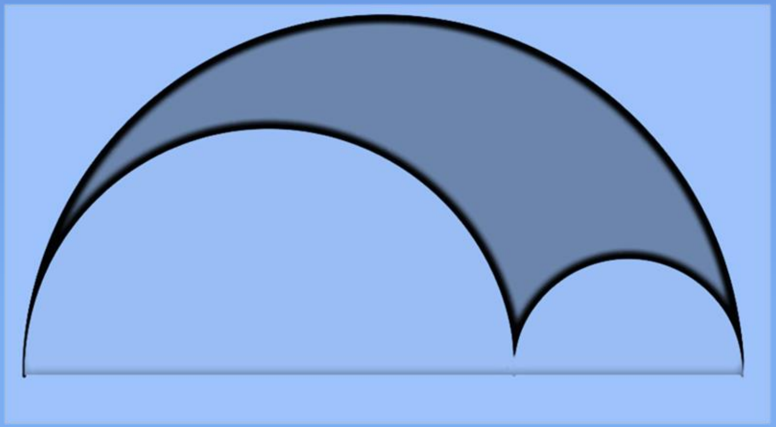
L’ Arbelos di Archimede
Geogebra come strumento attivo



The mathematician’s patterns, like the painter’s or the poet’s must be beautiful; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G.H. Hardy, A Mathematician’s Apology

Sommario

- Premessa
- Il problema
- I prerequisiti
- L’organizzazione del laboratorio
- Il riscaldamento iniziale
- L’attività del gruppo
- Un tuffo nel passato: La Proposizione IV del Liber Assumptorum (Archimede)
- Conclusioni

Premessa

Nelle Indicazioni nazionali per i Nuovi Licei leggiamo:

"***Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie elementari per la costruzione di modelli matematici in casi molto semplici ma istruttivi, e saprà utilizzare strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. [Nel liceo classico un'attenzione particolare sarà posta alle relazioni tra pensiero matematico e pensiero filosofico]…."***

"Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale."

"L'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche; la pratica dell'argomentazione e del confronto; la cura di una modalità espositiva scritta ed orale corretta, pertinente, efficace e personale; l'uso degli strumenti multimediali a supporto dello studio e della ricerca".

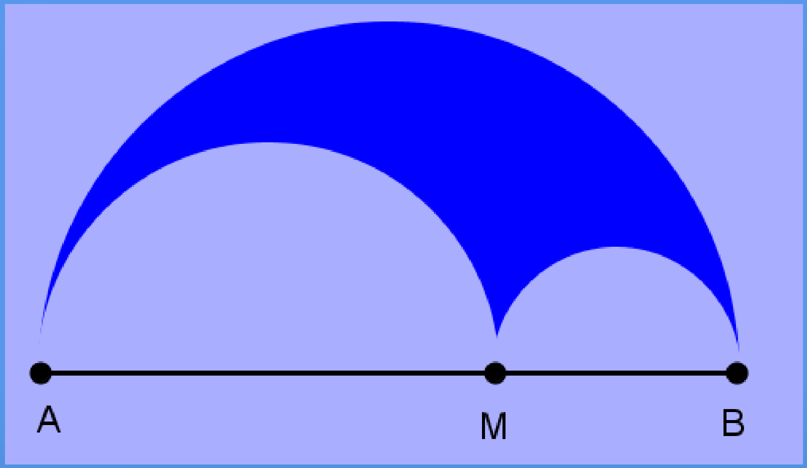
- Il laboratorio pertanto è visto come un ambiente in cui fare congetture, verificarne la validità, fare ricerca, collaborare e confrontarsi con i compagni, dove gli allievi hanno la diretta responsabilità del proprio lavoro e dei risultati.
- Per realizzare una didattica laboratoriale l’insegnante deve mettere in primo piano l’aspetto costruttivo della matematica, partendo da problemi e non formule.
- I concetti e i procedimenti propri della disciplina diventano quindi strumenti per risolvere problemi.
- L’insegnante è il regista della situazione didattica che realizza un apprendimento significativo.

- L’attività di laboratorio che presento è un classico problema di massimo che può essere risolto usando diversi registri rappresentativi.
- Le competenze matematiche acquisite nello studio del calcolo letterale, dei teoremi di Pitagora e di Euclide, della geometria analitica sono state messe tutte in gioco. La figura di Archimede, cui viene attribuito il libro che contiene l’**Arbelos**, e quindi il contesto storico in cui si intraprende il calcolo delle aree, emerge solo alla fine, quando si sente la necessità di una autentica dimostrazione, con una interessante lettura in latino (1) della proposizione IV del Libro dei Lemmi, che può essere di stimolo per ulteriori approfondimenti.

- (1)Al termine del percorso di studi lo studente è in grado di**: praticare la traduzione non come meccanica applicazione di regole, ma come strumento di conoscenza di testi e autori.** (Indicazioni Nazionali per Lingua e cultura latina – Liceo Classico)

Il Problema

Data una semicirconferenza di diametro ***AB***, si consideri un punto ***M*** sul diametro e si costruiscano le semicirconferenze di diametri ***AM*** e ***MB***. La parte di piano delimitata dalle tre circonferenze è detta **Arbelos**. Studia la variazione dell'area dell'**Arbelos** al variare di ***M*** sul diametro ***AB***, individuandone il valore massimo.



I prerequisiti

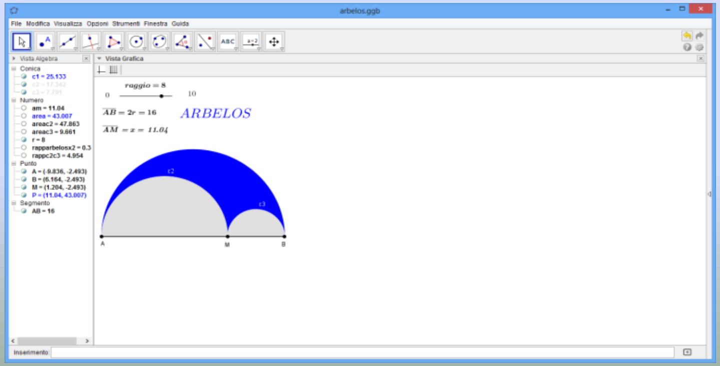
- Calcolo letterale
- Teoremi di Pitagora ed Euclide
- Area del cerchio
- La funzione lineare, la funzione di secondo grado
- Strumenti e principali comandi di Geogebra

