Schwerpunktaufgaben zur Vorbereitung auf die Leistungsfeststellung

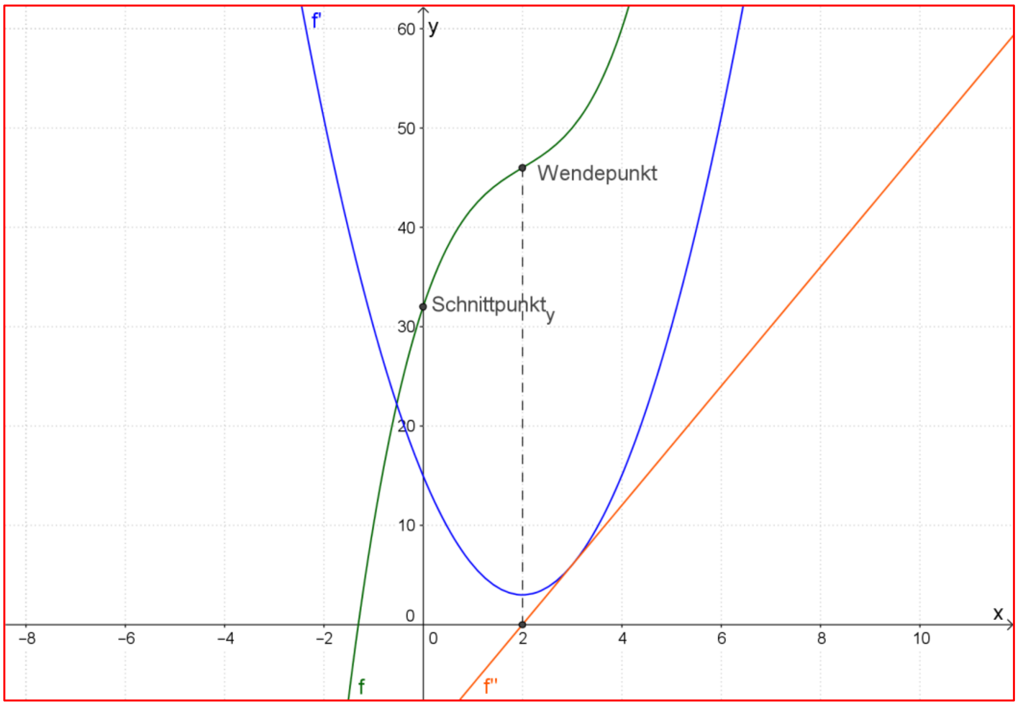
1. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Verfahrens. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Taschenrechner. → ganzzahlig

$$\begin{array}{rrrrcr} 23a & +9b & +c & +d & = & 16 \\ 15a & +5b & -c & & = & -30 \\ -28a & -2b & +2c & +d & = & 46 \\ -12a & -6b & -2c & & = & -6 \end{array}$$

Skizzieren Sie anschließend die Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

in einem geeigneten (!) Koordinatensystem unter Zuhilfenahme charakteristischer Punkte (Nullstellen, Extrema, Schnittpunkt mit y-Achse u.a.) und sinnvoller Achseneinteilung!



Keine Extrempunkte, da 2. Ableitung keine Nullstellen; Wendestelle bei $x_W = 2$, da Nullstelle der 3. Ableitung $x_0 = 2$; Achseneinteilung beachten

Schwerpunkte: Gauß-Algorithmus, Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Termumformung

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 4{,}5\, x^2 + 5{,}0625$ mit $x \in R$.

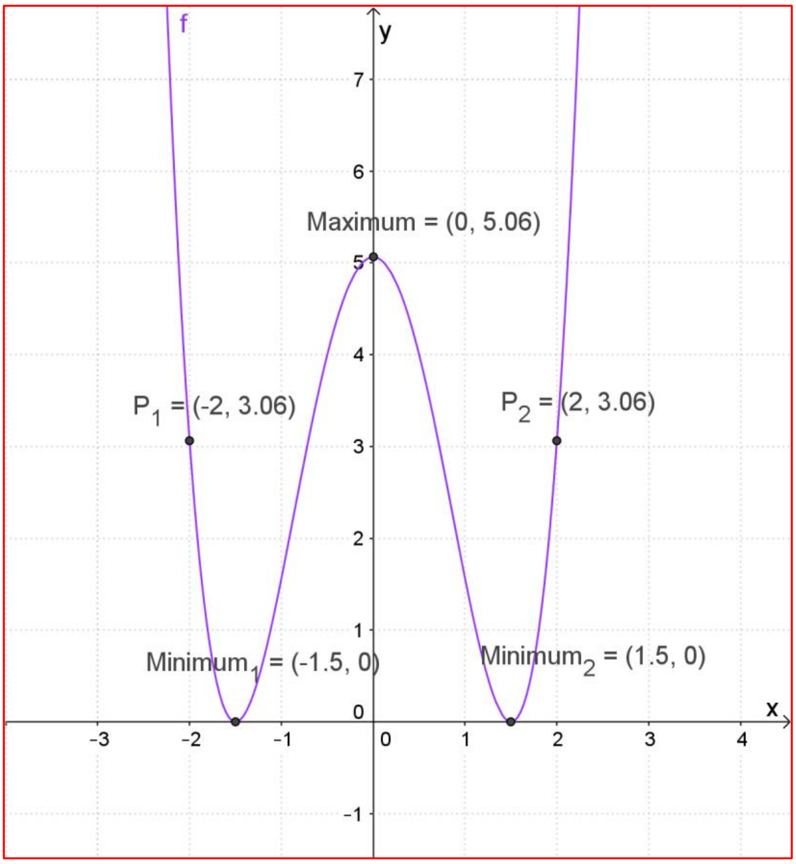
   a. Untersuchen Sie die Funktion f(x) auf Symmetrie und begründen Sie Ihre Aussage. Achsensymmetrie → f(-x) = f(x)

