que esta área sea mínima.*

Para obtener los archivos que se van mencionando en el texto léase la nota a pie de página[4]. El apartado a) del problema debe resolverse algebraicamente, pero con GeoGebra podemos ayudar a los alumnos a visualizar el proceso geométricamente.

Las dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, dependen de un parámetro, y para representarlas usaremos un «*Deslizador*». En nuestro caso, y una vez resuelto el problema, hemos definido un deslizador en $[0, 15]$. Después hemos definido las funciones f y g según el enunciado del problema. Nótese que GeoGebra escribe directamente la expresión algebraica de la función con el valor de a dado en cada momento (figura 2). Ambas funciones cuadráticas son representadas al ser introducidas.

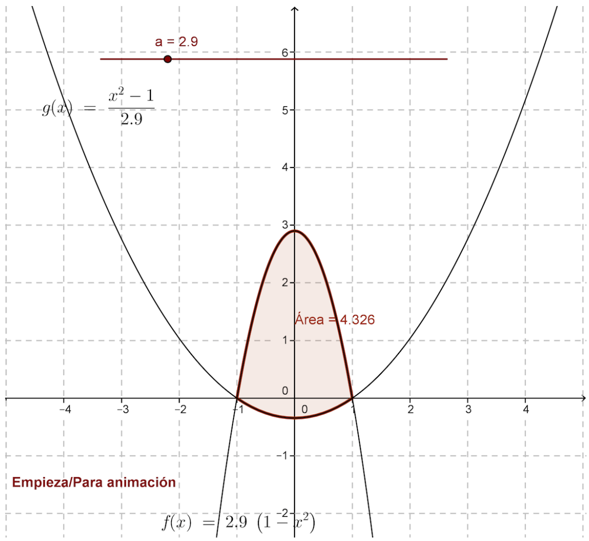

Figura 2: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ del «Problema junio 2011 – serie 1 – ejercicio 3» representadas con GeoGebra.

[3] `http://www.gencat.cat/economia/ur/doc_un/pau_mate11jl.pdf`

[4] Los archivos se pueden descargar en `https://sites.google.com/a/xtec.cat/geogebra_mlopez/problema-junio-2011-serie-1-ejercicio-3`. Hay tres archivos para este problema, sus nombres empiezan por `GEOGEBRA 1_` y luego `1`, `2` o `3`. Se pueden abrir con el navegador y, en caso de problemas con Java, se pueden abrir también con el programa GeoGebra.

Se puede observar directamente a partir de la representación gráfica que los puntos de intersección de las dos funciones corresponden al $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. También puede usarse la herramienta «*Intersección de dos objetos*».

A partir de los cálculos algebraicos se llega a la expresión que se indica en el propio enunciado. El alumno puede ir siguiendo con GeoGebra el proceso de resolución. Para calcular el área entre nuestras dos funciones, el comando es `IntegralEntre[f, g, -1, 1]`.

Hemos comprobado cómo GeoGebra nos permite visualizar el área entre dos parábolas aunque ambas funciones estén definidas a partir de un parámetro. El alumno debe resolver el problema algebraicamente con los instrumentos trabajados durante el curso, pero una primera aproximación con GeoGebra puede ayudarle a plantear la situación. También puede usarse una vez resuelto el problema para consolidar los diferentes aspectos empleados en la resolución del problema.

A partir de la expresión del área obtenida, nos piden que encontremos el valor de a que hace que esta área sea mínima. Con GeoGebra podemos dejar que el alumno experimente con la situación planteada. Puede asignar diferentes valores al parámetro a y observar cómo va cambiando el valor del área. El propio alumno puede ir depurando el valor para el cual el área deja de disminuir para empezar a aumentar.

Para profundizar en esta idea, utilizaremos la posibilidad que nos brinda el programa de usar una segunda vista gráfica. En esta dibujaremos un punto P con la coordenada a para la abscisa y el valor del área para la ordenada (Vídeo 1)[5].

Esta tarea puede visualizarse mejor con el uso de la función «*Rastro*» que permite ir dibujando el punto de coordenadas (a, Área) conforme vamos desplazando el «*Deslizador*» de forma manual o automática (Vídeo 2)[6]. GeoGebra nos permite tener en una misma pantalla las dos vistas: en la primera mostramos el área entre las dos funciones y en la segunda mostramos la relación funcional que se establece entre el parámetro a y el área buscada en el ejercicio (figura 3).

