

Pietro Romano

Liceo Scientifico Statale "Leonardo", Giarre (CT)

Comunicazione del 23/10/2009 – sessione B₁**Modello numerico del pendolo in Microsoft Excel****Abstract**

In this work, a numerical model of pendulum developed in Excel is using to study the oscillation's dumping. The model uses three dumping terms: velocity independent, linear and quadratic with velocity. These dumping terms are determined by considering in details the characteristics of the various forms of friction. The model is then applied to experimental data.

Introduzione

L'equazione del pendolo in genere è posta nella forma:

$$-I_R = \frac{d^2\mathcal{G}}{dt^2} = M - M_a \quad (1)$$

\mathcal{G} è l'angolo di scostamento del pendolo dalla verticale; I_R è il momento di inerzia di tutte le parti in rotazione; M ed M_a , rispettivamente, il momento totale delle forze motrici e delle forze di attrito, riferiti al punto di sospensione.

Lo smorzamento delle oscillazioni dovuto all'attrito è adeguatamente descritto assumendo che la relativa forza si possa esprimere come^[al]:

$$-F_a = A_0 \frac{|v|}{v} + A_1 v + A_2 |v|v \quad (2)$$

In questa, sono presenti tre termini: il primo, dipendente solamente dal segno della velocità, e gli altri due, dipendenti dalla velocità e dal suo quadrato.

I valori delle costanti A_i possono essere ricavati per via puramente matematica, direttamente dal confronto con i dati di un pendolo reale. Alternativamente, si possono studiare le varie forme di attrito attraverso modelli empirici. In questo caso, si determinano delle espressioni per queste costanti che dipendono da grandezze quali densità e viscosità del mezzo.

L'ambiente di calcolo utilizzato è il foglio elettronico Microsoft Excel.

Sono state effettuate delle comparazioni con dati sperimentali (misure con pendoli di vario tipo, posti in oscillazione sia in aria che in acqua).

Dopo la fase di test, sono state prese in esame varie situazioni: comportamento del pendolo in differenti gas ed in differenti liquidi, effetto sullo smorzamento dovuto alla progressiva riduzione della pressione dell'aria, determinazione della durata totale delle oscillazioni in funzione di parametri quali la lunghezza e la massa.

Il pendolo si ipotizza costituito da una sfera sospesa mediante un'asta rigida (o un filo).

La forza motrice è dovuta al peso della sfera e a quello dell'asta di sospensione (o filo): $F = (P - S)_{sfera} + (P - S)_{asta}$ (S = spinta di Archimede).

Se indichiamo con d_s e d_a i baricentri di sfera e asta, il momento complessivo vale:

$$M = [(P - S)_{sfera} \cdot d_s + (P - S)_{sta} \cdot d_a] \sin \mathcal{G}.$$

Per quanto riguarda l'attrito, questo è essenzialmente dovuto all'attrito viscoso, sia della sfera che dell'asta, e all'attrito nel punto di sospensione.

Forze di attrito

Trattiamo separatamente (1) gli attriti associati al moto della sfera nel mezzo, (2) quelli associati al moto dell’asta, e (3) quelli nel punto di sospensione.

1. Attrito della sfera

Resistenza newtoniana: ha la seguente forma: $-F_a = \frac{1}{2} C_s A \rho |v|v$, dove $A = \pi r^2$ è l’area della sezione massima della sfera, ρ rappresenta la densità del mezzo e v rappresenta la velocità della sfera. Essendo $v = \omega d_s$, abbiamo:

$$-F_a = \frac{1}{2} C_s \pi r^2 \rho d_s^2 |\omega| \omega \rightarrow -M_a = \frac{1}{2} C_s \pi r^2 \rho d_s^3 |\omega| \omega$$

Il coefficiente C_s è un numero adimensionato, funzione del numero di Reynolds

$\left(R = \frac{2r\rho}{\eta} v = \frac{2r\rho d_s}{\eta} \omega, \eta = \text{viscosità} \right)$, il cui andamento è rappresentato in fig.1:

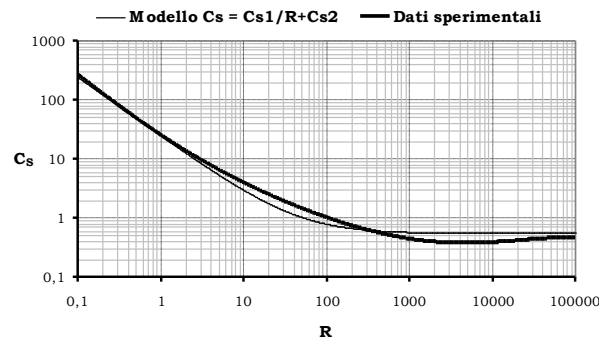


Fig.1: C_s in funzione del numero di Reynolds

Una possibile descrizione analitica, si ha attraverso la relazione^[b]: $C_s = \frac{C_{s1}}{R} + C_{s2}$, e si trova: $C_{s1} \approx 24$ e $C_{s2} \approx 0,6$. Con questa assunzione, il momento della forza assume la particolare forma:

$$-M_a = \left[C_{s1} \left(\frac{\pi \eta r d_s^2}{4} \right) \right] \omega + \left[C_{s2} \left(\frac{\pi r^2 \rho d_s^3}{2} \right) \right] |\omega| \omega = g_{11} \omega + g_{21} |\omega| \omega \quad (3)$$

in cui sono presenti due termini, il primo legato alla velocità, il secondo al suo quadrato.

Massa virtuale e forza di Basset: le forze che si determinano per effetto delle accelerazioni di un corpo in un fluido si dividono (1) nell’effetto della massa virtuale e (2) nella forza di Basset. Per una sfera che esegue un moto oscillatorio, si trova^{[c],[d]}:

$$-F_a = \underbrace{\frac{1}{2} C_A m_a a}_{\text{massa virtuale}} + \underbrace{6 C_H \pi r^2 \sqrt{\frac{\rho \eta}{2 \omega_0}} (\omega_0 v + a)}_{\text{forza di Basset}} \rightarrow$$

$$-M_a = \left[\left(\frac{1}{2} C_A m_a + 6 C_H \pi r^2 \sqrt{\frac{\rho \eta}{2 \omega_0}} \right) d_s^2 \right] \alpha + \left[6 C_H \pi r^2 \sqrt{\frac{\rho \eta}{2 \omega_0}} \omega_0 d_s^2 \right] \omega = \quad (4)$$

$$= I_V \alpha + g_{13} \omega$$

Il primo è un termine inerziale, dovuto al fatto che le accelerazioni (decelerazioni) della sfera determinano accelerazioni (decelerazioni) del fluido circostante, il cui effetto può essere considerato attraverso un incremento fittizio della massa; il secondo, sempre con riferimento alle variazioni di velocità della sfera, tiene conto del fatto che lo strato di fluido che la circonda risponde a queste variazioni con un ritardo di tempo. L'effetto che si determina al tempo t e quindi legato al moto negli istanti di tempo precedenti. Per tale ragione, ci si riferisce ad esso come al "termine integrale". $a = \alpha d_s$ è l'accelerazione della sfera; m_a è la massa di fluido spostata dalla sfera; ω_0 rappresenta la frequenza delle piccole oscillazioni; per piccole velocità, è $C_A, C_H \approx 1$. Per elevate velocità, il loro valore è stato determinato empiricamente da Odar e Hamilton^[d] nella

$$\text{forma: } C_A = 2,1 - \frac{0,132}{A^2 + 0,12}, C_H = 0,48 + \frac{0,52}{(A_C + 1)^3}, A_C = \left| \frac{\omega^2 d_s}{2r\alpha} \right|.$$