   b. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f(x) im Unendlichen (positiv und negativ). Wächst jeweils ins positiv Unendliche

   c. Bestimmen Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie Nullstellen der Funktion f(x). s.u. Minima = Nullstellen

   d. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f(x) in einem geeigneten Koordinatensystem unter Zuhilfenahme der oben ermittelten Punkte und einer Wertetabelle. Ihr Koordinatensystem sollte mindestens das Intervall -2 < x < 2 abdecken.

   e. Welche Funktionswerte besitzt die Funktion f(x) jeweils am Rand des unter d) angegebenen Intervalls? S.u.



   f. Berechnen Sie alle Schnittpunkte der Funktion f(x) mit der Parabel mit der Funktionsgleichung $g(x) = 2x^2 - 6x + 6{,}5$ mit $x \in R$. Runden Sie sinnvoll auf 2 Nachkommastellen.

   Graph-Menü → beide Funktionen zeichnen, Schnittpunkte zur Kontrolle anzeigen lassen (ISCT)

   F(x) = g(x) → Gleichung lösen → vorher umstellen (Funktion 3. Grades → EQUA)

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}25\,x^3 - 0{,}5\,x^2 - 0{,}75\,x + 1{,}5$ mit x ∊ R.

   a. Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle:

   Fehlende Werte entweder übers Graph-Menü berechnen lassen → y-cal bzw. x-cal

   Oder gegebene Werte in Funktionsgleichung einsetzen, umstellen und ausrechnen (Bsp. Wenn x gegeben ist, für alle x diesen Wert einsetzen, genauso für y, dann wird es allerdings eine Gleichung 3. Grades die gelöst werden muss → EQUA-Menü)

x	-2	-1,8	-1,73	-1,7	1,73	1,8	1,73	2,1
f(x)	-1	-0,23	0,00825	0,10	0,00825	-0,01	0	0,04

   Welche begründete Aussage können Sie aufgrund der Wertetabelle, also ohne weitere Berechnungen, über die Nullstellen der Funktion f(x) machen?

   - Es muss 3 Nullstellen geben, da 3 Vorzeichenwechsel stattfinden
   - Zw. x= -1,8 und –1,7, x= 1,7 und 1,8 sowie bei x=1,73

   b. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktion f(x) mit der y-Achse und alle Nullstellen.

   Graph-Menü: y-Achsenabschnitt= 1,5, x_01=-1,73, x_02=1,73, x_03=2

   c. Untersuchen Sie die Funktion f(x) auf Symmetrie und begründen Sie Ihre Aussage.

   Keine Symmetrie, da f(-x) keine der Bedingungen für Symmetrie erfüllt, außerdem Exponenten gerade und ungerade

   d. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f(x) im Unendlichen (positiv und negativ).

   Grenzwert berechnen für plus und minus Unendlich → für -∞ geht die Funktion ebenfalls gegen -∞, für +∞ gegen +∞

   e. Bestimmen Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie Nullstellen der Funktion f(x).

   Maximum: (-0,54; 1,72), Minimum: (1,87;-0,02) → Nullstellen 1. Ableitung, Wendepunkt: (0,67;0,85) → Nullstelle 2. Ableitung

   f. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f(x) in einem geeigneten Koordinatensystem unter Zuhilfenahme der oben ermittelten Punkte und einer Wertetabelle. Ihr Koordinatensystem sollte mindestens das Intervall $-2 < x < 3$ abdecken.

   Graph-Menü als Vorlage

   g. Welche Funktionswerte besitzt die Funktion f(x) jeweils am Rand des unter d) angegebenen Intervalls?