Esta segunda vista gráfica nos abre la posibilidad de trabajar con más profundidad la expresión encontrada en el apartado a) del problema. Como el valor de a es asignado en cada caso, para representar la función debemos asignar una nueva variable independiente. Por tanto, representaremos la función área dada por

$$A(x) = \frac{4(1 + x^2)}{3x}.$$

El alumno puede comprobar cómo el recorrido del punto P sigue la representación gráfica de la función (para $x > 0$). Ahora el alumno puede, a través de la segunda vista gráfica, centrarse en la función área y sus propiedades. A partir de la expresión algebraica y su representación gráfica pueden observarse sus principales características: asíntota vertical, asíntota oblicua y los extremos relativos. Nos centramos en este último aspecto que es el pedido en el ejercicio. Para ello, representamos en la

[5]Los vídeos se encuentran también en `https://sites.google.com/a/xtec.cat/geogebra_mlopez/problema-junio-2011-serie-1-ejercicio-3`

[6]Igual que en la nota anterior.

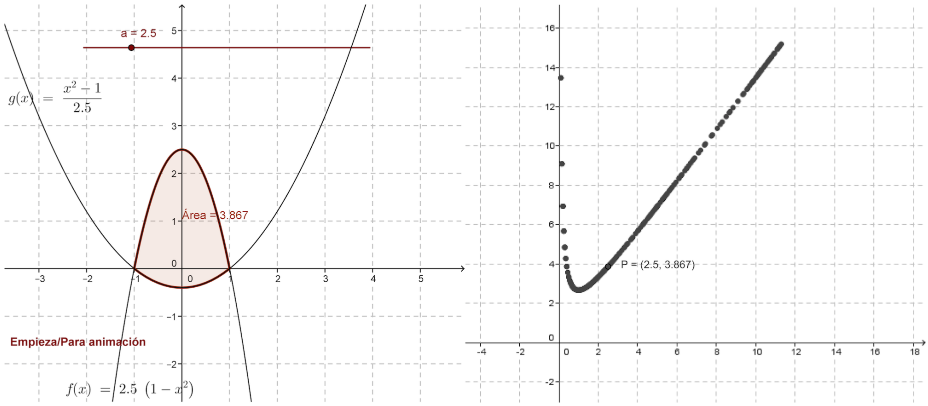

Figura 3: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ (izquierda) y «rastro» del punto P (derecha).

segunda vista gráfica (figura 4) la función $A(x)$ y conjuntamente su función derivada $A'(x)$ (en línea discontinua). Buscamos de forma gráfica los valores que cumplen $A'(x) = 0$ intersecando la función $A'(x)$ con el eje de abscisas. De este modo, se encuentran los puntos que hemos llamado Q' y R', que se muestran activando las casillas de control correspondientes[7].

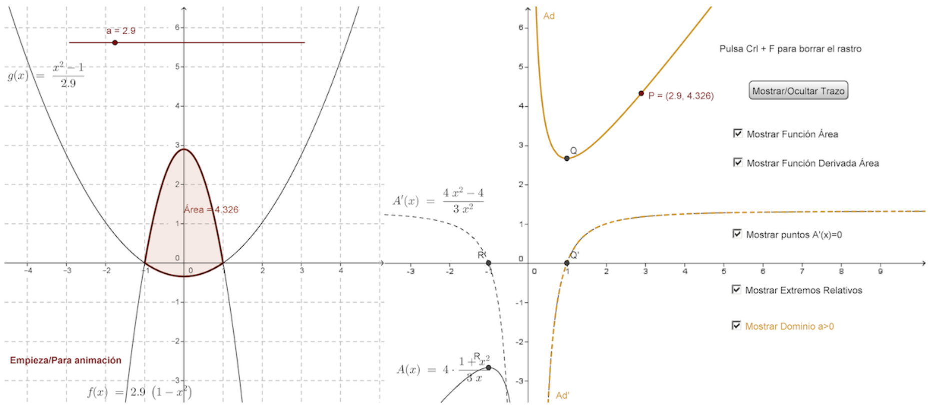

Figura 4: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ (izquierda) y funciones $A(x)$ y $A'(x)$ (derecha).

También se ha activado una casilla para mostrar la función $A(x)$ restringida al dominio que corresponde al enunciado del problema.