2. Attrito viscoso dell'asta

Così come per la sfera, il coefficiente di attrito del filo viene espresso attraverso la relazione: $-F_a = \frac{1}{2} C_F A \rho |v|v$ ($A = s \cdot l$, rappresenta l'area della sezione massima del filo, che viene visto come un cilindro di lunghezza l e diametro di base s). Il coefficiente C_F ha, al variare del numero di Reynolds $\left(R = \frac{s\rho}{\eta} v \right)$, un comportamento simile a quello della sfera; viene quindi utilizzata una funzione interpolante dello stesso tipo $C_F = \frac{C_{F1}}{R} + C_{F2}$ e l'interpolazione porta ai valori: $C_{F1} \approx 9$; $C_{F2} \approx 1,2$.

Poiché però la velocità varia al variare della distanza x dal punto di sospensione ($0 < x < l$), la forza per unità di lunghezza è $-\frac{dF_a}{dx} = \frac{1}{2} C_F(x) s \rho v^2(x)$, dove $v(x) = \omega x$ e C_F è funzione di x attraverso la velocità. Il momento della forza si ottiene allora per integrazione: $-M_a = \int_0^l x \frac{dF_a}{dx} dx = \frac{s\rho\omega^2}{2} \int_0^l C_F(x) x^3 dx$. Se è presente una porzione di asta anche sopra il punto di sospensione, di lunghezza l_1 , abbiamo:

$$-M_a = \frac{s\rho\omega^2}{2} \left[\int_0^l C_F(x) x^3 dx + \int_0^{l_1} C_F(x) x^3 dx \right]. \text{ Da qui, si trova:}$$

$$-M_a = \frac{C_{F1}}{6} \eta (l^3 + l_1^3) \omega + C_{F2} \frac{s\rho(l^4 + l_1^4)}{8} |\omega| \omega = g_{12} \omega + g_{22} |\omega| \omega \quad (5)$$

3. Attrito nel punto di sospensione

Può essere un attrito radente, se il pendolo è sospeso mediante un gancio, o di tipo volvente (in presenza ad esempio di perno inserito in un cuscinetto a sfera), oppure dovuto all'attrito interno, in conseguenza del piegamento del filo.

In genere^[e], esso viene descritto attraverso (a) un termine costante (Coulombiano) e (b) un termine viscoso, proporzionale alla velocità. Quindi:

$$-M_a = k_0 \frac{|\omega|}{\omega} + k_1 \omega \quad (6)$$

Una stima dei parametri k_0 e k_1 relativamente al sistema di sospensione usato si può effettuare per via sperimentale, e questo aspetto verrà descritto in avanti.

Mettendo assieme le relazioni dalla (3) alla (6), l'equazione (1) diventa:

$$-I_R \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = M + k_0 \frac{|\omega|}{\omega} + (g_{11} + g_{12} + g_{13} + k_1)\omega + (g_{21} + g_{22})|\omega|\omega + I_V \alpha$$

Da cui, ponendo:

$$\begin{cases} I_{eff} = I_R + I_V \\ c_0 = \frac{k_0}{I_{eff}}; c_1 = \frac{g_{11} + g_{12} + g_{13} + k_1}{I_{eff}}; c_2 = \frac{g_{21} + g_{22}}{I_{eff}} \end{cases}$$

si arriva infine all'espressione:

$$-\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{M}{I_{eff}} \sin \vartheta + c_0 \frac{|\omega|}{\omega} + c_1 \omega + c_2 |\omega|\omega \quad (7)$$

Riassumendo, in questa espressione sono presenti tre termini relativi alle forze di attrito: il primo, c_0 , è determinato dall'attrito nella sospensione; l'ultimo, c_2 , è dovuto al solo attrito viscoso; il termine c_1 riceve invece contributi da entrambi gli effetti. Inoltre, il momento di inerzia I_{eff} , oltre al termine legato alle parti in rotazione, riceve un contributo per gli effetti inerziali dovuti alla viscosità.

La (7) non ammette soluzione analitica, a causa della presenza dei termini in $\frac{|\omega|}{\omega}$ e $|\omega|\omega$, e può essere risolta solamente con metodi numerici.

Densità e viscosità del mezzo

Le sostanze gassose vengono trattate come gas ideali. La densità viene quindi valutata con la relazione: $\rho = \left(\frac{\mu}{R}\right) \frac{P}{T}$ (μ è la massa in grammi di una mole ed R , la costante dei gas). Per il calcolo della viscosità, è stata utilizzata la relazione (Chapman-Enskog^[f]): $\eta = \frac{26,69 \sqrt{\mu T}}{\sigma^2 \Omega(T^*)}$. σ è il parametro di distanza nell'espressione del potenziale

di Lennard-Jones (L-J); $\Omega(T^*)$, ($T^* = \frac{kT}{\varepsilon}$, con ε parametro di energia nell'espressione dei potenziali L-J e k costante di Boltzmann) prende il nome di integrale di collisione. La viscosità è essenzialmente indipendente dalla pressione, almeno finché il libero cammino medio delle molecole è molto minore delle dimensioni tipiche del contenitore del gas. A pressioni estremamente basse, questo modello non è più applicabile, e per semplicità si è assunto $\eta = 0$.

Per i liquidi in generale, i valori di densità e viscosità utilizzati sono quelli a pressione atmosferica a 20 o 25°C. Per l'acqua in particolare, si reperiscono facilmente i dati di densità e viscosità in funzione della temperatura e, per interpolazione, si determinano le espressioni per il loro calcolo.