L’organizzazione del laboratorio

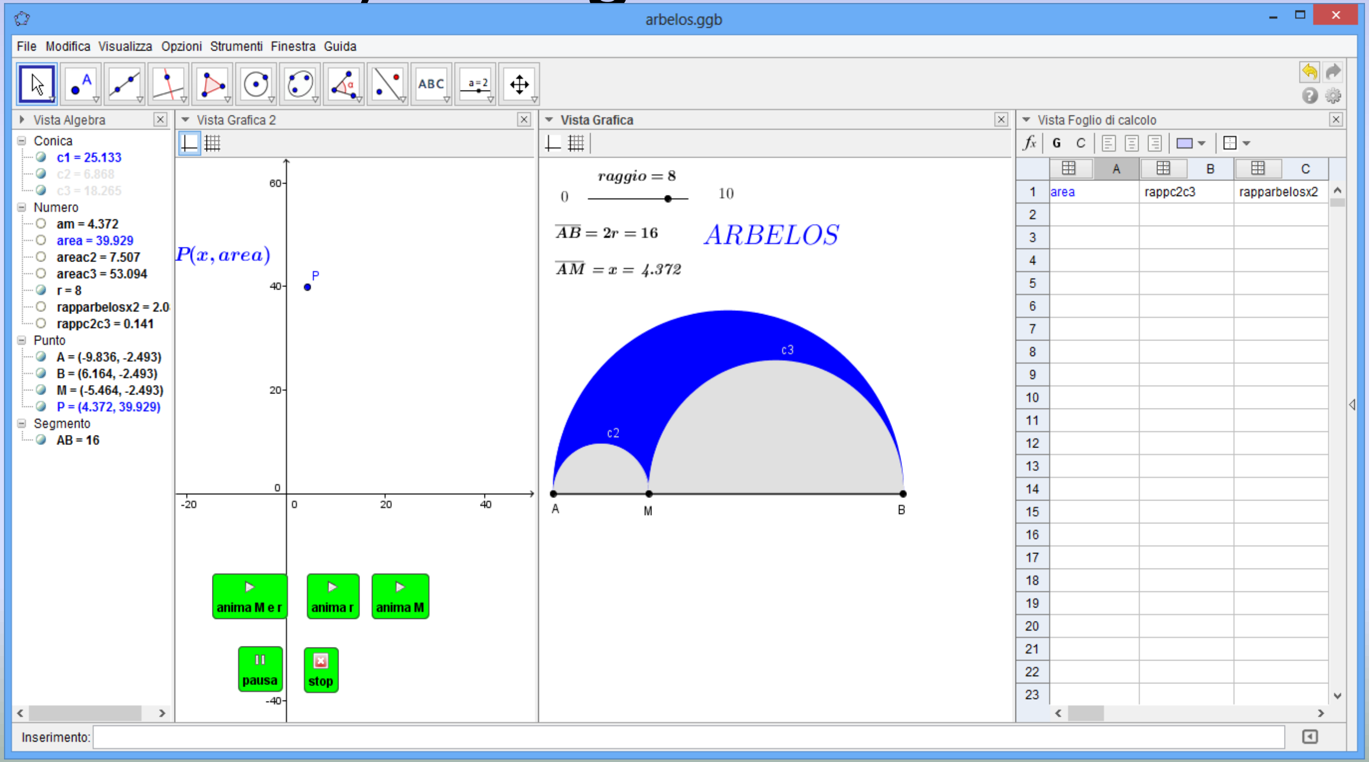
- Riscaldamento iniziale: gli allievi familiarizzano con il problema e osservano nell’ambiente **geogebra** le relazioni tra l’area dell’Arbelos e le variazioni di **M** e **r**, di **r** soltanto, di **M** soltanto.
- Attività 1: gli studenti calcolano l’area come differenza traducendola in una funzione di secondo grado il cui grafico è una parabola e ne determinano il valore massimo che verificano anche per via algebrica.
- Attività 2: gli studenti, traendo spunti dall’ambiente **geogebra**, seguono un approccio “geometrico-algebrico” per dimostrare l’equivalenza tra l’arbelos e un particolare cerchio. Il problema si riconduce alla determinazione del cerchio massimo.
- Attività 3: gli studenti leggono e traducono la **Proposizione IV del Liber Assumptorum** dell’opera Archimedis OPERA OMNIA di **J.L.Heiberg** vol.II- LIPSIAE MDCCCLXXXI

Il riscaldamento iniziale
SCHEDA DI LAVORO N.1

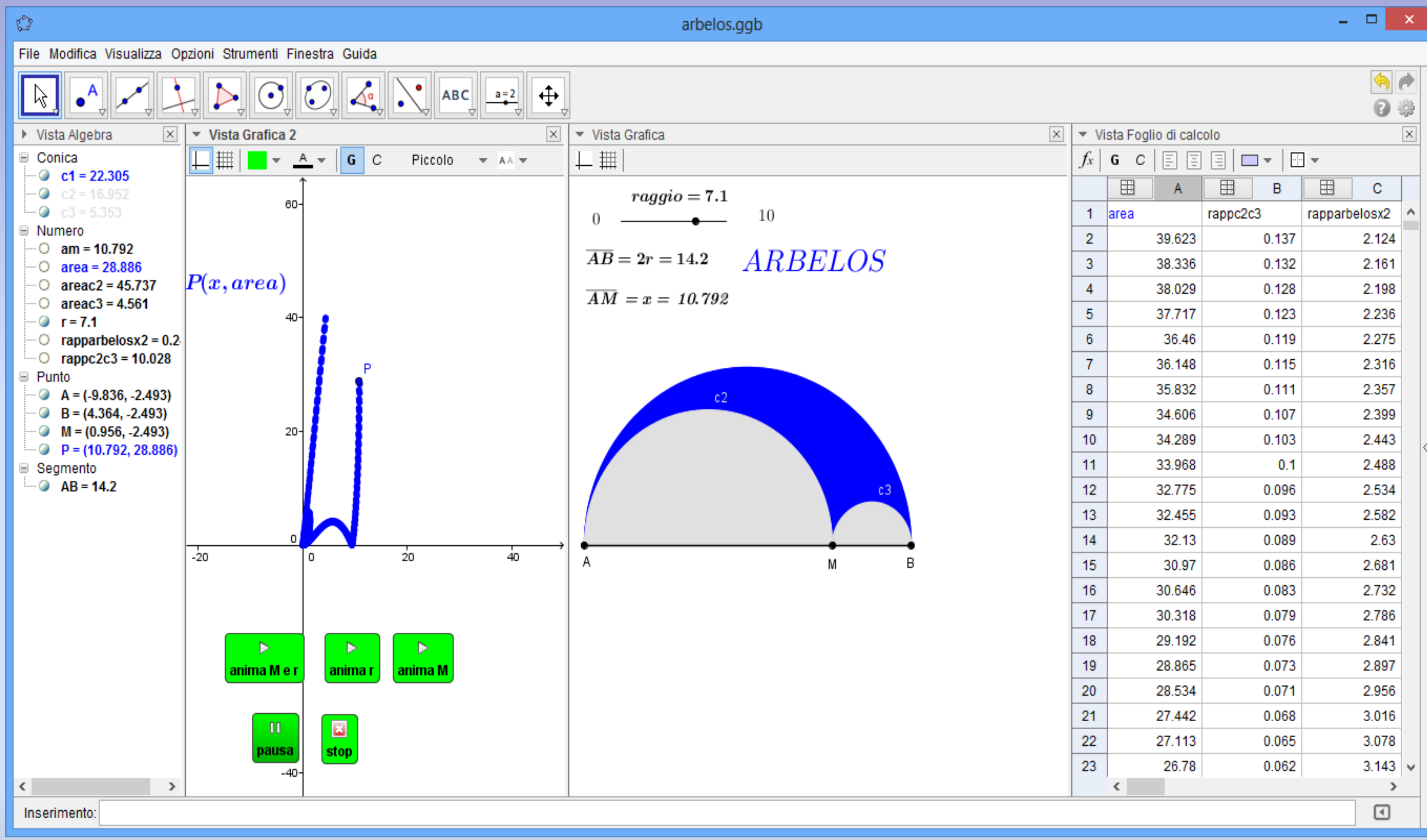
- Fissa un raggio a piacere e disegna su un foglio di carta il tuo **Arbelos**. Scrivi la formula per calcolare l'area di un semicerchio. Prova a pensare cosa accade se **r** o **M** variano.
- ***lavorando in coppia***
- Apri il file **arbelos.ggb** e osserva come varia l'area dell'Arbelos (blu) al variare di **r** tra 0 e 10 e **M** ($\overline{AM} = x$)



