數學與光學（及其應用）

課前活動：

日常生活中有許多光學（反射、折射及全反射）的現象（例如：救護車車頭的文字是鏡面的反射、插在水中的吸管似乎被折斷了、下過雨後的彩虹、水面倒影），以及例子（如：螞蟻也懂折射定律？！[1]）等。

引入活動：三項鐵人賽

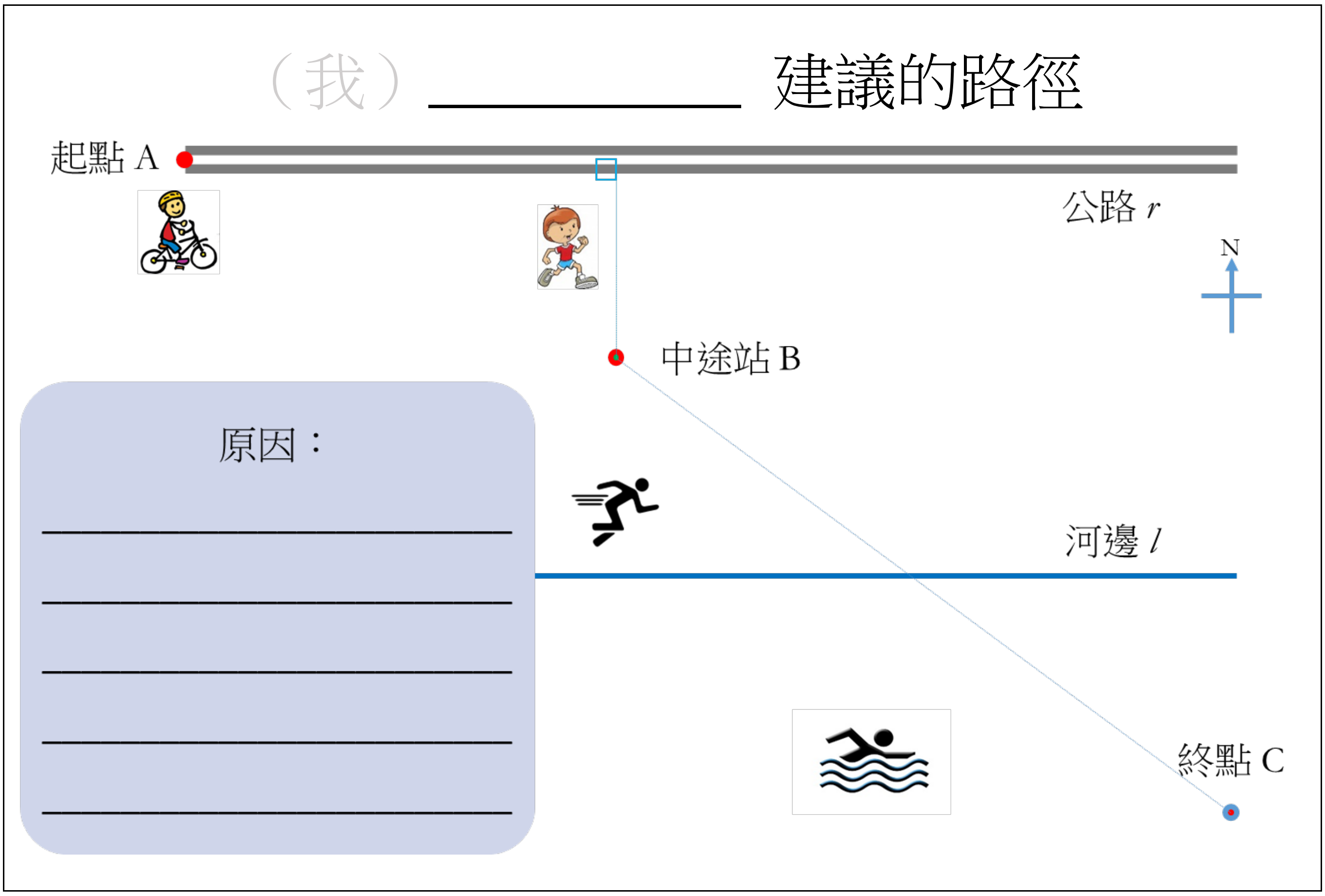
某人計劃參加三項鐵人賽。賽程如下：

- 賽程第一段：由起點 A 到中途站 B
  - 先用單車沿公路 r 行走，
  - 再從公路中的任何位置下車跑步到中途站 B。
- 賽程第二段：由中途站 B 到終點 C
  - 離開中途站，跑去河邊 l，
  - 最後游泳到終點 C。