Il modello numerico in Microsoft Excel

Il metodo di integrazione numerica utilizzato è il metodo Runge-Kutta di ordine 4^[gl]. In sintesi, esprimendo la (7) con le relazioni: $\Delta\vartheta/\Delta t = \omega, \Delta\omega/\Delta t = \alpha = f(\vartheta, \omega, c_i)$, si calcolano le quantità:

$$\begin{cases} \theta_1 = \omega \Delta t & w_1 = -f(\vartheta, \omega, c_i) \Delta t \\ \theta_2 = \left(\omega + \frac{w_1}{2}\right) \Delta t & w_2 = -f\left(\vartheta + \frac{\theta_1}{2}, \omega + \frac{w_1}{2}, c_i\right) \Delta t \\ \theta_3 = \left(\omega + \frac{w_2}{2}\right) \Delta t & w_3 = -f\left(\vartheta + \frac{\theta_2}{2}, \omega + \frac{w_2}{2}, c_i\right) \Delta t \\ \theta_4 = (\omega + w_3) \Delta t & w_4 = -f(\vartheta + \theta_3, \omega + w_3, c_i) \Delta t \end{cases},$$

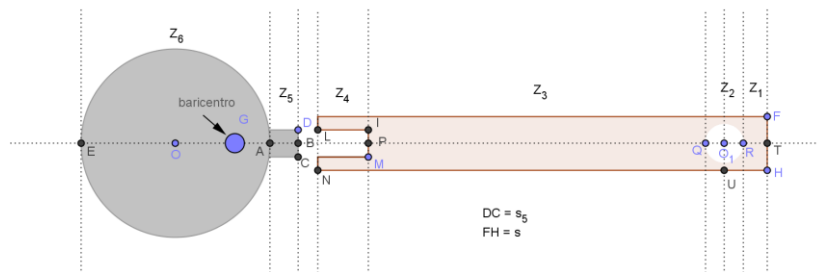
e si determinano i nuovi valori di ϑ e ω con le relazioni:

$$\begin{cases} \vartheta_{fin} = \vartheta_{iniz} + \frac{\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_4}{6} \\ \omega_{fin} = \omega_{iniz} + \frac{w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4}{6} \end{cases} \quad (9)$$

Una cartella di lavoro Excel è normalmente articolata su più pagine o fogli di lavoro. Uno di questi, il foglio calcoli, viene strutturato in modo tale che, in una riga, si immettono, in differenti colonne, le formule per il calcolo delle grandezze $(t, \vartheta, \omega, \alpha)$. Ripetendo le stesse formule su più righe, si ottengono i successivi passi di integrazione (Il simulatore¹ utilizza 60.000 righe del foglio). Oltre a questo foglio, il simulatore presenta un foglio dati, dedicato alla immissione di tutti i parametri del pendolo (masse, lunghezze, condizioni iniziali $(t_0, \vartheta_0, \omega_0)$) e del mezzo in cui esso oscilla (densità, viscosità, pressione, umidità relativa, temperatura, altezza slm, etc.). Altri fogli ancora vengono utilizzati per elaborare la matrice dati $(t, \vartheta, \omega, \alpha)$, che è il risultato principale del simulatore, ancorché grezzo. Da questa, risulta infatti necessario estrarre informazioni varie quali ad esempio quella relativa al periodo di oscillazione e all'ampiezza massima di oscillazione in ogni semiperiodo. Date le notevoli dimensioni di questo insieme di dati, questi calcoli devono essere effettuati mediante programmi V.B.A. (il Visual Basic di Excel), che qui non riportiamo².

Apparato sperimentale

Per testare il modello, sono state fatte misurazioni su vari tipi di pendoli, alcuni dei quali vengono descritti nella seguente tabella (Tab. I):



¹ Il file Excel può essere richiesto direttamente all'autore (pr.romano@tin.it)

² All'interno del simulatore, il codice si visualizza dal menù Strumenti, Macro, Visual Basic Editor.

Sigla	Asta o filo di sospensione								Sfera		
	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	s	S ₅	M _{asta}	r	tipo	M _{sfera}
SA30 (solo asta 30 cm)	8,00E-03	4,00E-03	2,62E-01	2,60E-02	9,00E-03	8,00E-03	4,00E-03	1,1430E-01	0	no	0,0000E+00
SA40 (solo asta 40 cm)	8,00E-03	4,00E-03	3,62E-01	2,60E-02	9,00E-03	8,00E-03	4,00E-03	1,5360E-01	0	no	0,0000E+00
SA50 (solo asta 50 cm)	8,00E-03	4,00E-03	4,65E-01	2,30E-02	9,00E-03	8,00E-03	4,00E-03	1,9400E-01	0	no	0,0000E+00
SC (asta + sfera cava)	2,30E-02	4,00E-03	3,69E-01	0	0	7,30E-03	0	1,2141E-01	4,05E-02	cava	1,0162E-01
SNF1 (filo + sfera nera)	0	0	1,86E+00	0	0	1,00E-03	0	2,0000E-03	0,0175	piena	1,7720E-01
SNF2 (filo + sfera nera)	0	0	1,24E+00	0	0	1,00E-03	0	2,0000E-03	0,0175	piena	1,7720E-01
SP30 (asta 30 cm + sfera piena)	8,00E-03	4,00E-03	2,62E-01	2,60E-02	9,00E-03	8,00E-03	4,00E-03	1,1430E-01	2,00E-02	piena	2,5972E-01
SP40 (asta 40 cm + sfera piena)	8,00E-03	4,00E-03	3,62E-01	2,60E-02	9,00E-03	8,00E-03	4,00E-03	1,5360E-01	2,00E-02	piena	2,5972E-01
SP50 (asta 50 cm + sfera piena)	8,00E-03	4,00E-03	4,65E-01	2,30E-02	9,00E-03	8,00E-03	4,00E-03	1,9400E-01	2,00E-02	piena	2,5972E-01
SRF1 (filo + Sfera rossa)	0	0	1,84E+00	0	0	1,00E-03	0	2,0000E-03	3,75E-02	piena	1,1922E-01
SRF2 (filo + Sfera rossa)	0	0	8,40E-01	0	0	1,00E-03	0	2,0000E-03	3,75E-02	piena	1,1922E-01

Tab.I: dati dei pendoli

Gli elementi che costituiscono l'apparato sperimentale sono il sensore di moto rotatorio e un dispositivo di interfacciamento (LabPro) con il computer. Il software LoggerPro consente inoltre la gestione del processo di acquisizione dei dati.

L'angolo iniziale di lancio dei pendoli è di circa 90° ed il tempo complessivo di oscillazione variabile nell'intervallo 1000÷3500 secondi. La frequenza di campionamento è in genere di 20 Hz, e in qualche caso di 40 Hz. In acqua, non potendo immergere il sensore, l'angolo iniziale è inferiore (circa 60°) e la durata complessiva circa 50 secondi (campionamento a 100 Hz).

Misure per la determinazione dell'attrito nella sospensione

In primo luogo, verifichiamo l'adeguatezza del modello ipotizzato per l'attrito nel punto di sospensione (rel. (6)). Il metodo è lo stesso che si utilizza per misurare il momento di inerzia di un volano. Si arrotola un filo attorno al perno del sensore ($r = 3,68\text{mm}$, filo incluso), agganciando alla estremità libera una massa m . Liberata la massa (tempo t_0), questa trascina in rotazione il sensore. Nella prima fase, il moto è accelerato. Quando la massa si sgancia ($t = t_1$), inizia la 2^a fase; il perno decelera fino a fermarsi ($t = t_2$).