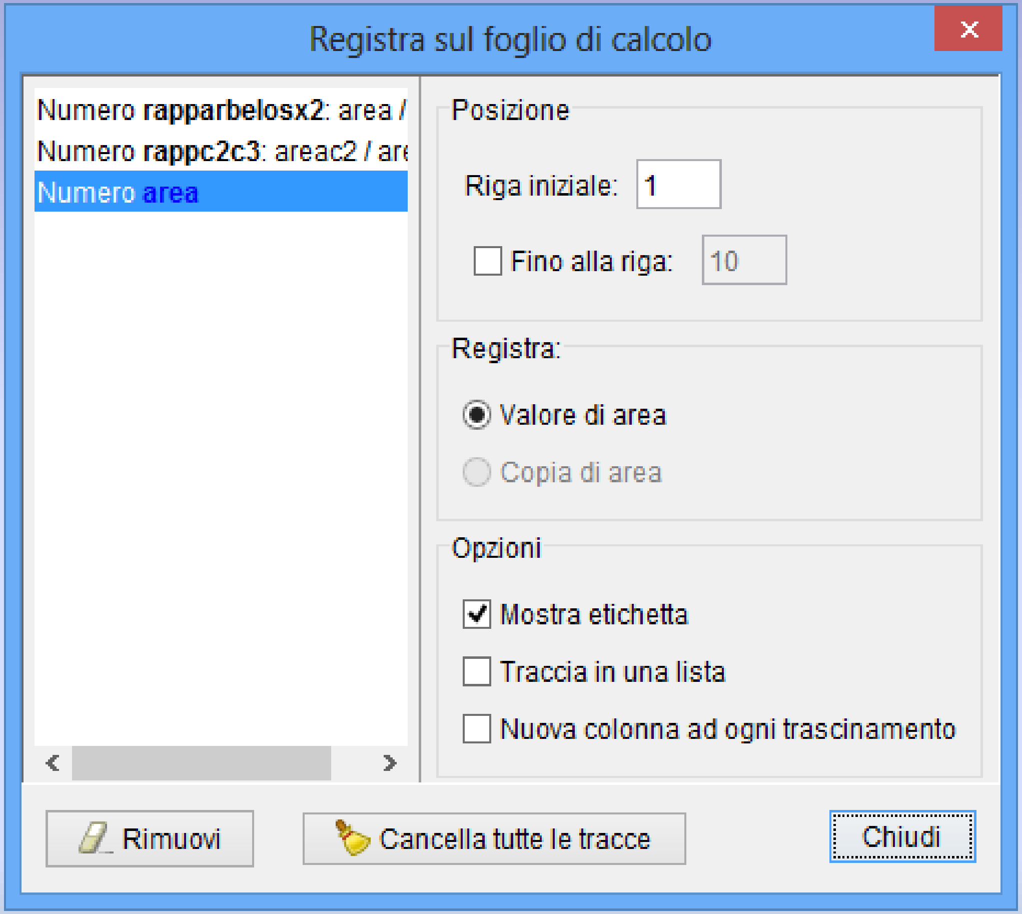
- Visualizza la **Vista Grafica 2**
- Imposta la registrazione di **area** (area Arbelos), **rappc2c3** (rapporto aree semicerchi c2 e c3) e **rapparbelosx2** (rapporto tra area Arbelos e quadrato di x) sul **foglio di calcolo**.