En caso de querer profundizar aún más en el problema, se puede trabajar con la «*Hoja de cálculo*» que también incorpora GeoGebra.

[7]Se hace referencia al archivo `GEOGEBRA 1_2-selec_2011_junio_serie_1_ex3_v2.html` que se encuentra en `https://sites.google.com/a/xtec.cat/geogebra_mlopez/problema-junio-2011-serie-1-ejercicio-3`

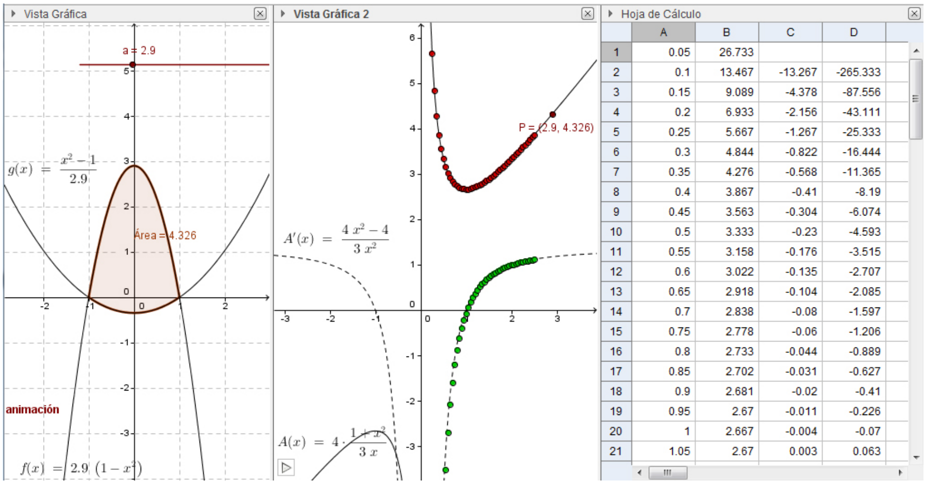

Figura 5: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ (izquierda), funciones $A(x)$ y $A'(x)$ (centro) y lista de valores de $A(x)$ (derecha).

Podemos introducir los valores de la variable independiente, por ejemplo, desde 0.05 hasta 2.5, con intervalos de amplitud 0.05. Luego, calculamos las imágenes de la función $A(x)$ y con la opción «*lista de puntos*» dibujamos estos puntos en la segunda vista gráfica. También podemos calcular $\frac{A(x_1)-A(x_0)}{0.05}$ y del mismo modo representarlos en la segunda vista gráfica, situándose ahora los puntos encima de la función derivada (véase la figura 5).

3. Problema junio 2011 – serie 4 – ejercicio 6

Dentro de un triángulo rectángulo, de catetos 3 *y* 4 *cm, hay un rectángulo. Dos de los lados del rectángulo están situados en los catetos del triángulo y uno de los vértices del rectángulo en la hipotenusa del triángulo.*

a) *Haced un esbozo de la situación descrita.*

b) *Si x es la longitud del lado del rectángulo que está situado en el cateto pequeño e y es el otro lado del rectángulo, comprobad que se cumple $4x + 3y = 12$.*

c) *Determinad las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima.*

Dibujamos la situación descrita en la primera vista gráfica de GeoGebra (figura 6).

El punto P puede moverse siguiendo la recta $4x + 3y = 12$ desde el punto $P1$ hasta el punto $P2$ siguiendo las instrucciones del enunciado. A partir del punto P dibujamos el rectángulo $ABPC$ y calculamos su área.

A partir de la situación, se puede experimentar con la relación entre la coordenada de abscisas del punto P (que denotaremos con x) y el área del rectángulo $ABPC$. Se observa que para los valores extremos, $P1$ y $P2$, el «área» es cero. Para los valores

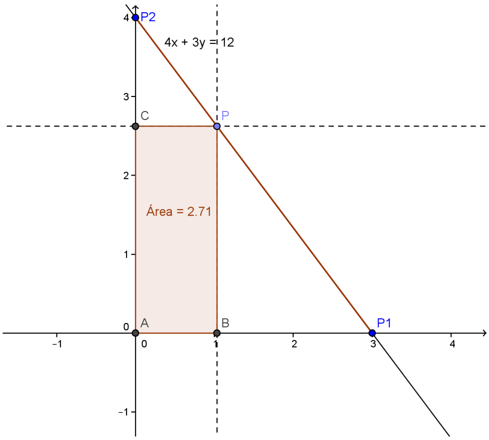

Figura 6: Representación con GeoGebra de la situación descrita en el «Problema junio 2011 – serie 4 – ejercicio 6».

intermedios, el área va aumentando/disminuyendo hasta el valor máximo pedido en el apartado c).