L'equazione del moto è: $mgr - k_0 - k_1\omega = (I + mr^2)\frac{d\omega}{dt}$. Integrando, si trova:

$$\begin{cases} \omega(t) = 0, & t < t_0 \text{ o } t > t_2 \\ \omega(t) = \frac{mgr - k_0}{I + mr^2} \left[1 - e^{-\frac{k_1}{I + mr^2}(t - t_0)} \right], & t \in [t_0; t_1] \quad \omega_1 = \omega(t_1) \\ \omega(t) = \frac{k_0 + k_1\omega_1}{k_1} e^{-\frac{k_1}{I}(t - t_1)} - \frac{k_0}{k_1}, & t \in [t_1; t_2] \end{cases} \quad (10)$$

I dati misurati $\omega(t)$ sono stati confrontati con il modello teorico dato dalle relazioni (10) e nella figura 4 se ne ha un esempio:

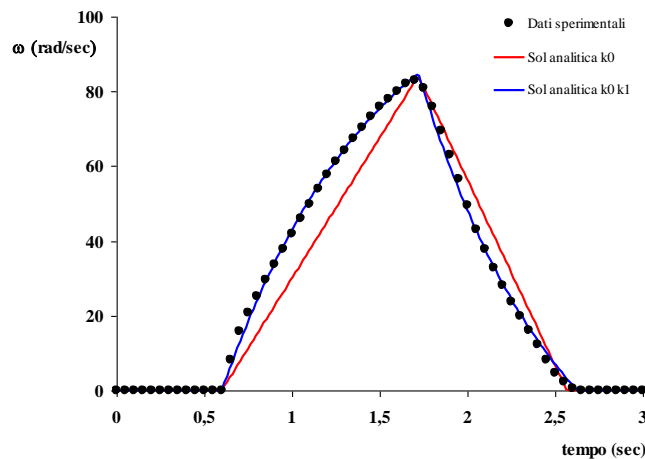


Fig. 4: Modellizzazione dell'attrito nella sospensione

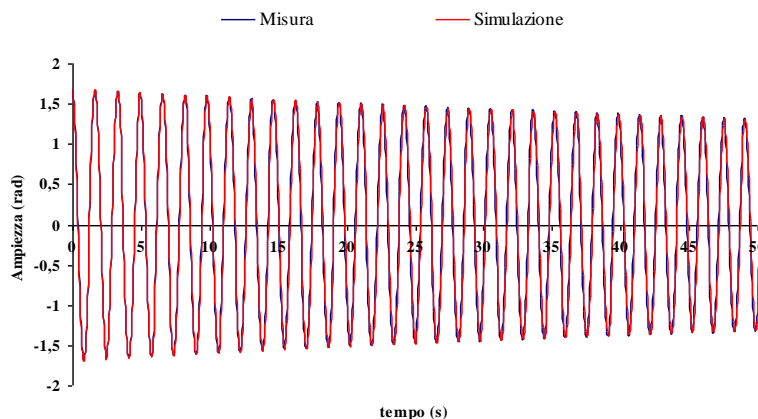
Le misure sono state effettuate utilizzando una massa di 3,78 g. Dal grafico, si ricavano i tempi t_0 , t_1 e t_2 . I valori di I, k_0, k_1 vengono ricavati mediante best fit³. La media su un ampio numero di misure ha permesso di determinare:

$$\begin{cases} I = (7,3 \pm 0,6) \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ k_0 = (3,6 \pm 0,6) \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \\ k_1 = (1,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \end{cases} \quad (11)$$

La figura 4 mostra anche il confronto con un modello di attrito più semplice, basato su un solo termine costante $\left(-M_a = k_0 \frac{|\omega|}{\omega}\right)$.

Verifiche del modello numerico

Il modello numerico è stato sottoposto a verifica utilizzando i pendoli descritti, quindi confrontando i dati che da esso si ricavano con quelli sperimentali. Uno di questi confronti (pendolo SP50) è presentato nella figura seguente (fig. 5):



³ Si cerca di rendere minima la somma dei quadrati degli scarti tra i valori di ω calcolati e quelli misurati. I calcoli vengono effettuati utilizzando il *Risolutore* di Excel (dal menù *Strumenti*, scegliere *Risolutore*). Esso permette di impostare il valore di una cella (detta *cella obiettivo*) variando il valore di altre celle da cui essa dipende.

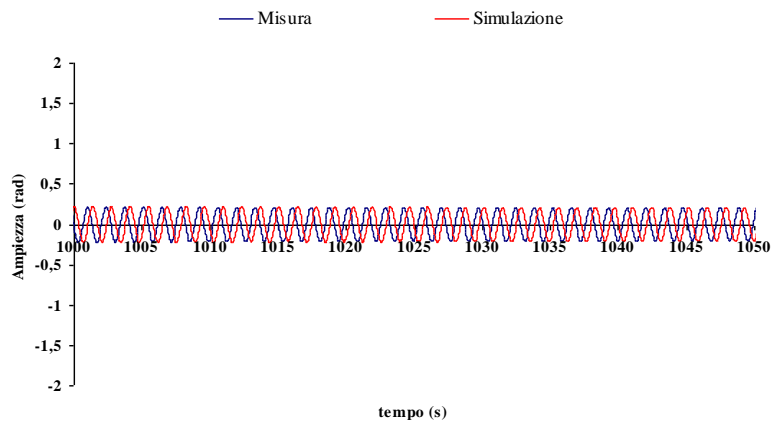


Fig.5: andamento di $\vartheta(t)$ per nella fase iniziale (primi 50 secondi) e, dopo 1000 secondi.

Ciò che è importante osservare è che lo smorzamento delle oscillazioni è pressoché identico; si osserva inoltre come le due $\vartheta(t)$, misurata e simulata, inizialmente sembrano procedere in fase, mentre successivamente, sfasano. Ciò è determinato dagli inevitabili errori nella misura dei parametri dei pendoli (masse, lunghezze, etc.), che si trasferiscono nei calcoli di grandezze quali il momento di inerzia ed il momento delle forze. Questi errori, pur lievi, determinano un effetto importante dopo un gran numero di oscillazioni.