他應運用的策略如何？

討論問題：

1. 請畫出你建議的路徑及填寫原因。

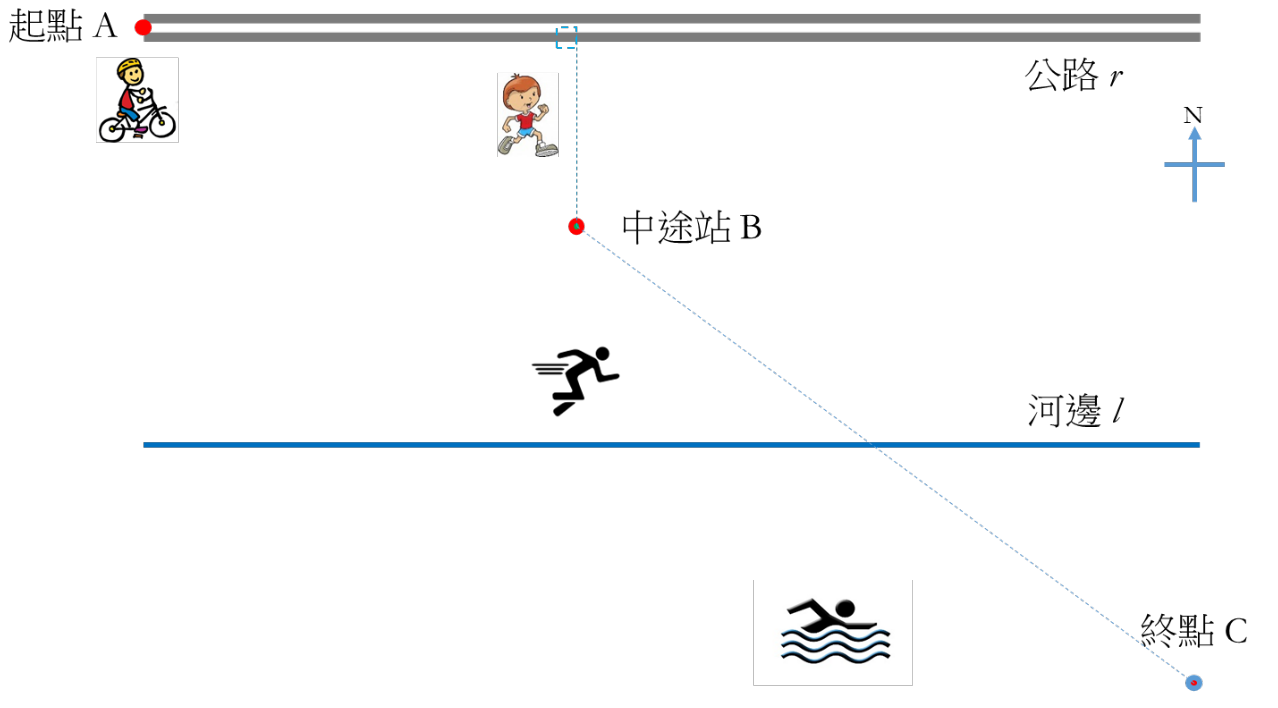


[1] Oettler J, Schmid VS, Zankl N, Rey O, Dress A, Heinze J (2013) Fermat's Principle of Least Time Predicts Refraction of Ant Trails at Substrate Borders. PLoS ONE 8(3): e59739. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0059739
吳芷敬及陳芳榆（2014）：〈眾蟻尋路千百度〉（佳作）。第 54 屆中小學科學展覽會高中組生物（生命科學）科，指導老師：揭維邦及馮蕙卿。（https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/54/pdf/040701.pdf）