   -2 und 3 jeweils für x einsetzen und ausrechnen lassen (s.o.) f(-2)=-1, f(3)=1,5

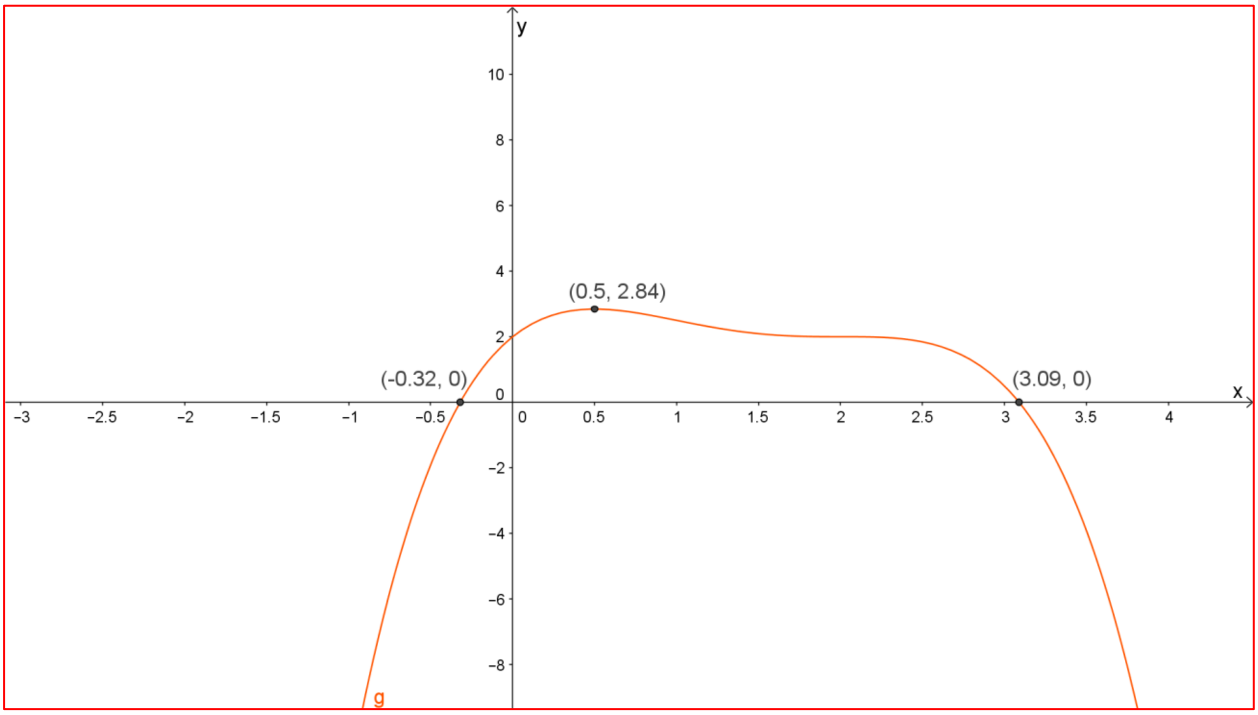
Schwerpunkte: Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Symmetrie, Grenzwerte, Termumformung

4. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus:

(I)	$32\,a + 16\,b + 8\,c = -16$
(II)	$16\,a + 6\,b + 2\,c = -2$
(III)	$24\,a + 6\,b + c = 0$
(IV)	$d = 4$
(V)	$e = 2$

Geben Sie die Funktionsgleichung von $f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$ an und skizzieren Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Geben Sie des Weiteren die Nullstellen und den Hochpunkt der Funktion an (auf zwei Nachkommastellen gerundet) und markieren diese in Ihrer Skizze. Begründen Sie, dass es sich um einen globalen Extrempunkt handelt.

- LGS mit 3 Variablen, mit GTR Ergebnis kontrollieren
- L=(-0,5; 3; -6)
- $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 4x + 2$
- globales Extremum, da nach unten geöffnet



Schwerpunkte: Gauß-Algorithmus, Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung)

5. Eine ganzrationale Funktion f(x) fünften Grades hat die Nullstellen 0, -1, 1, -2 und 2. Auf dem Graphen der Funktion liegt der Punkt P(3 | 120).

   a. Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der oben beschriebenen Funktion $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ mit $x \in R$ ist.

      Nullstellen der Funktion berechnen → Nutzung des Equa-Menüs

      Funktionswert an der Stelle x=3 berechnen

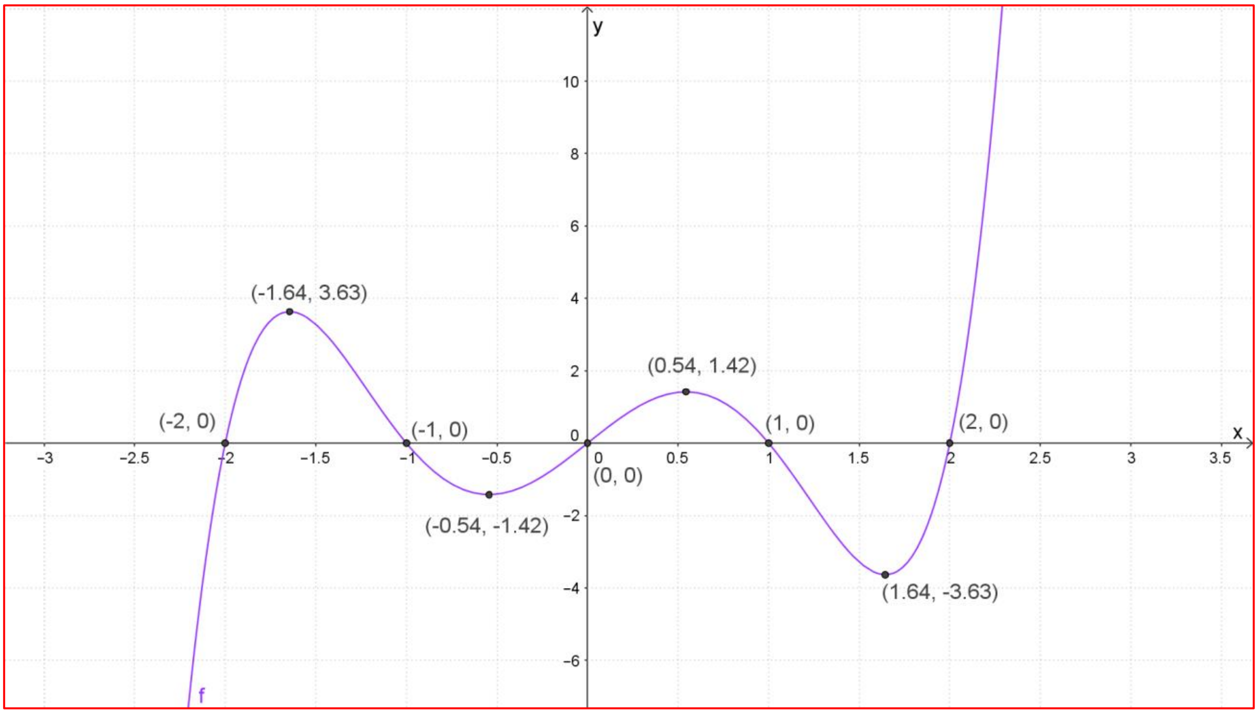
   b. Untersuchen Sie die Funktion f(x) auf ihre Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

