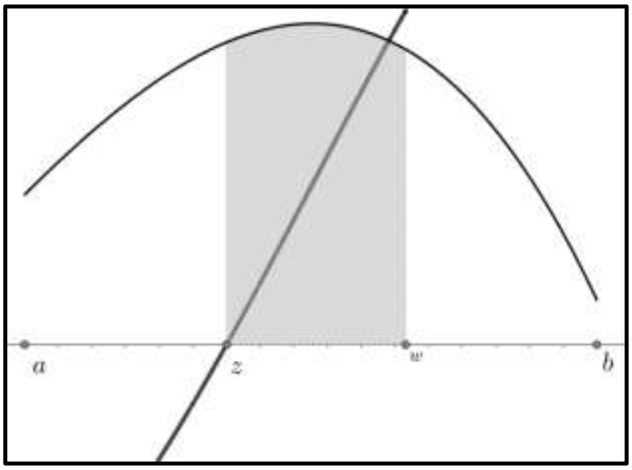
Atividades relacionadas à aplicação do conceito de integral – Parte 1

Na atividade a seguir trabalharemos com uma a função F, que é definida do seguinte modo:

Dada uma função f: $[a,\ b]\rightarrow \mathbb{R}$ e $z \in [a,b]$ a função área acumulada em z, denotada por A_z: $[a, b]\rightarrow \mathbb{R}$, é aquela que associa para cada valor w a medida da área da região compreendida entre eixo x, o gráfico da função f as retas $x = z$ e $x = w$.



1) Nessa atividade apresentaremos qual é a relação entre uma função f contínua e a função área acumulada A. Para isso, considere a seguinte função real dada pela sentença $f(x) = x^2$. Efetue os seguintes passos descritos:

- Movimente o ponto A até o 1 no eixo x;
- Posicione o controle deslizante no valor h = 0.05;
- Na Janela de Visualização 2, utilize a ferramenta Ampliar e amplie a região do acréscimo de área (destacado na cor azul) ;
- Utilizando a Ferramenta 'Mover Janela de Visualização', posicione o curso sobre o eixo x do sistema de coordenada da Janela de Visualização 2;
- Com o cursor posicionado sobre o eixo x, da Janela de Visualização 2, clique e segure o botão direito do *mouse* e arraste para a direita. Caso a região azul não esteja aparecendo na Janela de Visualização 2 clique no botão 'Centralizar Janela no acréscimo estudado'. Continue esse processo até que a região destaca assemelhe-se a um retângulo.
- Caso a região azul esteja ocupando toda a Janela de Visualização 2, utilize a ferramenta 'Reduzir' para posicionar a região no centro dessa Janela.

A região azul é um acréscimo de área, que denominaremos por dA.

Note que quando foi feito o processo descrito anteriormente, na Janela de Visualização 2, foi possível verificar que uma aproximação do valor desse acréscimo é a medida da área de um retângulo sendo que a altura dele pode ser obtida pela a imagem da função f pelo valor da abscissa do ponto A_1, denominaremos por a_1, e a base pelo valor de dx escolhido.

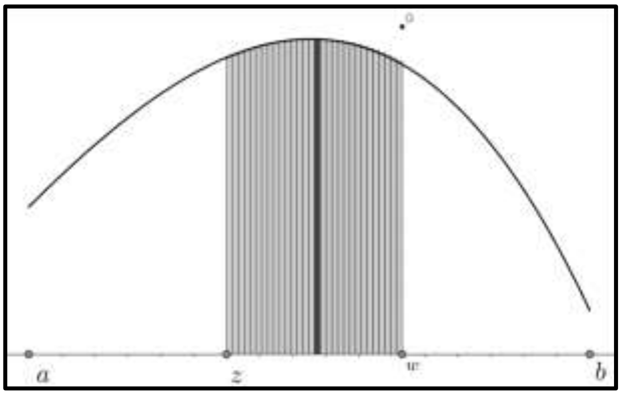
Calculando a área desse retângulo: $dA = f(a_1)\cdot dx$

A relação anterior pode ser interpretada assim: $\left.\dfrac{dA}{dx}\right|_{x=a_1} = f(a_1)$

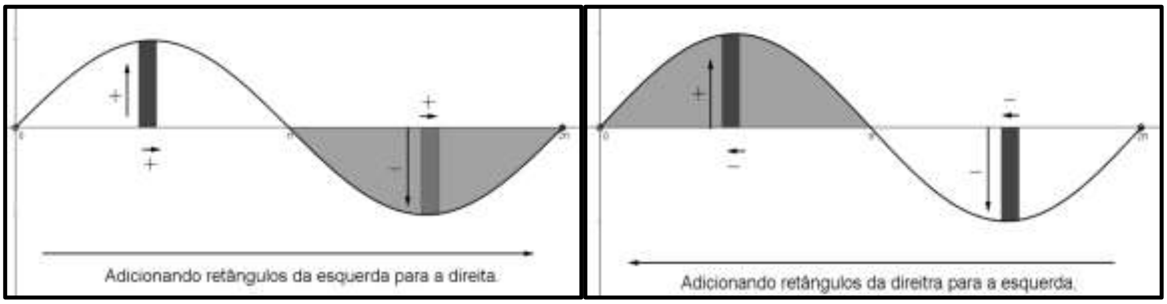
Com isso é possível concluir que a derivada da função A com relação à x é igual à função f, sendo f contínua nesse ponto.