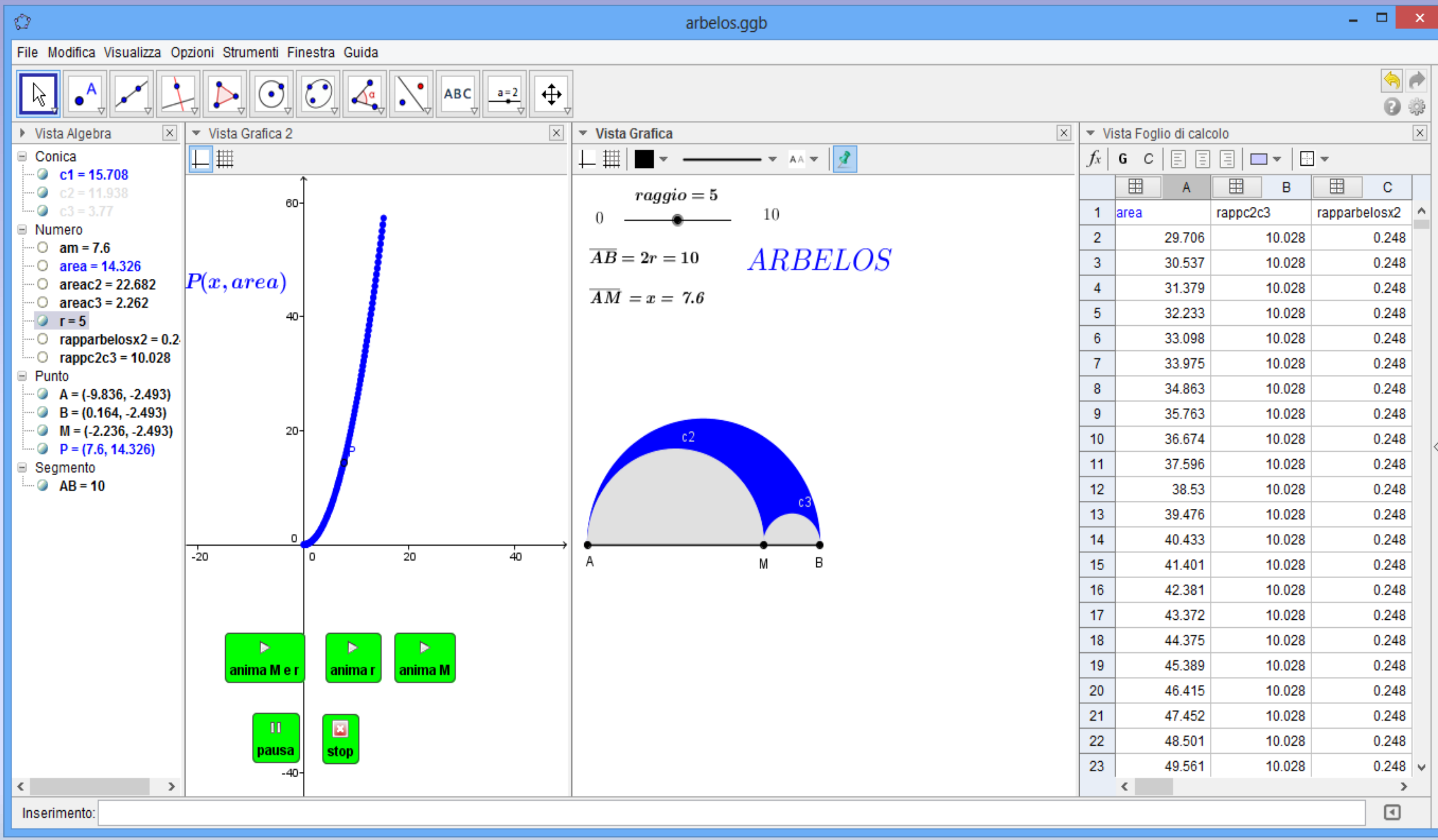
- Esegui la registrazione al variare di **r** e **M** e segui la traccia di **P**. Cosa osservi?



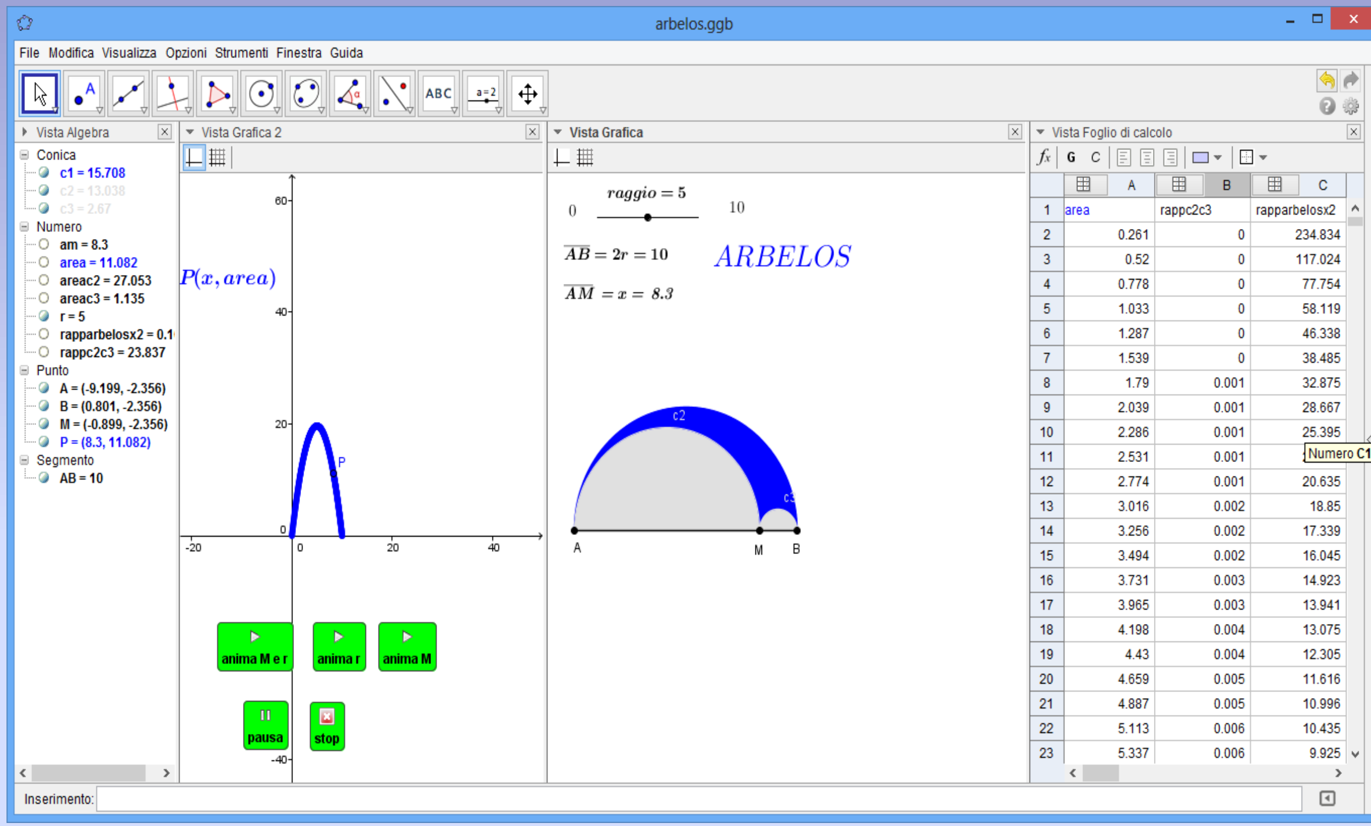
- Premi **stop** e **cancella tutte le tracce** per eseguire altre registrazioni



- Esegui la registrazione al variare solo di **r**. Cosa osservi?