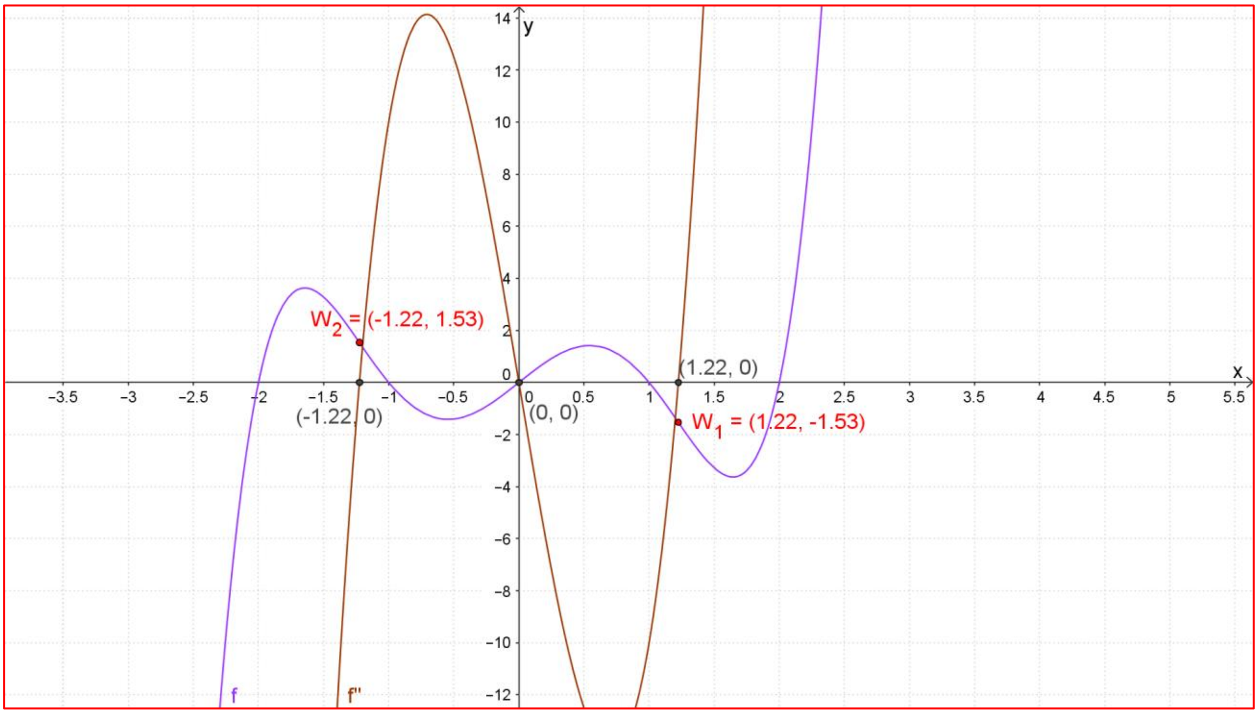
      Siehe Bedingungen für Symmetrie → Punktsymmetrie, nur ungerade Exponenten

      Nullstellen siehe oben

      Extrema → Nullstellen 1. Ableitung

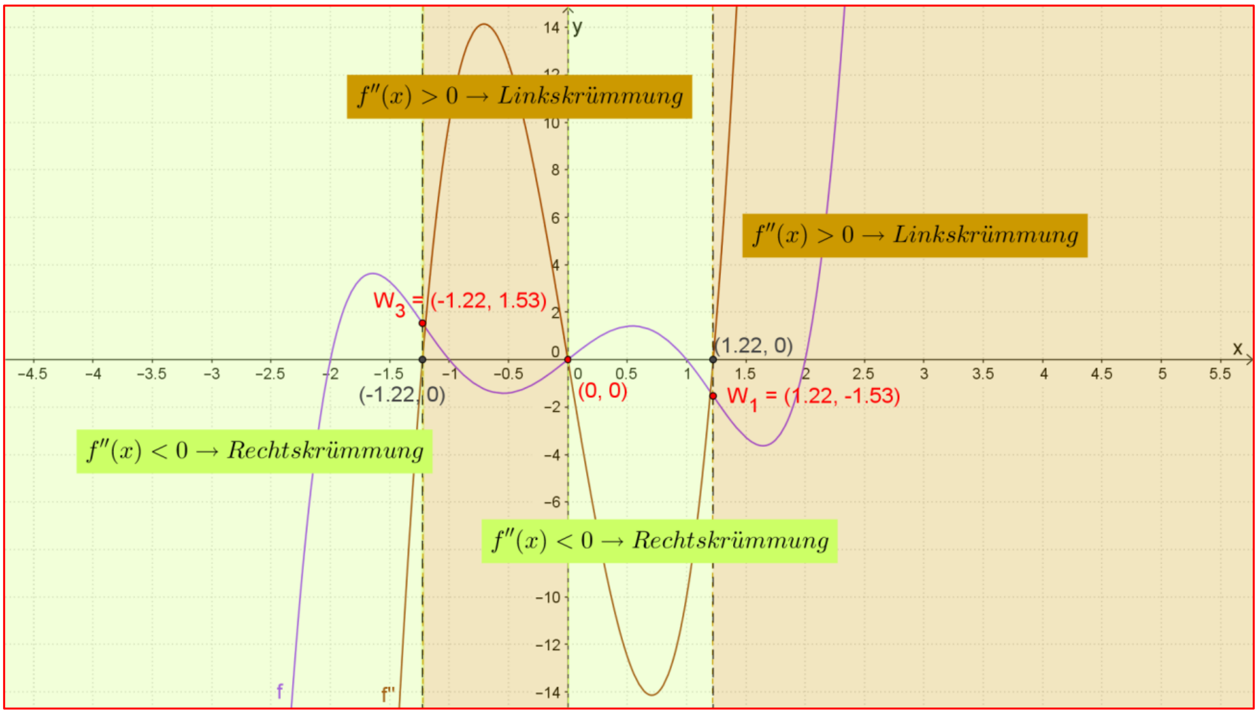
      Wendepunkt → Nullstellen 2. Ableitung, mit 3. Ableitung kontrollieren