討論問題：

2. 分析各段落的不同策略及考慮因素。

三項鐵人賽 Triathlon （策略）

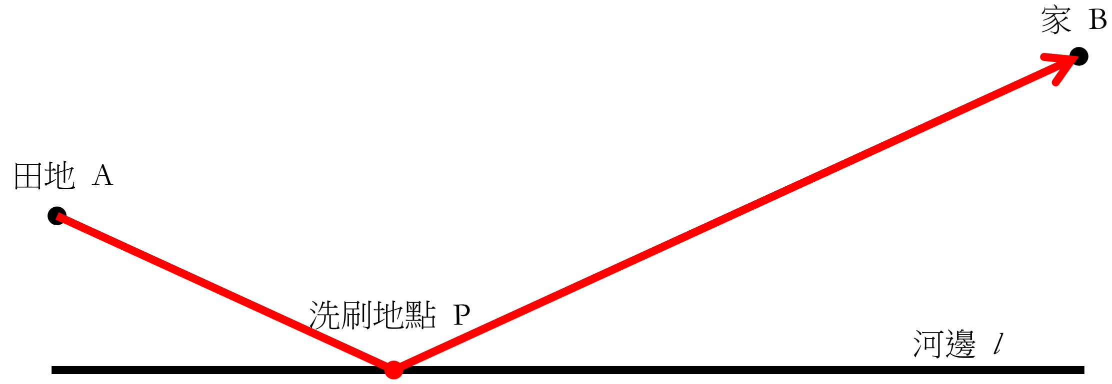


策略：	第1段 (A to B)	第2段 (B to C)	考慮因素
開始			

活動一：(光的反射定律)

最短的路程：Heron 定理

據說在公元 1 世紀的某一天，一位老農夫請教古希臘數學家 Heron 海倫一個問題：「我每天做完農耕活動後都要到河邊洗刷農具，然後再回家。河岸是長長的直線，如何選一個最佳的洗刷地點 P，使我從田地 A 到河邊 l，再從河邊到家 B 的路程最短？」[2]



討論問題：

1. a) 利用提供的 GeoGebra 檔案，寫出圖中 A 點及 B 點的座標。
   【可自由移動 A 點及 B 點】
   b) 移動 P' 點，計算 AP' + P'B 的距離，從而找出最佳地點（試驗）的座標。
   c) 寫出 B 點沿直線 l （即 x 軸）的反射的點 B' 座標。
   d) 連接直線 AB'。(利用斜率公式）找出直線 l 與 AB' 的交點 P 座標（即 x 軸截距），並且計算 AP + PB 的距離。
   e) 移動 P' 點，並且比較 AP + PB 及 AP' + P'B 的計算結果，從而証明最佳地點的座標為 P。

答案：

1. a) A 點座標是 ____________，B 點座標是 ____________。
   b) 最佳地點（試驗）的座標為：____________。 AP' + P'B 的距離 = ____________。
   c) 反射點 B' 座標為：____________。
   d) 交點 P 座標：____________。 AP + PB 的距離 = ____________。
   e) （說明理由）比較計算結果，