Siguiendo el razonamiento propuesto en el ejercicio anterior, representamos $P' = (x(P), \text{Área})$ en la segunda vista gráfica (véase la figura 7). Con $x(P)$ obtenemos la coordenada x del punto P, es decir, la longitud del lado del cuadrado sobre el cateto menor como se pide en el enunciado.

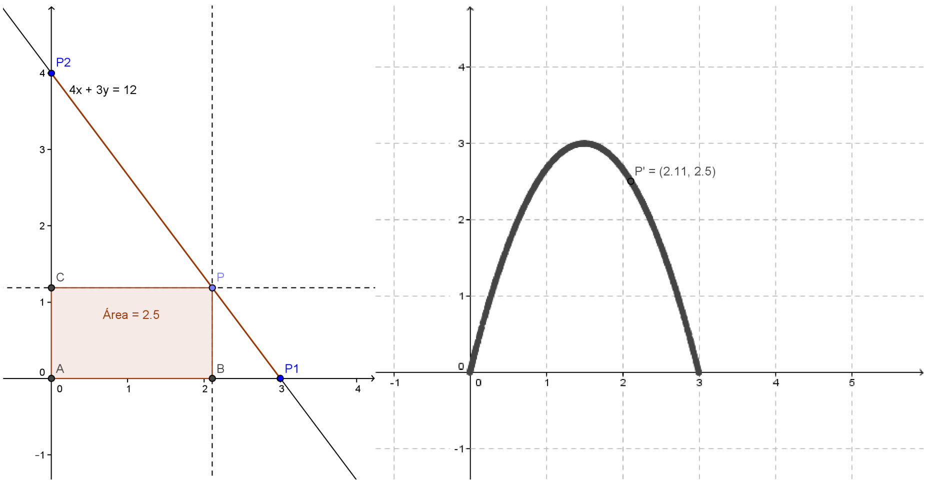

Figura 7: Al mover el punto P, el punto $P' = (x(P), \text{Área})$ va cambiando.

Activando la opción «*Rastro*» obtenemos la representación gráfica que describe la relación entre el lado mencionado y el área del rectángulo pedido. Se observa la simetría de la situación y los dos valores en los cuales el área es cero.

Deducimos la expresión algebraica del área:

$$A(x) = x \cdot \left(4 - \frac{4}{3}x\right) = 4x - \frac{4}{3}x^2.$$

Podemos hacer especial mención a las características algebraicas que corresponden a su representación gráfica y a la interpretación geométrica del problema como, por ejemplo, el valor cuando $x = 0$ o $x = 3$, que corresponde a la situaciones donde no existe rectángulo, o su área es cero. En la segunda vista gráfica vemos cómo la parábola corta al eje en estos dos valores.

Buscar el valor de área máxima corresponde a buscar el vértice de la parábola. Podemos también representar $A(x)$ y $A'(x)$ (en línea discontinua) en la segunda vista gráfica. En este caso podemos profundizar con la relación entre el crecimiento del área de la primera ventana hasta el valor máximo cuando $x = 1.5$. Hemos representado $A'(x)$ para $x < 1.5$ con color verde, y a partir de ese valor con color rojo (figura 8). Ahora podemos desplazar el punto P de la primera ventana y veremos cómo el crecimiento en el valor del área se corresponde con la rama de la parábola pintada de verde y con los valores de $A'(x)$ positivos (véase el Vídeo 3)[8].