c. Bestimmen Sie die Charakteristik des Krümmungswechsels am Wendepunkt und begründen Sie rechnerisch. Fertigen Sie für die Begründung eine Skizze an, die Ihre Begründung veranschaulicht (Skizze der Ausgangsfunktion und 2. Ableitung).

2. Ableitung untersuchen für Wendestelle x_W < 0 und x_W > 0, zur Hilfe Skizze der 2. Ableitung, wenn Graph oberhalb der x-Achse (positive Funktionswerte) → Ausgangsfunktion linksgekrümmt, wenn Graph unterhalb der x-Achse (negative Funktionswerte), dann rechts gekrümmt



d. Zeichnen Sie den Graphen von f(x) in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $-2 < x < 2$. Markieren Sie alle charakteristischen Punkte, die Sie bei b) berechnet haben. Geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

s.o.

e. Ermitteln Sie die Tangentengleichung an f(x) im Koordinatenursprung.

Anstieg bei (0,0) berechnen – 1. Ableitung Null einsetzen → f‘(0) = m_T

Geradengleichung y = m x + n → x, y, m einsetzen, n ausrechnen, Gleichung angeben

f. Bestimmen Sie die Normale zur Tangente aus Aufgabe e).

Normale = Senkrechte → m_N = - 1/ m_T (negativer Kehrwert) → s. Tafelwerk

Schwerpunkte: Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Tangente und Normale

6. Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$f(x) = -0{,}5\,x^3 + 4{,}5\,x^2 - 12x + 7{,}5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a. Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung

$0 = -0{,}5\,x^3 + 4{,}5\,x^2 - 12x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat. Gehen Sie dabei auf folgende Stichworte ein: Verlauf einer Funktion 3. Grades, Nullstellen, Verhalten im Unendlichen und Extrema.

- Funktion 3. Grades typischer Verlauf → maximal 2. Extrempunkte
- Grafik zeigt bereits beide Extrempunkte
- Maximal besitzt Funktion 3. Grades 3 Nullstellen, eine vor dem ersten Extrema, eine zwischen den Extrema und eine nach dem zweiten Extrema, allerdings nicht immer, je nachdem wie die Funktion in y-Richtung verschoben ist
- Funktion verläuft für x gegen +Unendlich nach „Minus-Unendlich“, also kommt keine Nullstelle mehr

b. Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von f(x). Welcher Krümmungswechsel liegt vor? Begründen Sie.

- 2. Ableitung → Nullstellen, in Ausgangsfunktion einsetzen
- Krümmungswechsel s.o.