   ____

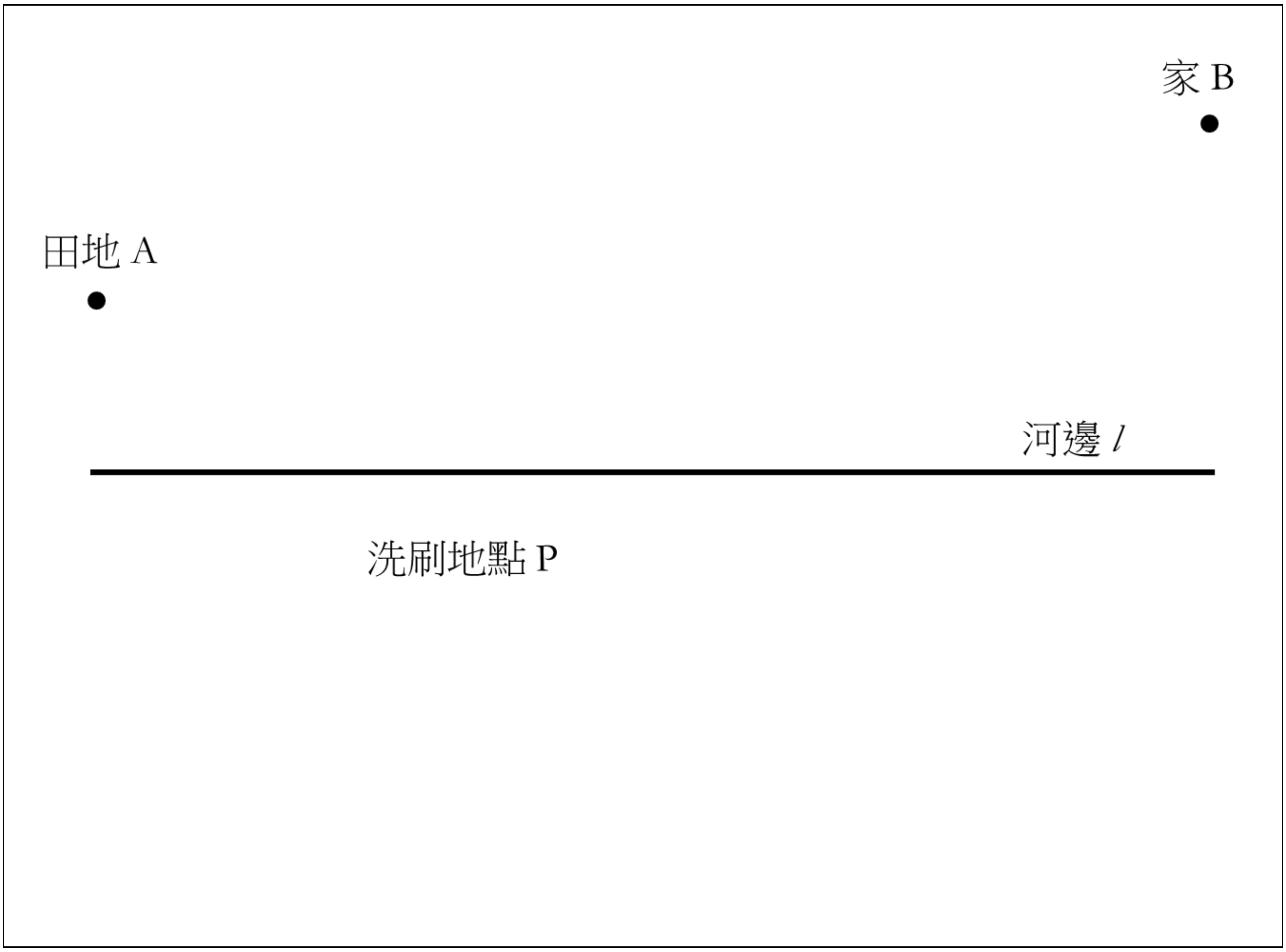
   ____

[2] 這個問題稱為 “海倫【或稱：希羅 / 海龍 ...】光程最短原理”，取自傅海倫（2004）:〈物理原理在數學中的應用〉。《數學傳播》28 卷 1 期，頁 63-69。(http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28107.pdf)
類似的題目在不同的數學或幾何書中都不時出現。例如：「在河邊，要建築一座水塔，從那裡用水管向 A、B 兩個村莊供水。這個水塔應該建築在什麼地方，才能使從塔到兩個村莊用的水管總長度最短？」取自 Perlman, Y（原著），戴中器譯（2000）:《趣味幾何學》，臺北：九章出版社，頁 282-283。