2) Nesta atividade é proposto um estudo da função $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Um primeiro fato é que esta função pode assumir valores negativos. Uma justificativa desse fato é a seguinte: o valor de uma Soma de Riemann pode ser interpretado geometricamente como o limite da soma das áreas de retângulos, quando à medida da base desses retângulos tende a zero. Isso faz com que cada elemento de área, que denominaremos por dA, seja equivalente a um retângulo com medida da base igual a medida do intervalo, em que é calculada a área, divida pela quantidade de retângulos considerada e altura igual a imagem da função em um dos extremos do intervalo que define a base. A seguir destacamos um elemento de área dA, do intervalo $[a, z]$ e para o intervalo subdividido em 30 partes iguais.



As medidas para o cálculo de um elemento de área dA podem ter o mesmo sinal e uma com sinal contrário da outra. O valor da função pode ser negativo, quando o gráfico está abaixo do eixo x, no valor considerado como altura, e o valor da medida da base do retângulo é negativo quando $w < z$. Assim é possível definir uma orientação para determinar o sinal da imagem da função área acumulada. A seguir estão ilustradas as duas situações:



Com a aplicação produzida, primeiramente selecione a opção *Exibir função* $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Digite no campo *Sentença da função a ser estudada*, a sentença de cada uma das funções listadas; movimente o ponto A na Janela de Visualização 1, observe o conjunto de pontos que apareceu na Janela de Visualização 2 e responda a questão: com qual curva se assemelha a sequência de pontos formada pelo rastro do ponto A?

a) $f_1(x) = 4$ **curva:** ____.

b) $f_2(x) = 5$ **curva:** ____.

c) $f_3(x) = x$ **curva:** ____.

d) $f_4(x) = x + 3$ **curva:** ____.

e) $f_5(x) = x^2$ **curva:** ____.

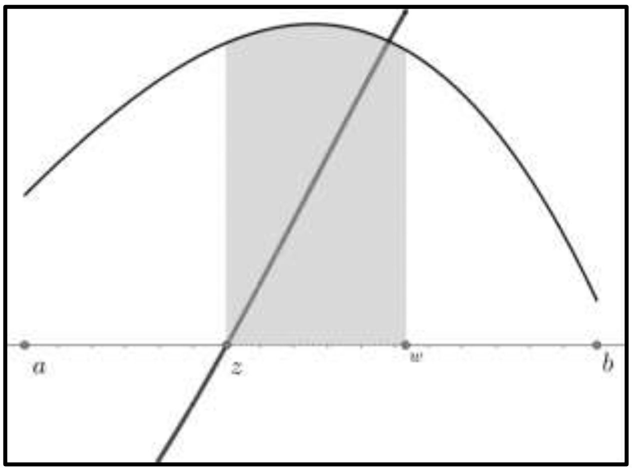
f) $f_6(x) = cos(x)$ **curva:** ____.

g) $f_7(x) = e^x$ **curva:** ____.

Atividades relacionadas à aplicação do conceito de integral – Parte 1 (com respostas)

Na atividade a seguir trabalharemos com uma a função F, que é definida do seguinte modo:

Dada uma função f: $[a, b]\rightarrow \mathbb{R}$ e $z \in [a,b]$ a função área acumulada em z, denotada por A_z: $[a, b]\rightarrow \mathbb{R}$, é aquela que associa para cada valor w a medida da área da região compreendida entre eixo x, o gráfico da função f as retas $x = z$ e $x = w$.



1) Nessa atividade apresentaremos qual é a relação entre uma função f contínua e a função área acumulada A. Para isso, considere a seguinte função real dada pela sentença $f(x) = x^2$. Efetue os seguintes passos descritos:

- Movimente o ponto A até o 1 no eixo x;
- Posicione o controle deslizante no valor h = 0.05;
- Na Janela de Visualização 2, utilize a ferramenta Ampliar e amplie a região do acréscimo de área (destacado na cor azul) ;
- Utilizando a Ferramenta 'Mover Janela de Visualização', posicione o curso sobre o eixo x do sistema de coordenada da Janela de Visualização 2;
- Com o cursor posicionado sobre o eixo x, da Janela de Visualização 2, clique e segure o botão direito do *mouse* e arraste para a direita. Caso a região azul não esteja aparecendo na Janela de Visualização 2 clique no botão 'Centralizar Janela no acréscimo estudado'. Continue esse processo até que a região destaca assemelhe-se a um retângulo.
- Caso a região azul esteja ocupando toda a Janela de Visualização 2, utilize a ferramenta 'Reduzir' para posicionar a região no centro dessa Janela.