In figura 6, viene mostrato un'altro confronto fra simulazione e misura, e cioè l'andamento dell'ampiezza massima di oscillazione in funzione del tempo:

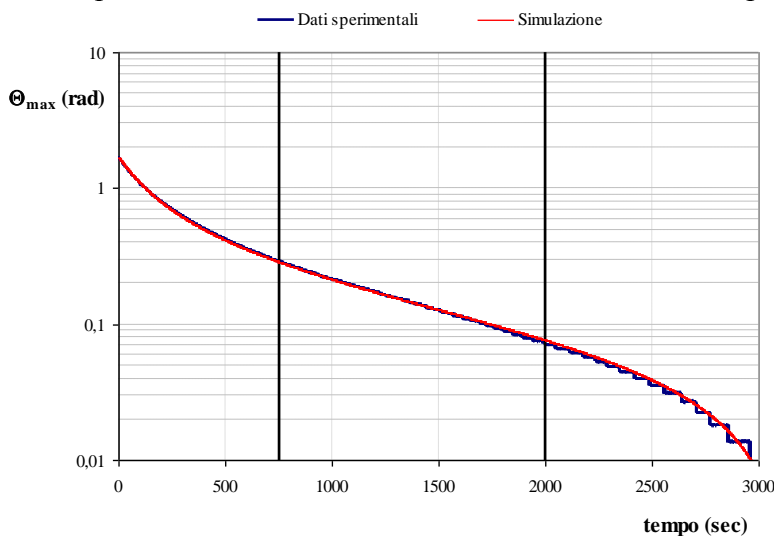


Fig.6: I massimi di $\vartheta(t)$ in funzione del tempo

Utilizziamo questo grafico per richiamare un fatto ben noto. È qui evidente l'esistenza di tre zone: la prima zona, per grandi ampiezze, ha la concavità verso l'alto; vi è poi una zona centrale a decremento lineare; ed infine, nella parte finale la concavità è verso il basso. Queste tre zone hanno un legame molto stretto con i tre parametri $c_i^{[a]}$; il parametro c_2 agisce essenzialmente nella prima zona; c_1 , nella zona centrale; c_0 , nella parte finale. Questo fatto viene evidenziato nella figura 7, in cui i dati sperimentali vengono messi a confronto con modelli che escludono uno o più dei suddetti parametri:

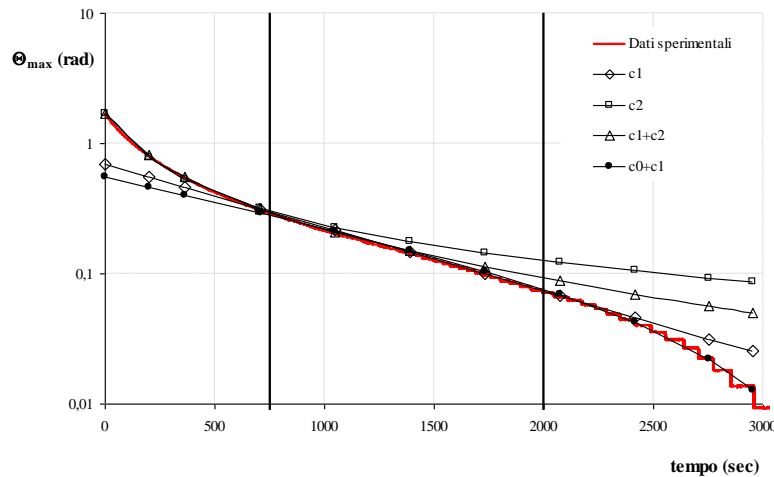


Fig.7: differenti modelli di smorzamento a confronto

Si vede così che, ad esempio, un modello che considera il solo c_1 (\diamond) riesce a dare conto dell'andamento nella zona centrale, rinunciando però al rispetto delle condizioni iniziali e perdendo di nuovo i dati sperimentali a basse ampiezze. Ancora, un modello con c_1 e c_2 (Δ) funziona adeguatamente solamente nella zona iniziale e in parte di quella centrale. Infine, un modello che esclude c_2 (\blacksquare), è adeguato nella zona a decremento lineare e per piccole oscillazioni, ma non si accorda con le misure per grandi angoli.

La tab. III riporta i calcoli del periodo delle piccole oscillazioni, dai dati sperimentali e dal modello numerico (confrontati anche con le formule del periodo del pendolo fisico,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_R}{M}}, \text{ e del pendolo semplice, } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}):$$

Pendolo	Periodo			
	Dati sperimentali	Modello numerico	S.A. pend. fisico	S.A. pend. semplice
SA30	0,871 ± 0,003	0,87105	0,87091	1,07526
SA40	1,013 ± 0,004	1,01311	1,01305	1,24862
SA50	1,141 ± 0,002	1,14129	1,14125	1,40499
SC	1,197 ± 0,004	1,19896	1,19796	1,28753
SNF1	2,745 ± 0,005	2,74686	2,74657	2,75020
SNF2	2,248 ± 0,005	2,24911	2,24888	2,25075
SP30	1,082 ± 0,003	1,08268	1,08260	1,11752
SP40	1,233 ± 0,004	1,23374	1,23364	1,28519
SP50	1,364 ± 0,005	1,36471	1,36460	1,43337
SP30 in acqua	1,21 ± 0,01	1,19861	1,16000	1,11752
SP40 in acqua	1,37 ± 0,01	1,36489	1,32179	1,28519
SRF1	2,756 ± 0,004	2,75747	2,75495	2,75751
SRF2	1,880 ± 0,002	1,88178	1,88024	1,88017

Tab. III: periodo delle piccole oscillazioni

Il grafico di figura 8 mostra infine il confronto misura-simulazione per uno dei pendoli (SP30) che oscilla in acqua:

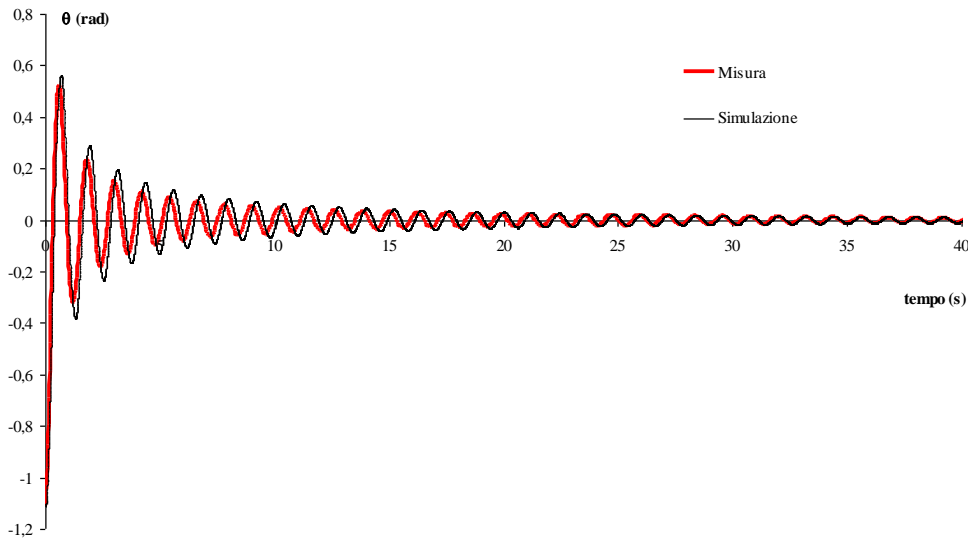


Fig.8: smorzamento delle oscillazioni in acqua

Applicazioni del modello numerico

Supponendo che i confronti fatti possano farci ritenere che il modello sia sufficientemente testato e valido, pur con le dovute cautele, proviamo ad applicarlo in alcune situazioni.