討論問題：

2. a) 利用幾何作圖的方法找出最佳地點 P 的位置。

【即是從 A 點到直線 l 再到 B 點的所有路徑中，以通過 P 點的路徑為最短。】



b) 利用直線 l 上的任意一點 P’，證明最佳地點的位置為 P 點。

c) 從而證明「入射角 = 反射角」，即是 $\angle APN = \angle BPN$。

討論問題：

3. a) 設最佳地點的座標為 P(x, 0)（即 x 軸截距），
A 點及 B 點的座標分別為 A(0, a) 及 B(b, c)。
寫出 AP + PB 的距離。【或者：證明距離 d(x) = $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$】[3]

b) 寫出 B 點沿直線 l（即 x 軸）的反射點 B’ 座標。
連接直線 AB’。設直線 l 與 AB’ 的交點為 P(x, 0)。
利用斜率公式 / 分點公式，證明 $x=\frac{ab}{a+c}$。

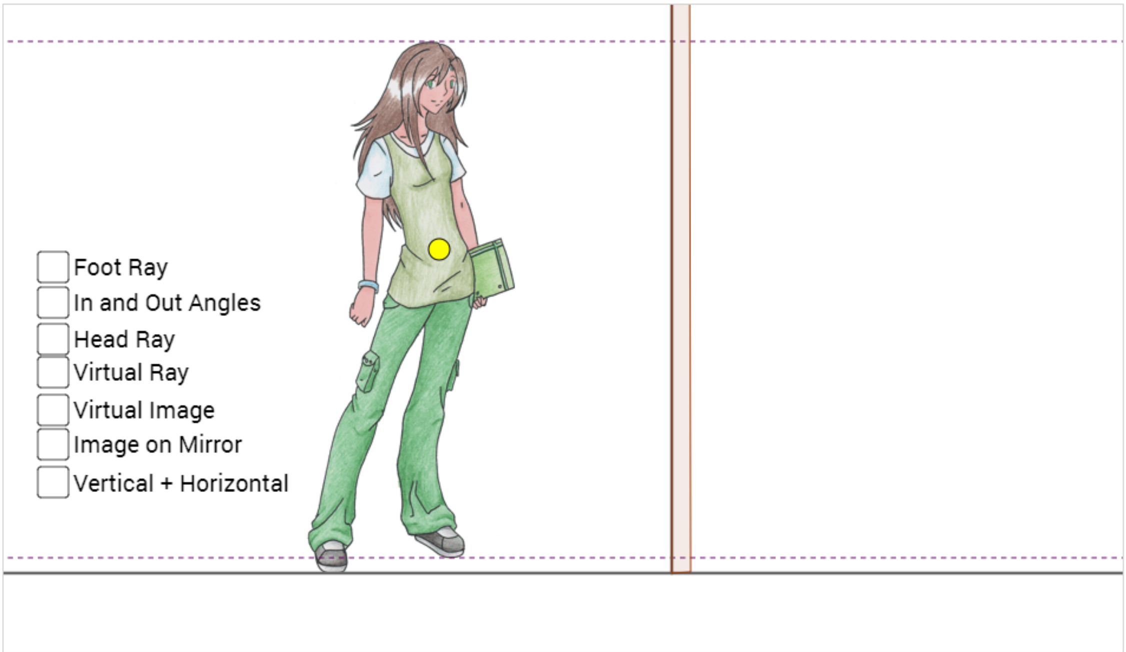
[3] 微分 d(x) 後，取 d’(x) = 0 可得「入射角 = 反射角」。

延伸問題及活動：

1. 某人在鏡前照鏡剛好能照到全身/上半身，假如她向前或向後移動，鏡像會否改變？

Girl in the Mirror

How large does a mirror need to be to see your full body? Move the girl and use the checkboxes to find an answer to this question.