A região azul é um acréscimo de área, que denominaremos por dA.

Note que quando foi feito o processo descrito anteriormente, na Janela de Visualização 2, foi possível verificar que uma aproximação do valor desse acréscimo é a medida da área de um retângulo sendo que a altura dele pode ser obtida pela a imagem da função f pelo valor da abscissa do ponto A_1, denominaremos por a_1, e a base pelo valor de dx escolhido.

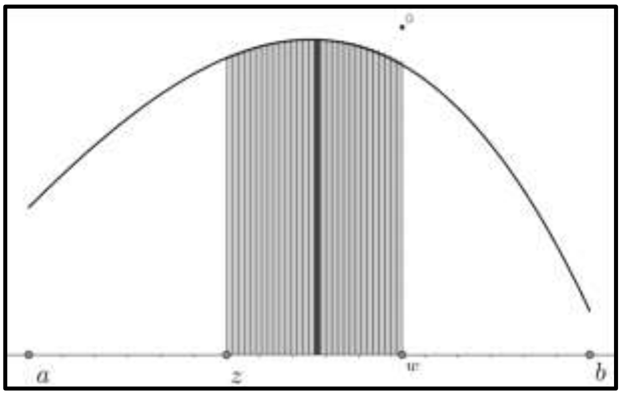
Calculando a área desse retângulo: $dA = f(a_1) \cdot dx$

A relação anterior pode ser interpretada assim: $\left.\dfrac{dA}{dx}\right|_{x=a_1} = f(a_1)$

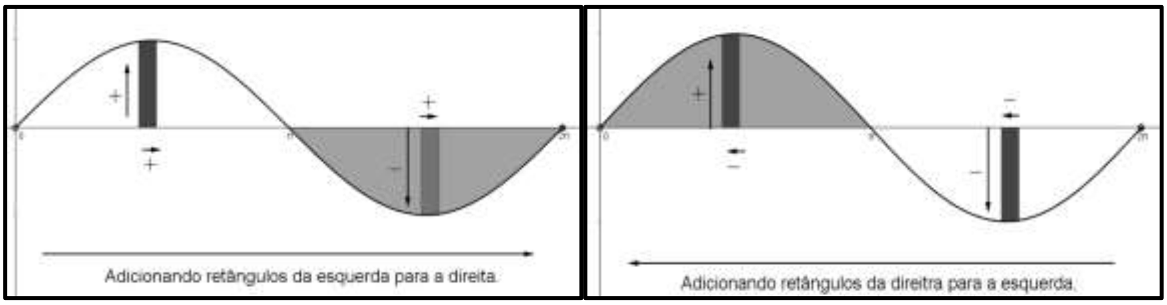
Com isso é possível concluir que a derivada da função A com relação à x é igual à função f, sendo f contínua nesse ponto.

2) Nesta atividade é proposto um estudo da função $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Um primeiro fato é que esta função pode assumir valores negativos. Uma justificativa desse fato é a seguinte: o valor de uma Soma de Riemann pode ser interpretado geometricamente como o limite da soma das áreas de retângulos, quando à medida da base desses retângulos tende a zero. Isso faz com que cada elemento de área, que denominaremos por dA, seja equivalente a um retângulo com medida da base igual a medida do intervalo, em que é calculada a área, divida pela quantidade de retângulos considerada e altura igual a imagem da função em um dos extremos do intervalo que define a base. A seguir destacamos um elemento de área dA, do intervalo $[a, z]$ e para o intervalo subdividido em 30 partes iguais.



As medidas para o cálculo de um elemento de área dA podem ter o mesmo sinal e uma com sinal contrário da outra. O valor da função pode ser negativo, quando o gráfico está abaixo do eixo x, no valor considerado como altura, e o valor da medida da base do retângulo é negativo quando $w < z$. Assim é possível definir uma orientação para determinar o sinal da imagem da função área acumulada. A seguir estão ilustradas as duas situações:



Com a aplicação produzida, primeiramente selecione a opção *Exibir função* $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Digite no campo *Sentença da função a ser estudada*, a sentença de cada uma das funções listadas; movimente o ponto A na Janela de Visualização 1, observe o conjunto de pontos que apareceu na Janela de Visualização 2 e responda a questão: com qual curva se assemelha a sequência de pontos formada pelo rastro do ponto A?

a) $f_1(x) = 4$ **curva: reta** ______________________________.

b) $f_2(x) = 5$ **curva: reta** ______________________________.

c) $f_3(x) = x$ **curva: parábola** ______________________________.

d) $f_4(x) = x + 3$ **curva: parábola** ______________________________.

e) $f_5(x) = x^2$ **curva: função polinomial do 3º grau** ____________________.

f) $f_6(x) = cos(x)$ **curva: senóide**______________________________.

g) $f_7(x) = e^x$ **curva: exponencial** ______________________________.