a) Pendoli in aria e in altri mezzi gassosi

Cominciamo col considerare una situazione, peraltro facilmente attuabile in laboratorio. Si confrontano pendoli con massa e raggio della sfera differenti. Si osservano differenze importanti nella durata complessiva delle oscillazioni, anche se qualitativamente il comportamento è lo stesso. La retta $\vartheta = 0,02 \text{ rad} \approx 1^\circ$ rappresenta il limite di misura. I pendoli 2 e 3 (il primo, con raggio e massa pari alla metà del secondo) restano in oscillazione per tempi molto vicini (la minore massa del 2 si compensa con il suo minore raggio).

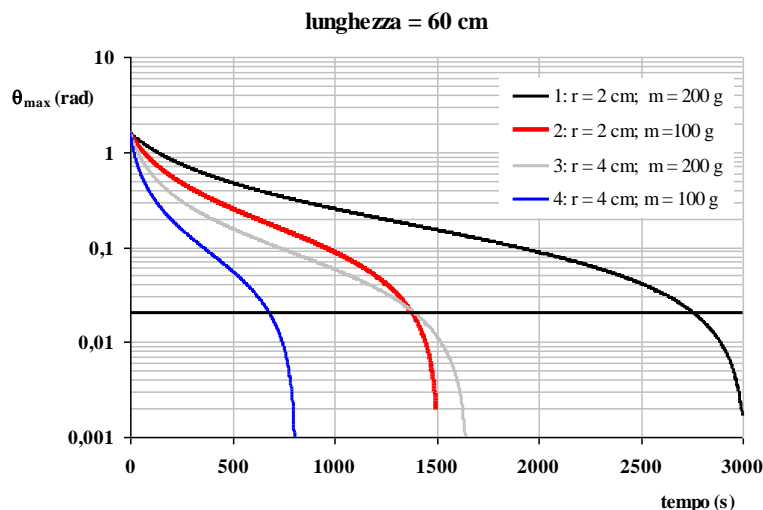


Fig. 9: Smorzamento delle oscillazioni per differenti pendoli in aria

I pendoli 1 e 2 hanno un periodo differente dai due pendoli 3 e 4, in quanto più corti. Se però rappresentiamo la grandezza dimensionata T/T_0 in funzione dell'ampiezza massima, non si osserva più alcuna differenza fra i vari pendoli:

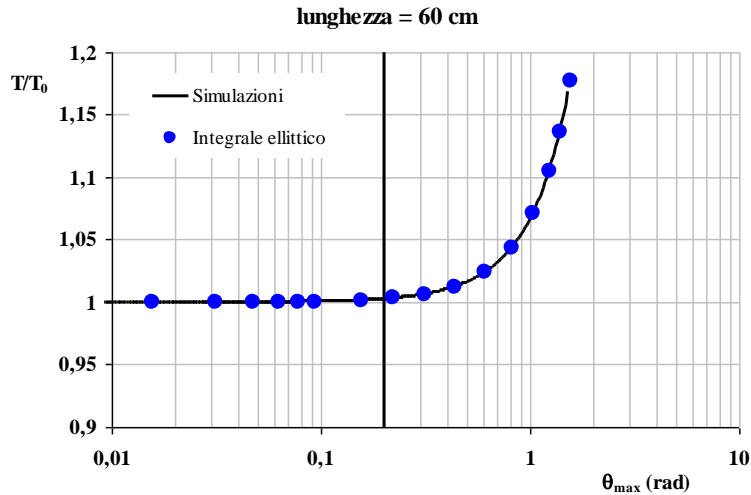


Fig. 10: Variazione del periodo (rapportato al periodo delle piccole oscillazioni) al variare dell'ampiezza massima.

Per confronto, la fig. 10 mostra anche il calcolo dell'integrale ellittico di 1° tipo^[h]:

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} g^2 + \frac{9}{64} g^4 + \frac{25}{256} g^6 + \frac{1225}{16384} g^8 + \dots \right) \quad (13)$$

Da questo grafico si nota inoltre che le oscillazioni sono sincrone per $\theta_{max} < 10^\circ$. La figura che segue, mostra il confronto per uno dei pendoli in tab. I (pendolo SC) per differenti gas:

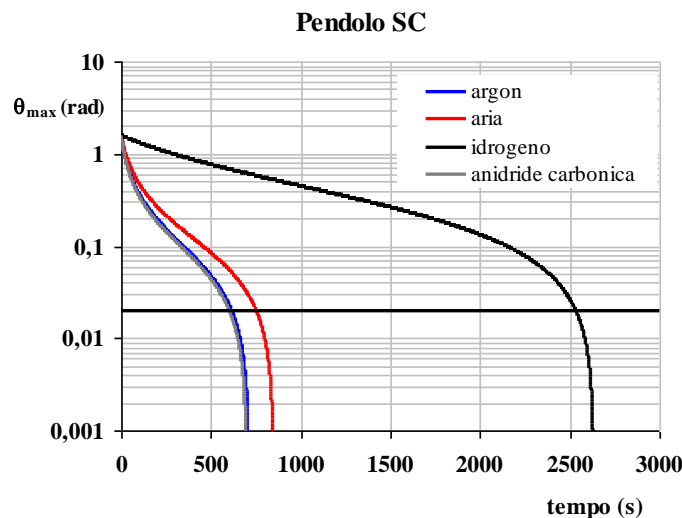


Fig. 11: Smorzamento delle oscillazioni in mezzi gassosi differenti.

È interessante osservare che, in idrogeno, è quasi assente la zona a concavità verso l'alto tipica delle grandi ampiezze e ciò è dovuto al fatto che la molecola è molto leggera. Le curve per argon e anidride carbonica sono sovrapposte.

L'andamento T/T_0 vs. θ_{max} è analogo a quello di fig. 10 e non lo presentiamo.

Riprendendo in esame pendoli che oscillano in aria, si è anche provato a vedere se le condizioni climatiche abbiano una qualche influenza sulla velocità di smorzamento. Facendo variare la temperatura in $0 \rightarrow 30^\circ\text{C}$, la pressione in $99000 \rightarrow 103000\text{ Pa}$, l'umidità relativa in $0 \rightarrow 60\%$, l'altezza s.l.m. in $0 \rightarrow 1000\text{ m}$, non sono emerse differenze significative.