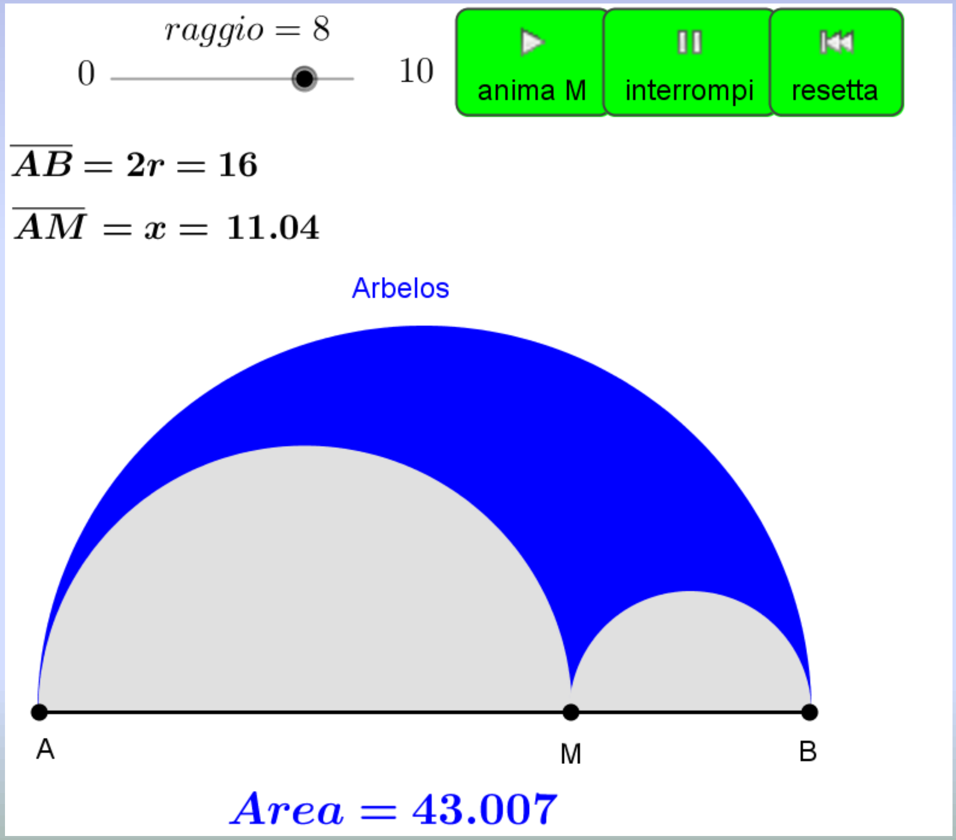
- Esegui la registrazione al variare solo di **M**. Cosa osservi?



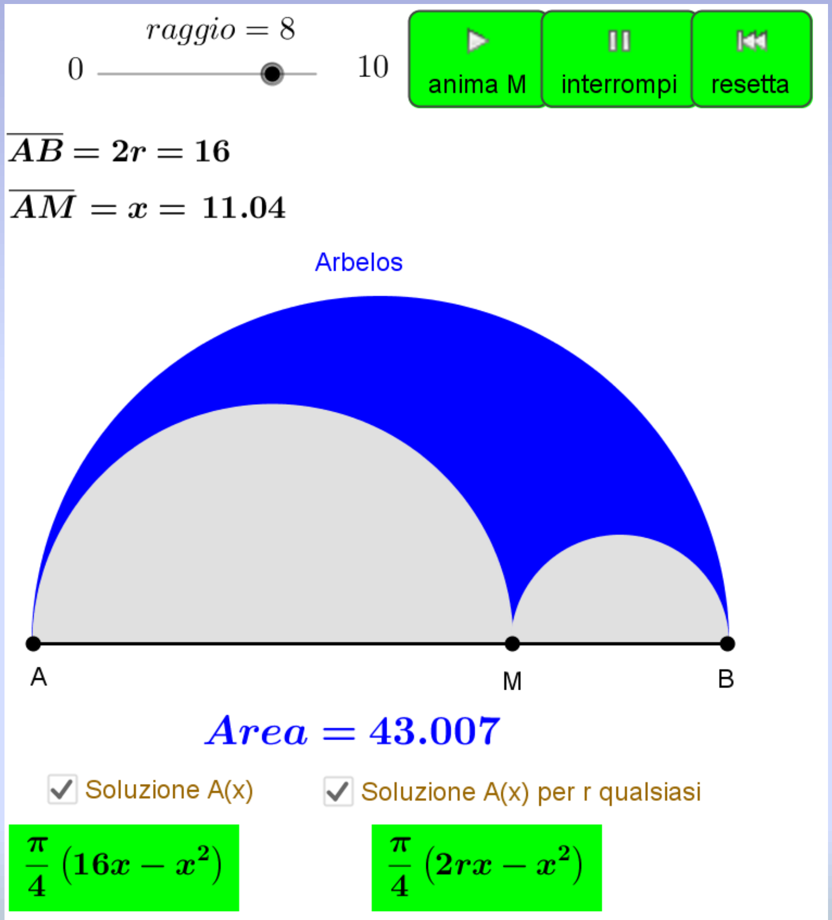
- **Scrivi le tue osservazioni e discutile con i compagni.**

SCHEDA DI LAVORO N.2

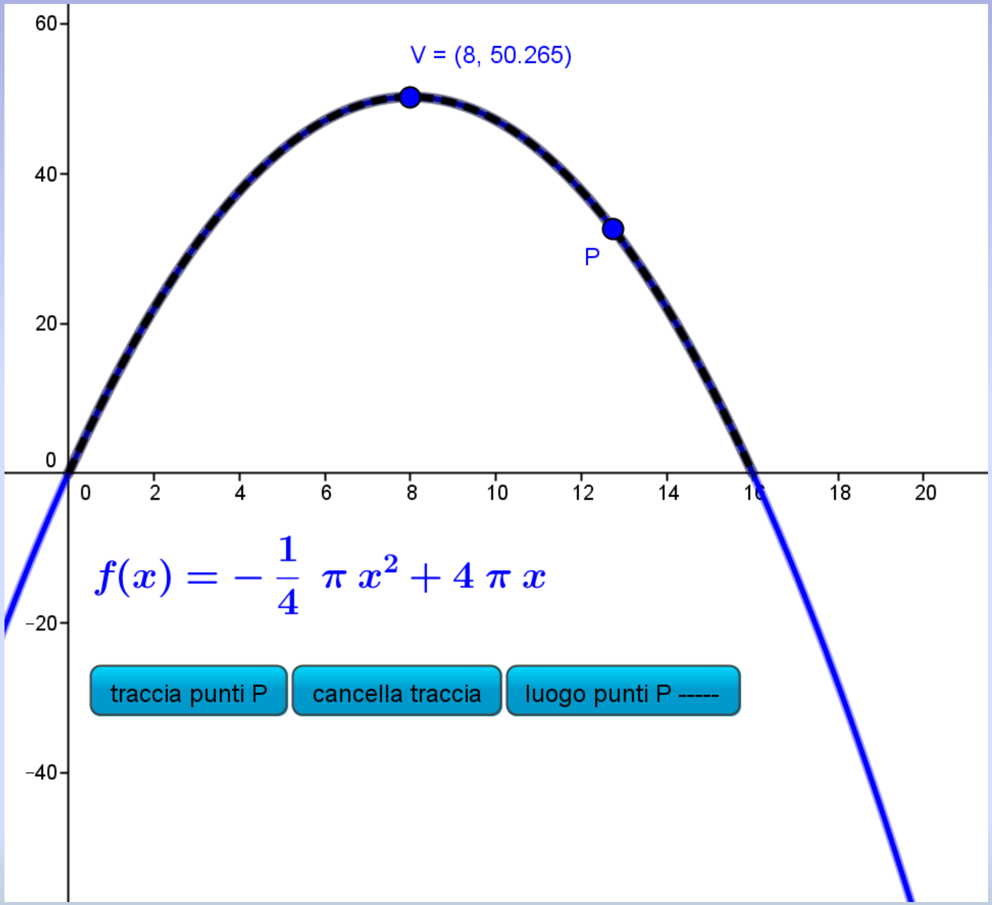
- Apri il file **arbelos1.ggb** e fissa il tuo raggio.