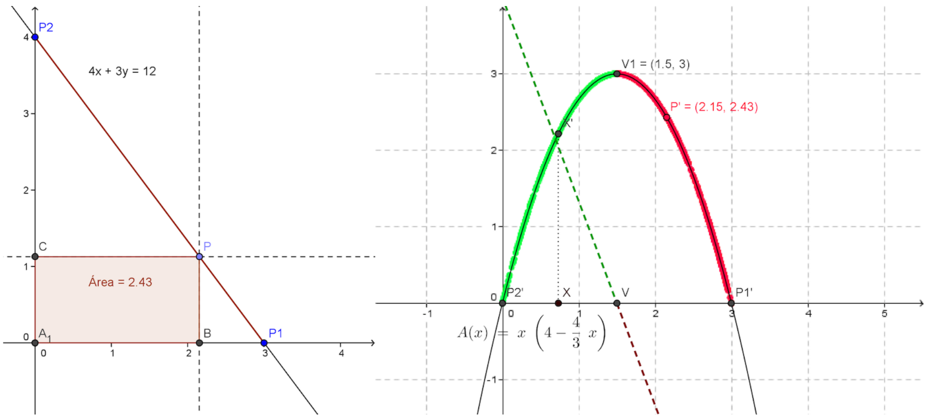

Figura 8: Al variar el punto P cambian $A(x)$ y $A'(x)$.

4. Problema junio 2013 – serie 4 – ejercicio 4

Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros. En la figura 9 tenéis un esquema de la sección del canal.

[8] El vídeo está en `https://sites.google.com/a/xtec.cat/geogebra_mlopez/problema-junio-2011-serie-4-ejercicio-6`.

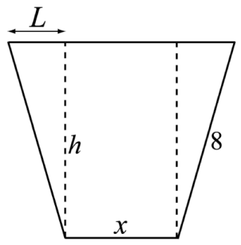

Figura 9: Esquema del canal descrito en el «Problema junio 2013 – serie 4 – ejercicio 4».

a) *Encontrad el valor del segmento L de la gráfica en función de la variable x (anchura inferior del canal).*

b) *Sabemos que el área del trapecio es igual a la anchura multiplicada por la semisuma de las bases. Comprobad que, en este caso, el área de la sección viene dada por*

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}.$$

c) *Calculad el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima (no hace falta comprobar que es realmente un máximo).*

Siguiendo la metodología de los anteriores problemas, usamos GeoGebra para representar la situación descrita en el enunciado (figura 10).

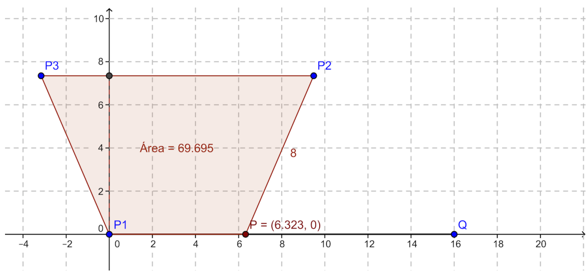

Figura 10: Representación del canal con GeoGebra.

En este problema, la relación entre la anchura inferior del canal (x) y el área del trapecio construido es más compleja que en los dos problemas anteriores. Un primer trabajo importante es definir el dominio de la función $A(x)$.

Como en la situación anterior, cuando P alcanza los valores extremos, $x = 0$ y $x = 16$, el área del «trapecio» es cero. Puede observarse, moviendo el punto P, que el área aumenta/disminuye hasta un valor máximo.

Esta situación no es simétrica (a diferencia de, por ejemplo, la anterior). Además, el valor máximo no puede ser encontrado mediante la experimentación como en las dos situaciones anteriores.

A partir de los cálculos algebraicos pertinentes, encontramos la expresión

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}.$$

Usando la segunda vista gráfica, representamos $A(x)$, pero solo en su dominio, $D = (0, 16)$. En este caso, también debemos escalar los ejes adecuadamente para poder observar la gráfica de la función de manera más cómoda. Como en los anteriores ejemplos, podemos experimentar con las dos vistas: una con la representación geométrica y la segunda con la expresión algebraica de la función (figura 11).

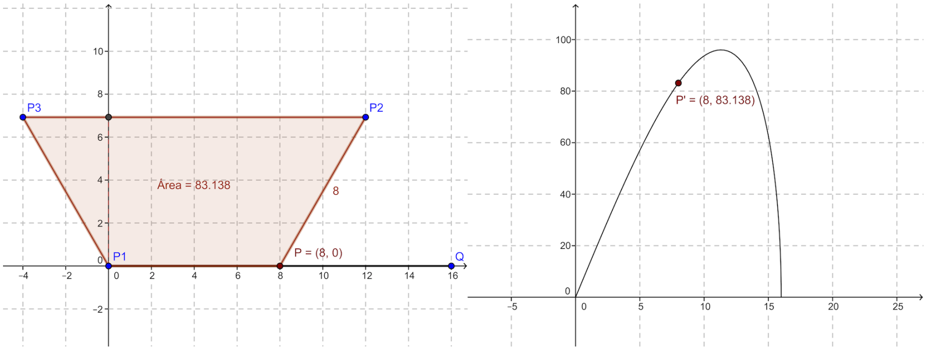

Figura 11: Representaciones geométrica y algebraica del área del canal, $A(x)$.