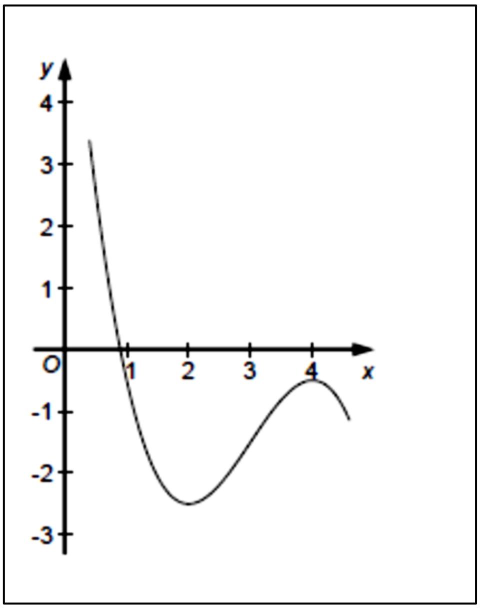
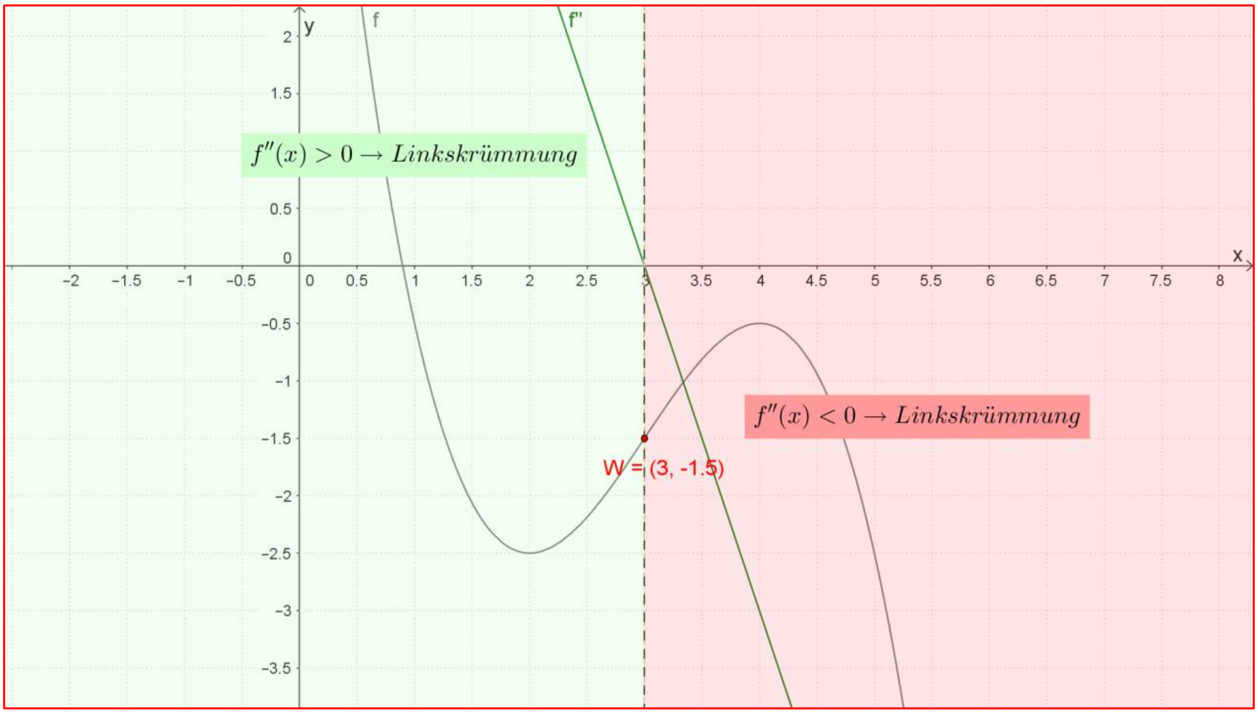


Abbildung 1 - Funktionsgraph von f(x)



7. Gegeben ist die Funktion *f(x) = 0,125 x³ - 1,5 x + 2* mit x ∈ R.
   a. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem.
   b. Machen Sie eine Aussage zum Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen und begründen Sie diese rechnerisch.
      - Keine Symmetrie → gerade und ungerade Exponenten, Bedingungen für f(-x) s.o. → -x einsetzen und zeigen, dass keine Bedingung erfüllt ist
   c. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f(x) im Unendlichen.

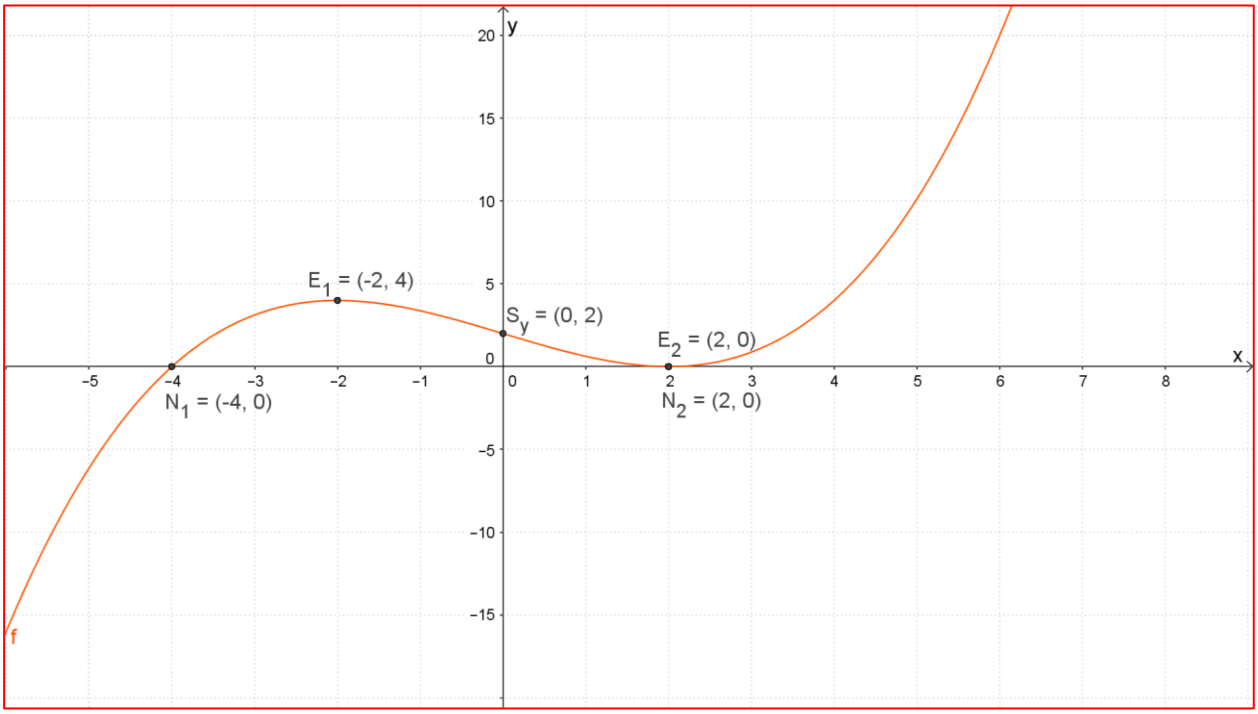
  - Grenzwerte der Funktion für + und – Unendlich berechnen

d. Berechnen Sie alle Schnittpunkte mit der Ordinaten- und Abszissenachse.