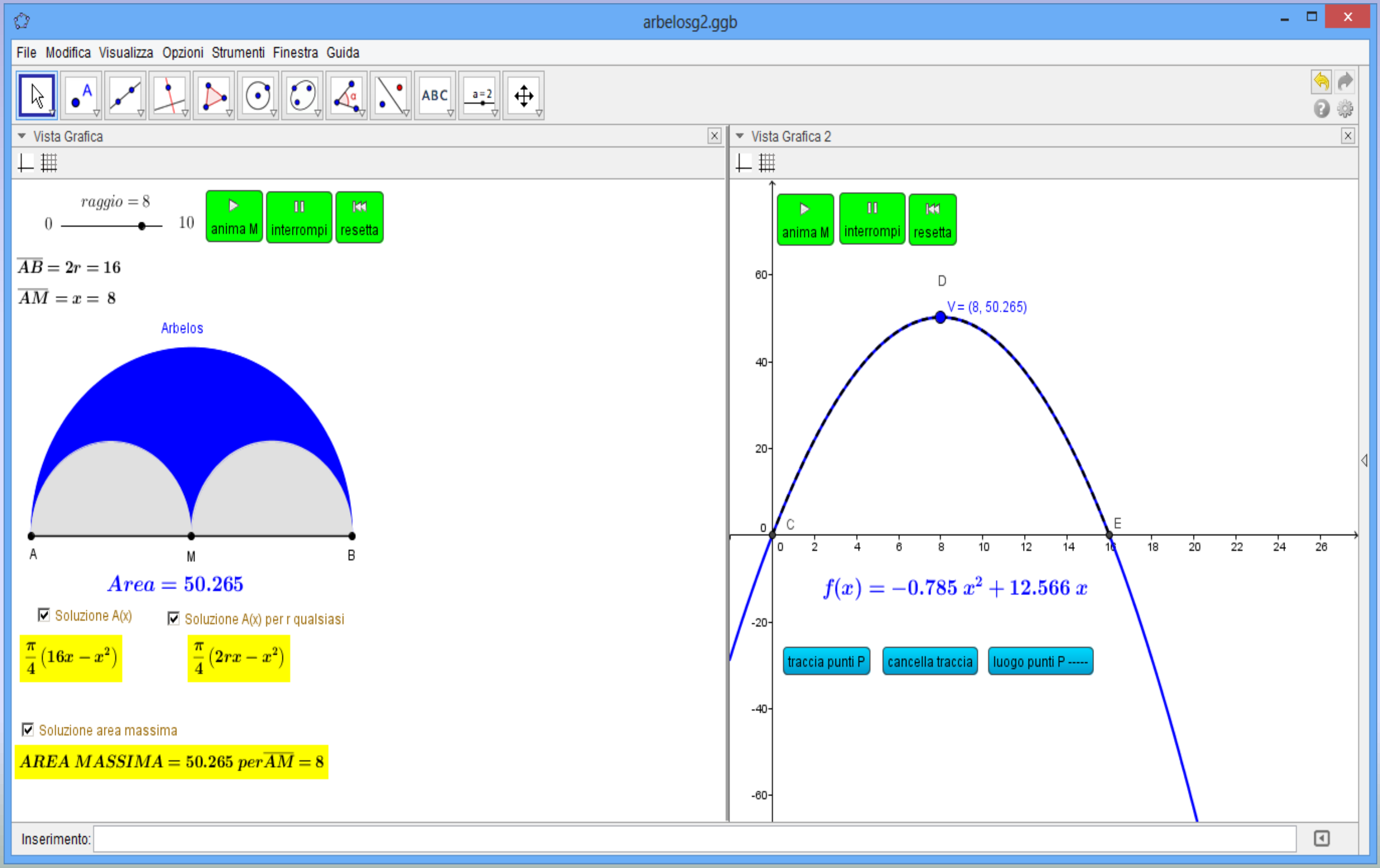
- Scrivi in funzione di $\overline{AM} = x$ l'area trovata . Discuti con i compagni il risultato e generalizza per r qualsiasi.



- Visualizza la **Vista Grafica 2** e inserisci la funzione trovata per **r** qualsiasi, **f(x)=** ………



- Che grafico hai ottenuto? Che cosa rappresenta il punto $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}))$ nella **Vista Grafica 2**?