Siguiendo el proceso de resolución algebraico, podemos ahora calcular y representar la función derivada (restringida al dominio del problema). Finalmente, encontraremos el punto de corte con el eje de abscisas. Véase la figura 12.

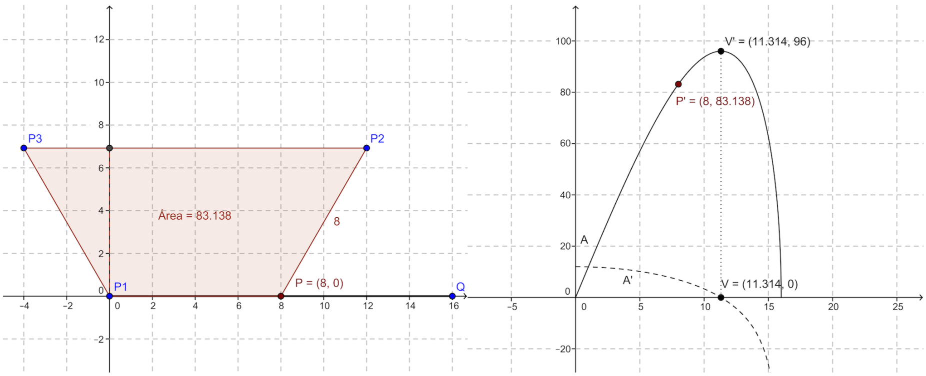

Figura 12: Visualización del punto en el que $A'(x) = 0$.

5. Consideraciones finales

En este trabajo hemos presentado tres ejemplos de problemas de optimización de las pruebas de matemáticas de acceso a la universidad de Cataluña. En su resolución se ha utilizado el programa de geometría dinámica GeoGebra y su opción de mostrar en una misma pantalla dos vistas gráficas. Se ha mostrado cómo utilizar el programa para resolver problemas de optimización obteniendo a la vez una visión más profunda y completa del problema.

GeoGebra, de libre distribución, nos abre un gran abanico de posibilidades. En este trabajo se ha explotado el recurso de las dos vistas gráficas con la esperanza de aportar un recurso didáctico que permita mostrar a los alumnos la potencia de unir el lenguaje geométrico y algebraico para la resolución de problemas.

Referencias

[1] E. Hairer y G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] J. L. Lagrange, *Oeuvres*, vol. 7, 1795.

[3] U. Malaspina, Resolución de problemas y estimulo del pensamiento optimizador en la educación básica. Trabajo presentado en la *XIII Conferencia Inter Americana de Educación Matemática*, Recife, Brasil, 2011. http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2818/1142

[4] M.ª R. Massa Esteve, Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII, *Llull* **24** (2001), 705–725.

[5] J. Pla, P. Viader y J. Paradís, *Obra matemàtica vària. Pierre de Fermat*, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 2008.

Recursos web

[6] Exámenes PAU:

- junio 2011 – enunciados (en catalán) http://www.gencat.cat/economia/ur/doc_un/pau_mate11jl.pdf
- junio 2011 – enunciados y soluciones (en catalán) http://www.gencat.cat/economia/ur/doc_un/pau_mate11jp.pdf
- junio 2013 – enunciados (en catalán) http://www.gencat.cat/economia/ur/doc_un/pau_mate13jl.pdf
- junio 2013 – enunciados y soluciones (en catalán) http://www.gencat.cat/economia/ur/doc_un/pau_mate13jp.pdf

[7] Materiales del Taller *Funciones con herramientas informáticas*, http://www.estalmat.org/tictactoc/ (en catalán).

Mireia López Beltran, Universitat Pompeu Fabra e ICE de la Universitat Politècnica de Catalunya
Correo electrónico: mireia.lopez@gmail.com