GeoGebra – Markus Hohenwarter, GeoGebra Materials Team

https://www.geogebra.org/m/MNpVraRC 或 https://www.geogebra.org/m/jNZ4uqXK

2. 欣賞數學的美妙：

a) 全息圖（Hologram）[4]：

製作全息圖、討論有關原理及透過全息圖去觀看立體投射的影像。

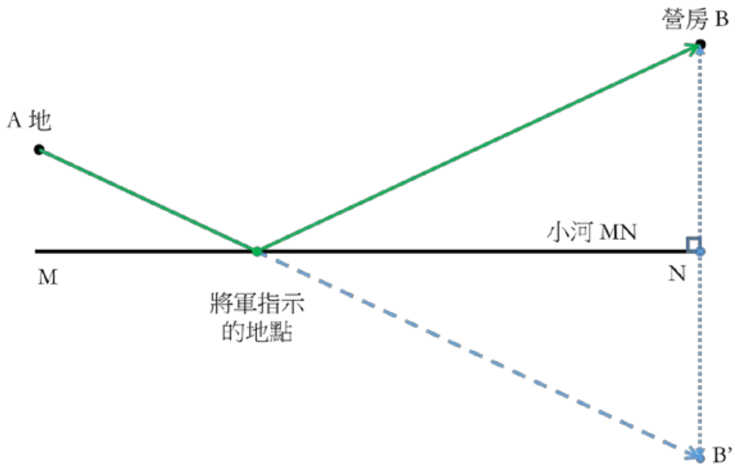
b) 救護車車頭的文字（鏡面的反射）、水面的倒影等。

[4] https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/54/pdf/040110.pdf

活動二：(光的折射定律)

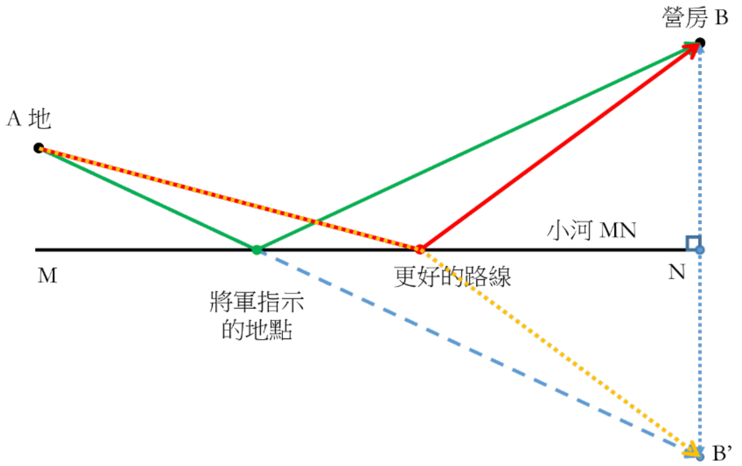
據說歷史上，費馬曾聽過一個故事：

一位將軍帶領士兵在 A 地操練，忽見營房 B 地著火，便立即命令士兵跑步到小河 MN 處用頭盔取水後趕去 B 處救火。將軍選擇的路線自稱是一條能將水以最快速度運到營地的路線，當然這是「海倫光程最短線」。