  - Nullstellen und y-Achsenabschnitt

e. Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f(x).

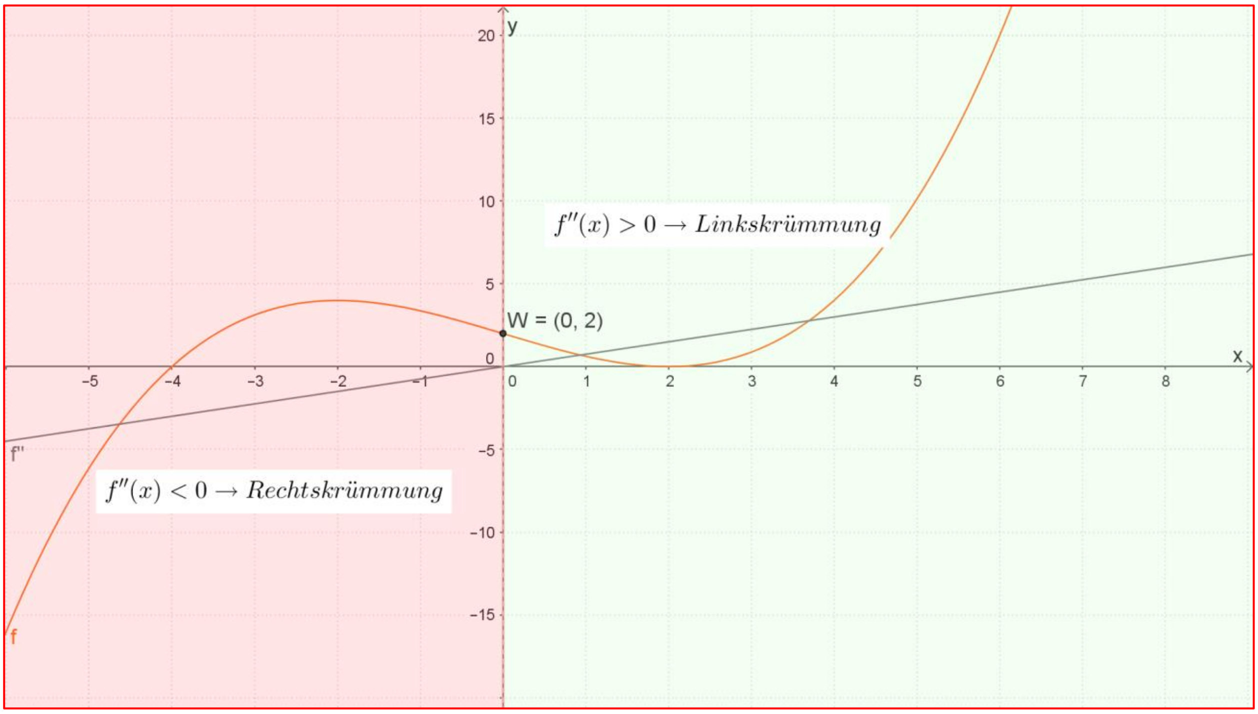
  - Extrempunkte berechnen → Nullstellen der 1. Ableitung



f. Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f(x) und charakterisieren Sie den Krümmungswechsel. Begründen Sie rechnerisch.

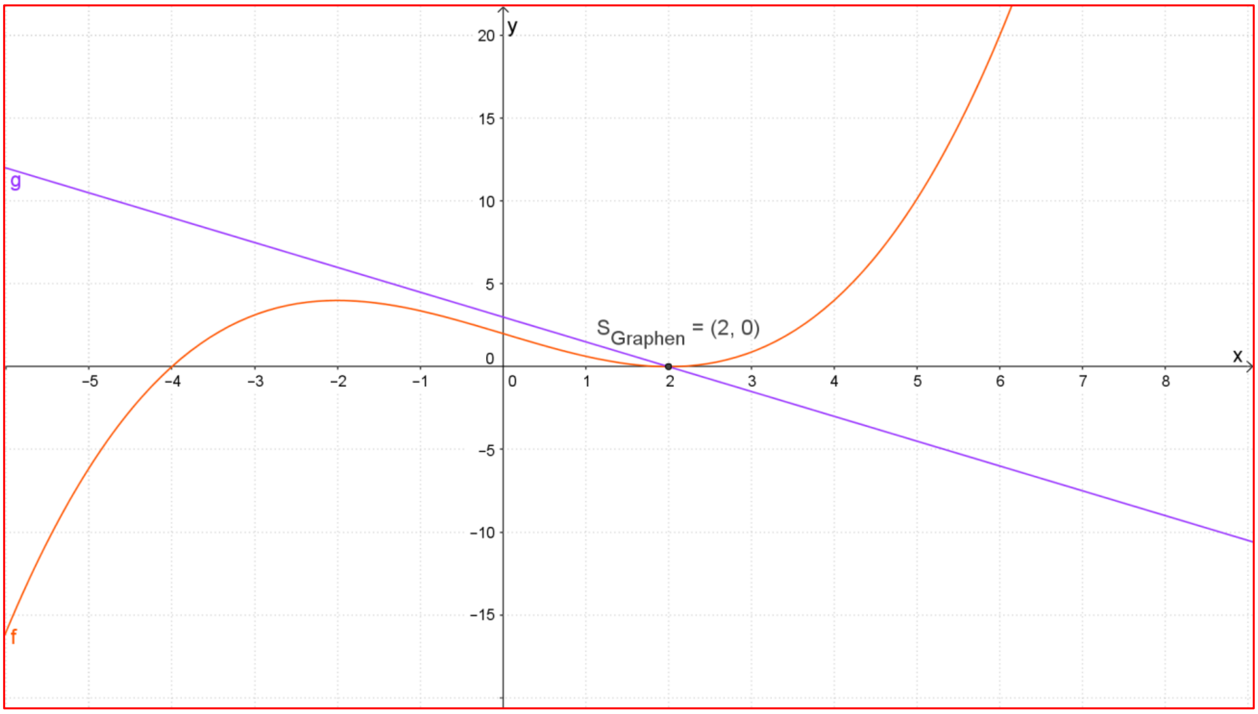
2. Ableitung, Nullstelle → Wendestelle → in Ausgangsfunktion einsetzen