Riduzioni più forti della pressione determinano invece differenze importanti, come mostrato nella figura che segue:

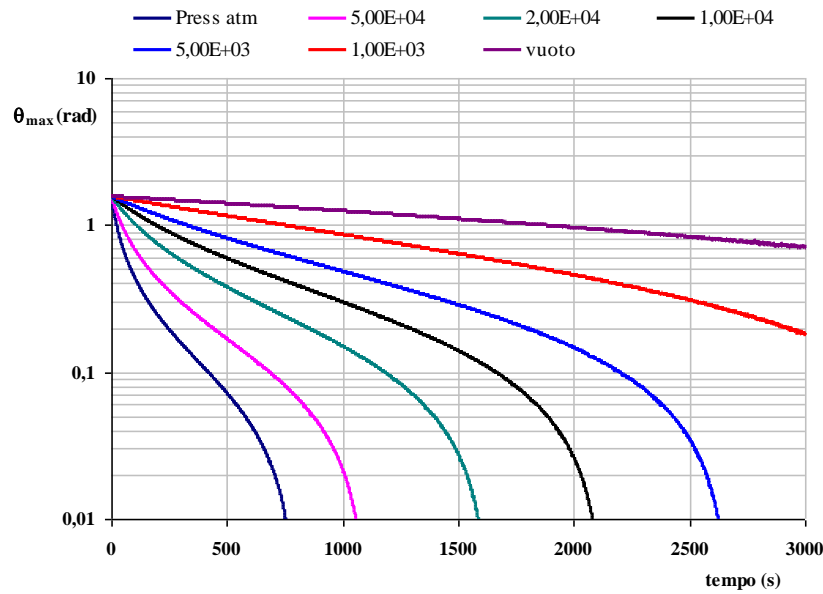


Fig. 13: riduzione di θ_{\max} al variare della pressione dell'aria.

Oltre all'aumento del tempo totale di oscillazione, si osserva come la riduzione della pressione determina una riduzione della regione a concavità verso l'alto (si riduce l'effetto del termine c_2).

b) Oscillazioni nei liquidi

Nella figura che segue, viene confrontato uno stesso pendolo in differenti liquidi:

$$m = 250\text{ g}; l = 1\text{ m}; r = 2\text{ cm}$$

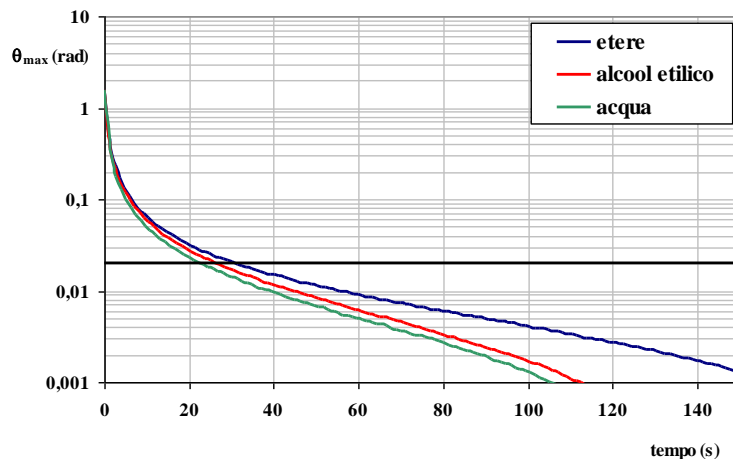


Fig. 14: pendolo in differenti liquidi

Si osserva da qui che non emergono particolari differenze, almeno nella regione $\mathcal{G} > 0,02 \text{ rad}$. Inoltre, sempre in questa regione, si osserva come la concavità sia verso l'alto, ad indicare che lo smorzamento è quasi completamente determinato dal termine dipendente dal quadrato della velocità.

Il grafico del rapporto T/T_0 in funzione di \mathcal{G}_{\max} mostra che il pendolo nei liquidi considerati, sempre riferendosi a $\mathcal{G} > 0,02 \text{ rad}$, non è sincrono:

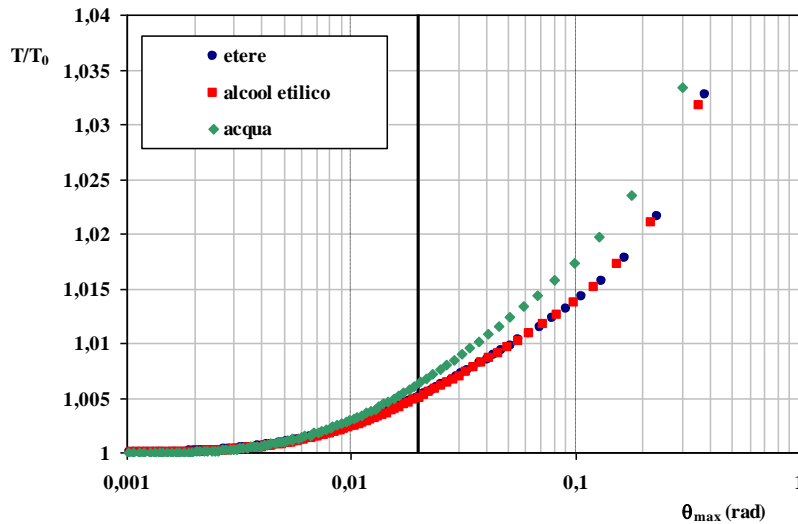


Fig. 15: Variazione del rapporto T/T_0 in funzione dell'ampiezza massima.

c) Tempo totale di oscillazione

Come varia il tempo totale di oscillazione al variare della lunghezza del pendolo? Questo tipo di indagine fa emergere aspetti interessanti, che si riassumono nel grafico che segue e nel successivo:

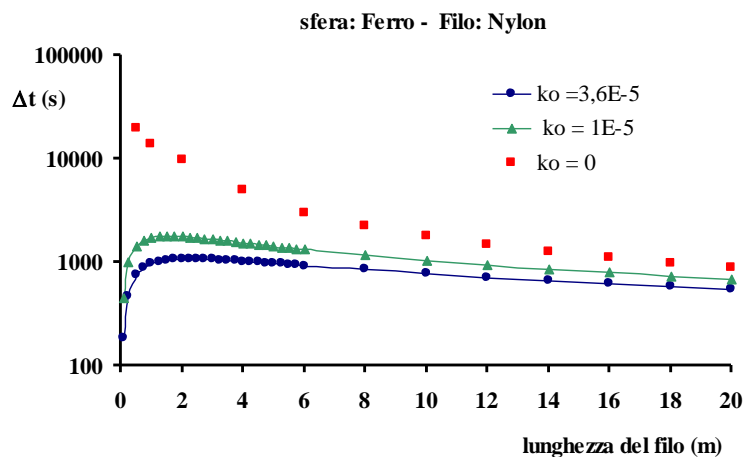
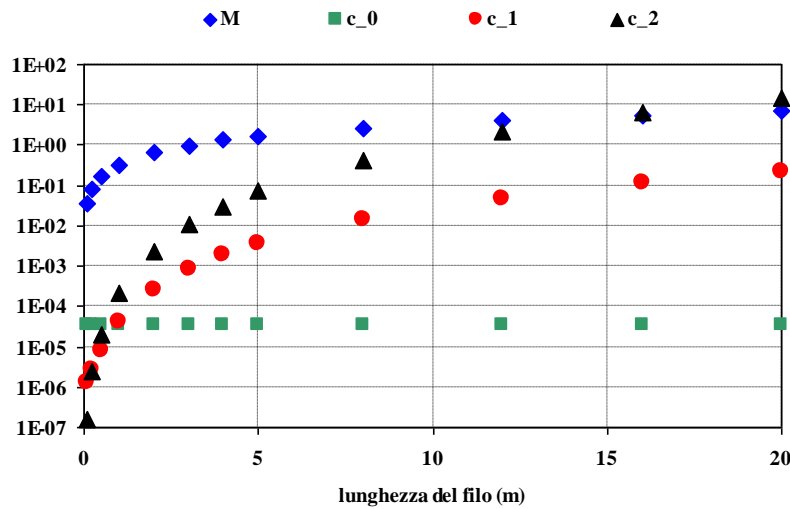