Atividades relacionadas à aplicação do conceito de integral – Parte 2

1) Com a aplicação produzida, primeiramente selecione a opção *Estudo da função F*. Digite no campo *Sentença da função a ser estudada* as sentenças das funções listadas na coluna “Sentença da função”; movimente o ponto A na Janela de Visualização 1, observe o rastro do ponto M e o conjunto de pontos que aparece na Janela de Visualização 2 e responda a questão: Existem pontos nos quais o esboço da função área acumulada não é diferenciável? Em caso afirmativo, indique os valores de x para os quais a função área acumulada não é diferenciável.

Sentença da função	**Código GeoGebra**	**Existem valores nos quais a função área acumulada não é diferenciável?**	**Valores de x em que a função F não é diferenciável**
a) $f_1(x)=\begin{cases}1, \text{ se } 0\le x<1\\ 3, \text{ se } 1\le x\le 2\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, 1, Se[1 ≤ x < 2, 3]]		
b) $f_2(x)=\begin{cases}x^2, \text{ se } 0\le x<1\\ 1, \text{ se } 1\le x\le 2\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, x^2, Se[1 ≤ x < 2, 1]]		
c) $f_3(x)=\begin{cases}x^2, \text{ se } 0\le x<1\\ x\ , \text{ se } 1\le x<2\\ 0{,}5, \text{ se } 2\le x\le 3\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, x², Se[1 ≤ x < 2, x, Se[2 ≤ x ≤ 3, 0.5]]]		
d) $f_4(x)=\begin{cases}x^3, \text{ se } 0\le x<1\\ x^2, \text{ se } 1\le x\le 2\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, x^3, Se[1 ≤ x < 2, x^2]]		

Esses exemplos mostram que para a existência de uma função diferenciável $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ em todos os pontos do domínio de f: $[a, b]\rightarrow \mathbb{R}$ é necessário que a função *f* seja contínua. Nos exemplos anteriores as funções área acumulada que apresentaram bicos nas representações gráficas e os valores de x que a representação da função não diferenciável eram aqueles nos quais a função *f* não é contínua.

Atividades relacionadas à aplicação do conceito de integral – Parte 2 (com respostas)

1) Com a aplicação produzida, primeiramente selecione a opção *Estudo da função F*. Digite no campo *Sentença da função a ser estudada* as sentenças das funções listadas na coluna “Sentença da função”; movimente o ponto A na Janela de Visualização 1, observe o rastro do ponto M e o conjunto de pontos que aparece na Janela de Visualização 2 e responda a questão: Existem pontos nos quais o esboço da função área acumulada não é diferenciável? Em caso afirmativo, indique os valores de x para os quais a função área acumulada não é diferenciável.

Sentença da função	Código GeoGebra	Existem valores nos quais a função área acumulada não é diferenciável?	Valores de x em que a função F não é diferenciável
a) $f_1(x)=\begin{cases}1, \text{ se } 0\le x<1\\ 3, \text{ se } 1\le x\le 2\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, 1, Se[1 ≤ x < 2, 3]]	**Sim**	**1**
b) $f_2(x)=\begin{cases}x^2, \text{ se } 0\le x<1\\ 1, \text{ se } 1\le x\le 2\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, x^2, Se[1 ≤ x < 2, 1]]	**Não**	
c) $f_3(x)=\begin{cases}x^2, \text{ se } 0\le x<1\\ x, \text{ se } 1\le x<2\\ 0{,}5, \text{ se } 2\le x\le 3\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, x², Se[1 ≤ x < 2, x, Se[2 ≤ x ≤ 3, 0.5]]]	**Sim**	**2**
d) $f_4(x)=\begin{cases}x^3, \text{ se } 0\le x<1\\ x^2, \text{ se } 1\le x\le 2\end{cases}$	Se[0 ≤ x < 1, x^3, Se[1 ≤ x < 2, x^2]]	**Não**	

Esses exemplos mostram que para a existência de uma função diferenciável $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ em todos os pontos do domínio de f: $[a, b]\rightarrow \mathbb{R}$ é necessário que a função f seja contínua. Nos exemplos anteriores as funções área acumulada que apresentaram bicos nas representações gráficas e os valores de x que a representação da função não diferenciável eram aqueles nos quais a função f não é contínua.