Krümmungswechsel siehe oben!



g. Bestimmen Sie zeichnerisch den Schnittpunkt mit der Geraden *g(x)* = *-1,5x +3*. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

- Beide Graphen zeichnen und ablesen
- Funktionen gleichsetzen und nach x auflösen

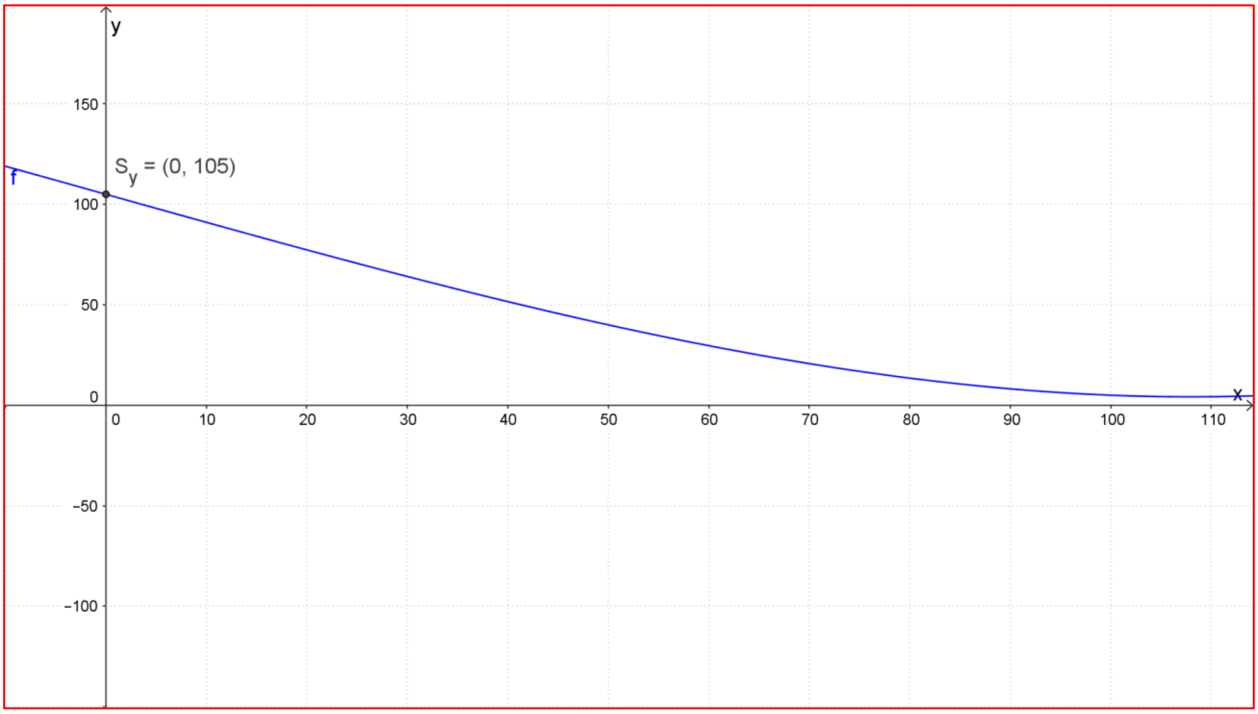


8. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens:

(I)	$d = 105$
(II)	$2b = 0$
(III)	$1000000\,a + 10000\,b + 100\,c + d = 5$
(IV)	$30000\,a + 200\,b + 1\,c = -0{,}2$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse, wenn die oben berechneten Variablen a, b, c und d die Koeffizienten (in absteigender Reihenfolge) einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sind.

- Nur Gleichung (III) und (IV) von Bedeutung
- Gleichung (I) und (II) jeweils einsetzen, wenn möglich
- Es ergeben sich 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten → Lösen
- A= 0,00004 bzw. ($4 \bullet 10^{-5}$); C= -1,4
- $f(x) = 0{,}00004x^3 - 1{,}4x + 105$
- y-Achsenabschnitt mit GTR berechnen/anzeigen lassen



9. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

- Ergebnisse mit GTR kontrollieren

(I) $7x + 6y + 7z = 100$	(I) $4x + 3y + 2z = 10$
(II) $x - 2y + z = 0$	(II) $4x + 9y - z = 58$
(III) $3x + y - 2z = 0$	(III) $x + 6y + 2z = 34$

(I) $2x + 3y + z = 17$	(I) $9a + 5b + 4c = 21$
(II) $3x + y + 3z = 15$	(II) $6a + 3b - 5c = 7$
(III) $x + 3y + 3z = 13$	(III) $3a - 10b + 6c = 35$