費馬聽後，指出「將軍所選的路線是錯誤的，事實上有更好的一條路線」。

費馬認為，士兵從 A 地到河邊是空手跑，而從河邊到營地 B 是盛滿水跑的，因此兩段的速度是不一樣的，這種情況下，「海倫光程最短原理」是不適用的。

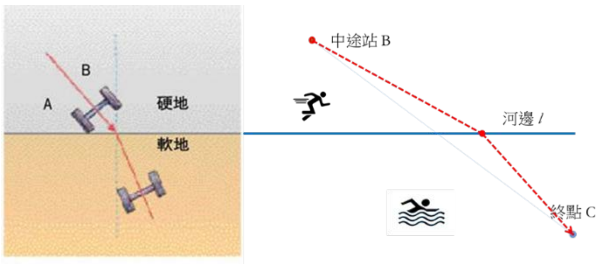


討論問題：

1. 認識有關折射的現象

費馬原理（Fermat principle）最早由法國科學家皮埃爾·德·費馬在 1662 年提出：光傳播的路徑是光程取極值的路徑【費馬的光行最速原理】[5]。

由費馬原理直接之推論便是折射定律。

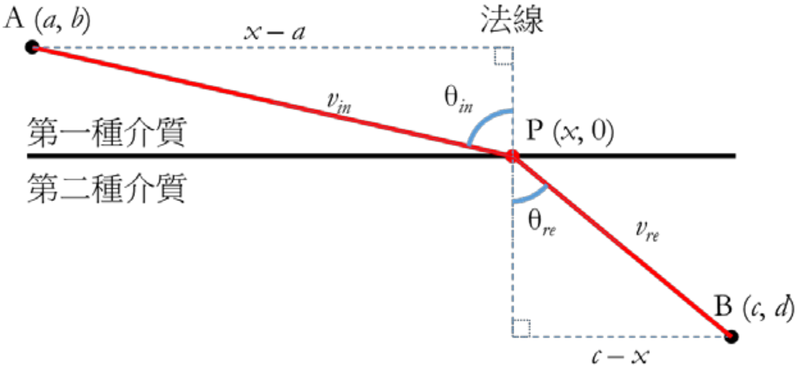


[5] 『光線從一點行至另一點所遵循之路徑，依所需之時間最短者。』 — 費馬 (Fermat: 1601–1665)

討論問題：

2. 由費馬原理到折射定律

- 假設光線從 A(a, b) 點經過第一種介質在臨界面上的一點 P(x, 0) 射入第二種介質，到達 B(c, d) 點，形成入射角 θ_{in} 及折射角 θ_{re}，而在兩個介質中之速率分別為 v_{in}、v_{re}。



a) 證明光線從 A 經過 P 至 B 所需之時間 T(x) 為 $T(x)=\frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{v_{in}}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+d^2}}{v_{re}}$ 。

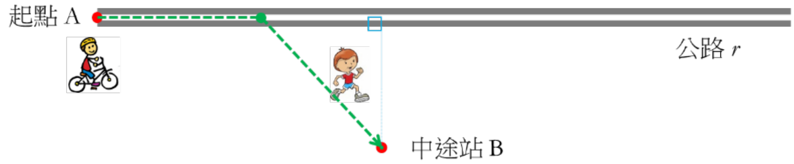
b) 對 T(x) 作微分，並取 T'(x) = 0（時間最短），證明 $\frac{x-a}{v_{in}\sqrt{(x-a)^2+b^2}}=\frac{c-x}{v_{re}\sqrt{(c-x)^2+d^2}}$。

c) 利用三角比[6]，證明折射定律 $\frac{\sin\theta_{in}}{v_{in}}=\frac{\sin\theta_{re}}{v_{re}}$。

[6] 三角比：$\sin\theta_{in}=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$ 及 $\sin\theta_{re}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+d^2}}$

延伸問題及活動：

1. 科學現象及背後的數學：
   討論日常生活中的折射現象及背後的數學，如：插在水中的吸管似乎被折斷了、下過雨後的彩虹[7]、螞蟻也懂折射定律[8] 等。
2. 欣賞數學的美妙：
   利用微積分，費馬證明了這條由正弦定律所決定的路徑，正是使得光線由 A 點到 B 點所需時間最短，這樣 Hero 的反射定律在 1600 年之後，由一個類似且同樣重要的折射定律所補充。
   由折射定律到全內反射條件[9]。



（三項鐵人賽的第一段）

[7] 你可曾想過彩虹是怎麼來的？為什麼它的內側比外側亮呢？為什麼有時會出現兩條呢？這些問題的答案涉及了光學、幾何、三角以及微積分，這篇文章將介紹一些有關的光學和數學。參 Joe Dan Austin、F. Barry Dunning, 怡萱譯（1989）:〈彩虹中的數學〉。《數學傳播》第 13 卷第 2 期。(http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_13_2_15/index.html)

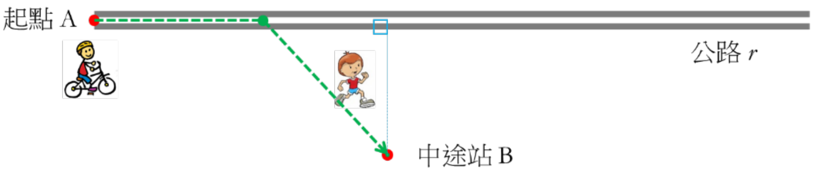
[8] Oettler J, Schmid VS, Zankl N, Rey O, Dress A, Heinze J (2013) Fermat's Principle of Least Time Predicts Refraction of Ant Trails at Substrate Borders. PLoS ONE 8(3): e59739. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0059739
吳芷敬及陳芳榆（2014）:〈眾蟻尋路千百度〉(佳作)。第 54 屆中小學科學展覽會高中組生物（生命科學）科，指導老師：揭維邦及馮蕙卿。(https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/54/pdf/040701.pdf)