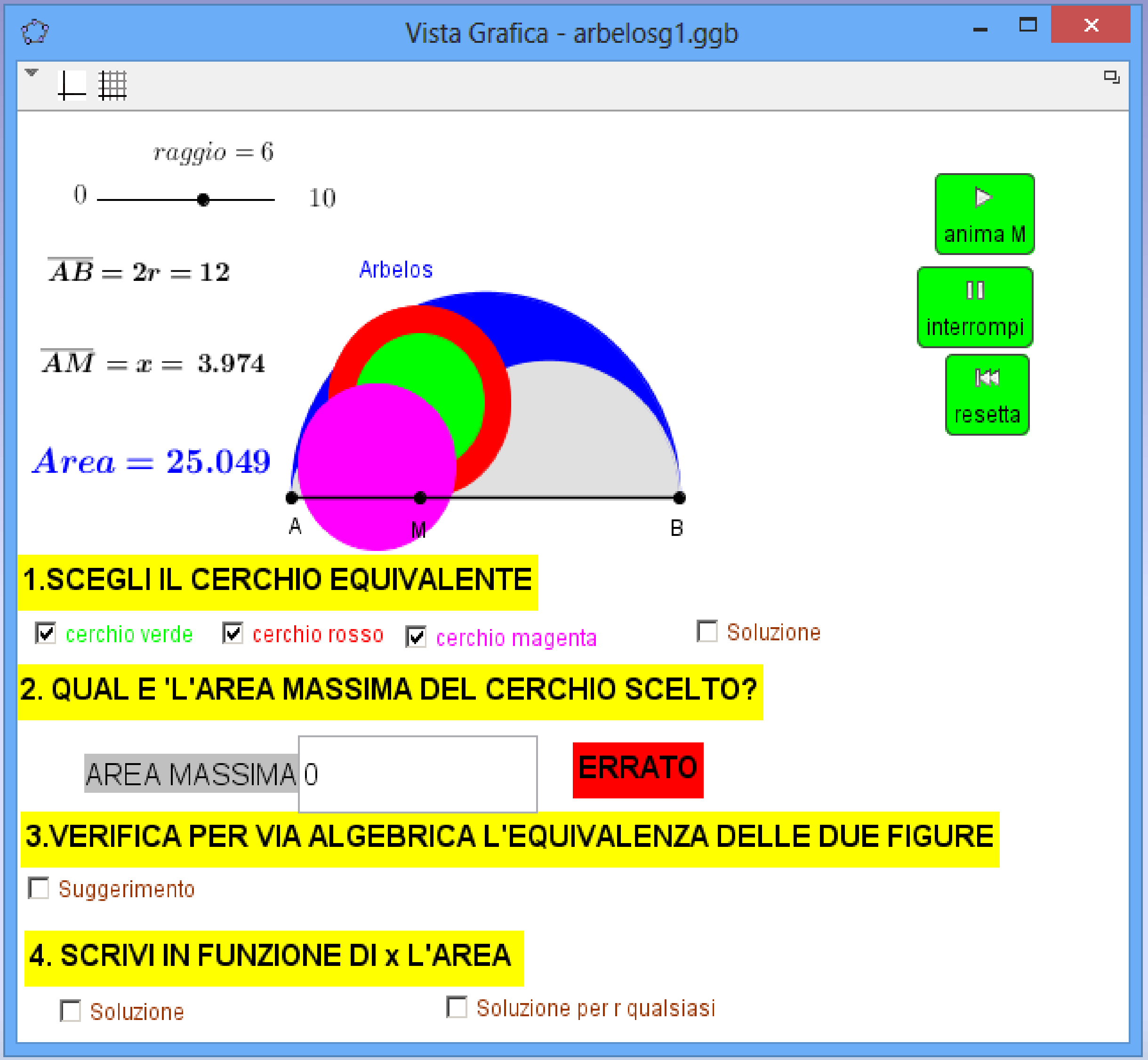


La potenza dell’algebra

- Come dimostreresti per via algebrica che la funzione trovata ha il massimo valore per **x=r**? (completa il quadrato e usa le disuguaglianze)

SCHEDA DI LAVORO N.3

- ***lavorando in coppia***
- Apri il file **arbelos3.ggb**, fissa il tuo raggio e scegli il cerchio equivalente all'**Arbelos**, scrivendo la tua motivazione. ($\overline{AM} = x$)

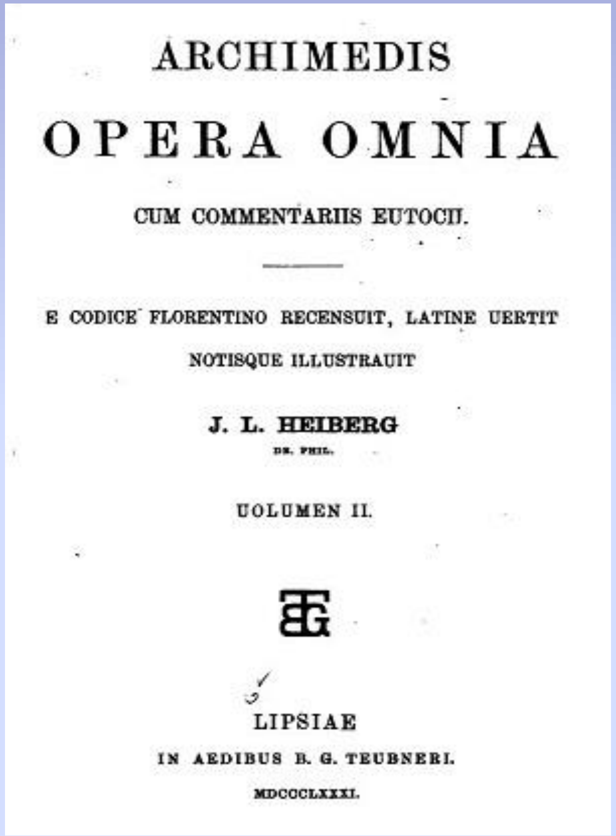


Vista Grafica - arbelosg1.ggb
raggio = 6
0
10
AB = 2r = 12
AM = x = 3.974
Area = 25.049
Arbelos
A
M
B
anima M
interrompi
resetta
1.SCEGLI IL CERCHIO EQUIVALENTE
cerchio verde
cerchio rosso
cerchio magenta
Soluzione
2. QUAL E 'L'AREA MASSIMA DEL CERCHIO SCELTO?
AREA MASSIMA
0
ERRATO
3.VERIFICA PER VIA ALGEBRICA L'EQUIVALENZA DELLE DUE FIGURE
Suggerimento
4. SCRIVI IN FUNZIONE DI x L'AREA
Soluzione
Soluzione per r qualsiasi

- Verifica per via algebrica l’equivalenza tra l’**Arbelos** e il cerchio individuato traendo eventualmente spunto dal **suggerimento** nella **Vista Grafica1**
- Per quale posizione di **M**, l’area del cerchio individuato è massima? Perché? Scrivi la tua motivazione:…………………………………………
- Calcola il massimo valore di tale area, inseriscilo nel **campo di inserimento** per verificarne l’esattezza

La Proposizione IV del Liber Assumptorum (Archimede)

Su proposta dell'insegnante gli allievi vengono invitati alla lettura della **Proposizione IV del Liber Assumptorum**, parte dell'edizione critica curata dal filologo danese **J.L. Heiberg** dell'**Opera Omnia** di Archimede con il commento di **Eutocio** (matematico bizantino, nato nel 480 e morto nel 540 d.C. commentatore di Archimede). E' sorprendente scoprire che la figura in questione è stata studiata proprio da Archimede!