Fig. 16: Tempo totale di oscillazione in funzione della lunghezza del filo di sospensione

Il comportamento è differente a seconda che si consideri nullo o diverso da 0 il termine di attrito c_0 . In assenza di questo contributo, infatti, il tempo totale è funzione decrescente della lunghezza del filo. Ciò si spiega osservando la fig. 17:



Variando la lunghezza del pendolo tra 0,1 → 20 metri, aumenta sia il momento M complessivo, che i termini di attrito legati alla velocità ed al suo quadrato; quello legato al segno della velocità si mantiene, come è ovvio, costante. La variazione, in termini di ordini di grandezza, è però molto più forte per i due termini di attrito di quanto non si abbia per M . In assenza di c_0 , il tempo complessivo è allora sempre decrescente con la lunghezza (diminuisce sì M , ma c_1 e c_2 hanno diminuzioni più forti); la presenza del contributo costante del termine c_0 , fa sì che, per piccoli valori di l , esso diventi di fatto l'unico termine di attrito. Associato alla diminuzione di M , tutto ciò determina una complessiva riduzione del tempo totale di oscillazione. L'effetto determinato dalle variazioni della massa è mostrato nel grafico seguente, dal quale emerge una chiara dipendenza lineare:

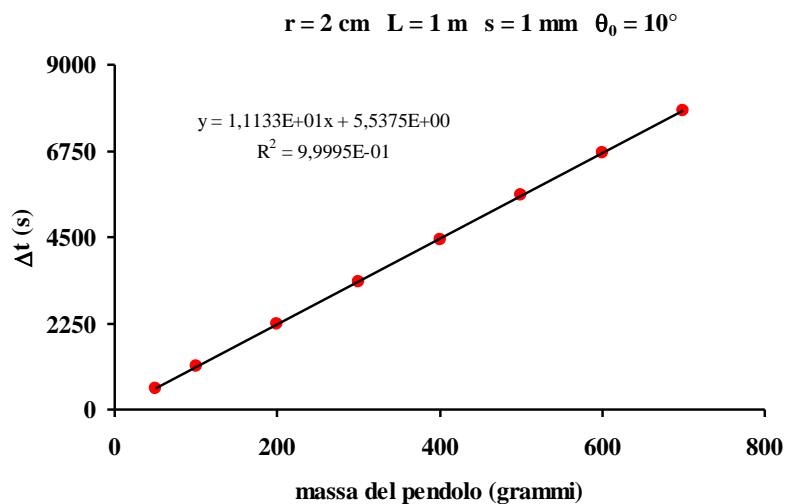


Fig. 18: Dipendenza del tempo complessivo di oscillazione dalla massa.

Conclusioni

L'idea che sta alla base di questo lavoro è quella di vedere come si comporta un pendolo al variare di parametri quali la densità e la viscosità del mezzo. La questione è, come si è potuto vedere, abbastanza articolata, in quanto coinvolge vari ambiti della fisica e della matematica, e non a livello elementare. Cosa si può fare e cosa è meglio evitare? Sicuramente, la parte sperimentale è facilmente eseguibile; inoltre, saper elaborare una matrice di dati (quale è la nostra $(t, \vartheta, \omega, \alpha)$), sia essa il risultato di una simulazione oppure di una misura, per estrarre da essa altre informazioni (nel nostro caso, grafici quali (ϑ_{\max}, t) o (T, ϑ_{\max})), può essere una interessante applicazione dell'informatica alla fisica. Relativamente alla fisica su cui si fonda il modello numerico, è probabilmente meglio fare solo brevi accenni. Le varie situazioni che il modello consente di esplorare attraverso l'impostazione dei parametri, come tali devono essere presentate, puntualizzando sempre la differenza sostanziale tra simulazione ed esperimento.

Infine, ma non ultimo come elemento di riflessione, il seguente aspetto: la fisica fa sempre più ricorso agli elaboratori per la simulazione di processi; questo, spesso, permette di focalizzare meglio la direzione della ricerca di laboratorio, fino a interagire intimamente con essa, in una sorta di feedback dell'una nei confronti dell'altra e viceversa.

Pertanto, fra gli strumenti didattici che si integrano con la pratica di laboratorio, si dovrebbe prevedere uno spazio dedicato al calcolo numerico, in grado di consentire l'attuazione di modellizzazioni di processo, anche semplici, mediante l'elaboratore.

Bibliografia:

-
- ^a Patrick T. Squire, *Pendulum damping*, Am. J. Phys. 54(11), November 1986.
- ^b R. A. Nelson, M. G. Olsson, *The pendulum – rich physics from a simple system*, Am. J. Phys. 54(2), February 1986.
- ^c A. B. Basset, *A Treatise on Hydrodynamics*, Deighton, Bell, London, 1888; ristampa Dover, New York, 1961.
- ^d F. Odar, W. S. Hamilton, J. Fluid Mech., 18,302,(1964).
- ^e B. Armstrong-Helouvry, P. Dupont, C. Canudas De Wit, *A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction*, Automatica, vol. 30, n. 7, pp. 1083-1138, Elsevier Science Ltd., Printed in Great Britain.
- ^f Bruce E. Poling, John M. Prausnitz, John P. O’Connell, *The Properties of Gases and Liquids*, Mc Graw-Hill, 2004, Fifth Edition, cap. 9.
- ^g W.H. Press, S.A Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, 2^a edizione, Cambridge University Press, 2002, cap. 16.
- ^h D. E. Roller, R. Blum, *Fisica Volume 1, Meccanica, Onde, Termodinamica*, Zanichelli, 1984, Bologna, pagg. 366-369.