ARCHIMEDIS

OPERA OMNIA

CUM COMMENTARIIS EUTOCII.

E CODICE FLORENTINO RECENSUIT, LATINE UERTIT

NOTISQUE ILLUSTRAUIT

J. L. HEIBERG

DR. PHIL.

UOLUMEN II.

LIPSIAE

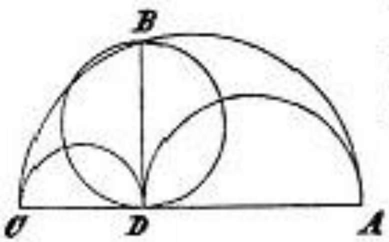
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXI.

IV.

Sit ABC semicirculus, et fiant super AC diametrum duo semicirculi, quorum unus AD, alter uero DC, et DB perpendicularis, utique figura proueniens, quam uocat Archimedes Arbelon (est superficies comprehensa ab arcu semicirculi maioris et duabus circumferentiis semicirculorum minorum), est aequalis circulo, cuius diameter est perpendicularis DB.[1])

Demonstratio. quia linea DB media proportionalis est inter duas lineas DA, DC [Eucl. VI, 13; Zeitschrift f. Math., histor. Abth. XXIV p. 181 nr. 16], erit planum AD in DC aequale quadrato DB [Eucl. VI, 17]. et ponamus AD in DC cum duobus quadratis AD, DC communiter; fiet planum AD in DC bis cum duobus quadratis AD, DC, nempe quadratum AC [Eucl. II, 4], aequale duplo quadrati DB cum duobus quadratis AD, DC. et proportio circulorum eadem est ac proportio quadratorum [Eucl. XII, 2]. ergo circulus, cuius diameter est AC, aequalis est duplo circuli, cuius diameter est DB, cum duobus circulis, quorum dia-



1) Has propositiones de arbelo (4, 5, 6 et 1) non dubito Archimedi tribuere. proprietates arbeli antiquitus tractatas esse, testatur Pappus IV, 19 p. 208, 9: ἀρχαία πρότασις. nomen accepit ex similitudine cultelli sutorii (schol. ad Nicandri Theriac. 423).

*Sia ABC un semicerchio, e si costruiscano sul diametro AC due semicerchi, dei quali uno di diametro AD, l'altro DC, e la perpendicolare DB, dunque la figura che viene fuori, che Archimede chiama **Arbelo** (è la superficie compresa tra l'arco del semicerchio maggiore e le due circonferenze dei semicerchi minori), è "uguale" al cerchio, il cui diametro è la perpendicolare DB.*

Dimostrazione. poiché il segmento ("linea") DB è medio proporzionale tra i segmenti DA e DC [Euclide VI,13], allora il rettangolo("planum") di lati AD e DC è "uguale" al quadrato di lato DB [Euclide VI,17] $AD \cdot DC = DB^2$.

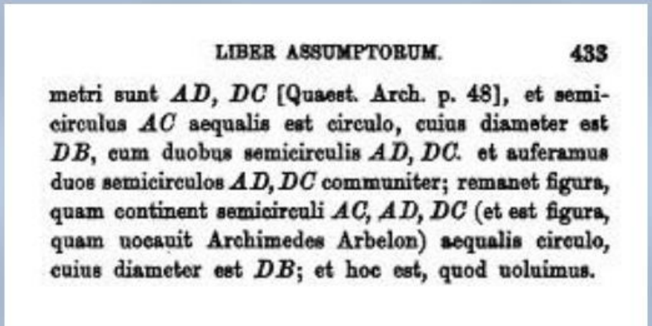
e consideriamo il rettangolo di lati AD e DC con due quadrati di lati AD e DC, saranno fatti due rettangoli di lati AD e DC con due quadrati di lati AD e DC, dunque il quadrato di lato AC [Euclide II,4]

$$AC^2 = (AD + DC)^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC$$

sarà "uguale" al doppio del quadrato di lato DB con due quadrati di lati AD e DC.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2DB^2$$

e la proporzione dei cerchi è la stessa della proporzione dei quadrati [Euclide XII,2]. dunque il cerchio, il cui diametro è AC, è "uguale" al doppio cerchio il cui diametro è DB, con due cerchi, i cui



metri sunt *AD*, *DC* [Quaest. Arch. p. 48], et semicirculus *AC* aequalis est circulo, cuius diameter est *DB*, cum duobus semicirculis *AD*, *DC*. et auferamus duos semicirculos *AD*, *DC* communiter; remanet figura, quam continent semicirculi *AC*, *AD*, *DC* (et est figura, quam uocauit Archimedes Arbelon) aequalis circulo, cuius diameter est *DB*; et hoc est, quod uoluimus.

1) non dubito ad attribuire ad Archimede queste proposizioni su arbelo(4,5,6 e1) Pappo attesta che fin dalla antichita' sono state trattate le proprieta' di Arbelo,il nome deriva dalla similitudine del coltello presente in un' opera di Nicandro(poeta Greco di eta' ellenistica).

diametri sono AD e DC [Quaest. Arch. p.48],

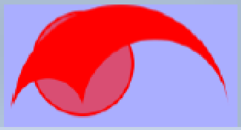
●AC=2●DB+●AD+●DC

e il semicerchio di diametro AC è uguale al cerchio il cui diametro è DB, con due semicerchi di diametri AD e DC.

◓AC=●DB+◓AD+◓DC

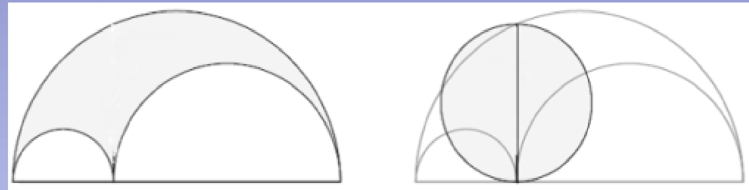
*E portiamo via i due semicerchi di diametri AD e DC in comune; rimane una figura che contiene i semicerchi di diametri AC, AD e DC (è la figura che Archimede chiama **Arbelo**) "uguale" al cerchio il cui diametro è DB; e questo è ciò che volevamo.*

◓ AC-◓AD-◓DC =●DB



Conclusioni

- Il lavoro, nella sua semplicità, dà modo agli allievi di mettere alla prova le loro competenze matematiche e non solo e di accrescerle.
- La dimostrazione senza parole di **Roger B. Nelsen**, Math Mag. **75** (2002) della equivalenza tra l'**Alberos** e il **cerchio** che è stata data come compito per casa!



$A = C$