[9] 費馬發現用初等數學知識解求最短時間是十分複雜的。費馬也用光學原理去找最佳地點，他偶爾看到笛卡兒（Descartes, 1596-1650）於 1637 年討論光的折射現象時論證明的司乃耳定律 / 斯涅爾定律（Snell's Law）：$n_i \sin i = n_r \sin r$ 即是 $\frac{\sin i}{v_i} = \frac{\sin r}{v_r}$ （其中 i 和 r 分別為入射角與反射角）。這個定律給他很大的啟發，使他最終發現了「光行最速原理」，將光的折射定律（即司乃耳定律 / 斯涅爾定律）應用於數學，使之成為解決極值的一條重要方法，用這種方法即可解決在兩段路程上速度不等的問題。取自傅海倫（2004）:〈物理原理在數學中的應用〉。《數學傳播》28 卷 1 期，頁 63-69。(http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28107.pdf)

<u>活動三：(光的全內反射條件)</u>

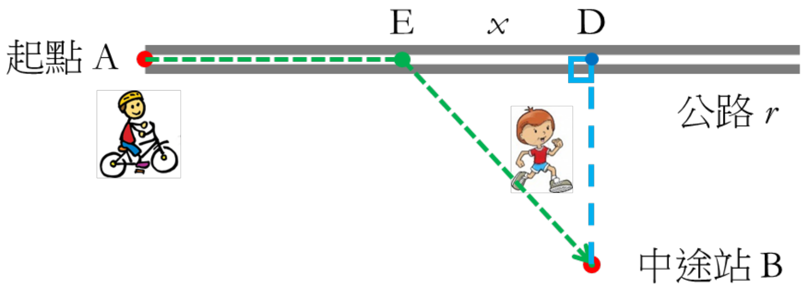
三項鐵人賽的第一段：由起點 A 到中途站 B

- 先用單車沿公路 r 行走，
- 再從公路中的任何位置下車跑步到中途站 B。



討論問題：

1. 三項鐵人賽的第一段：從起點 A 到中途站 B，先用單車沿公路 r 行走，再從公路中的任何位置下車跑步到中途站 B。最佳的策略如何？應該如何選取路線能最快到達？

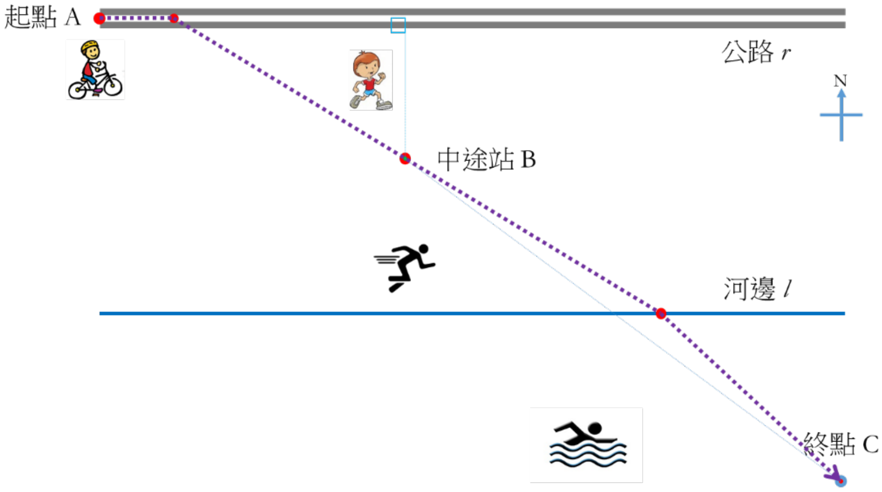


答：

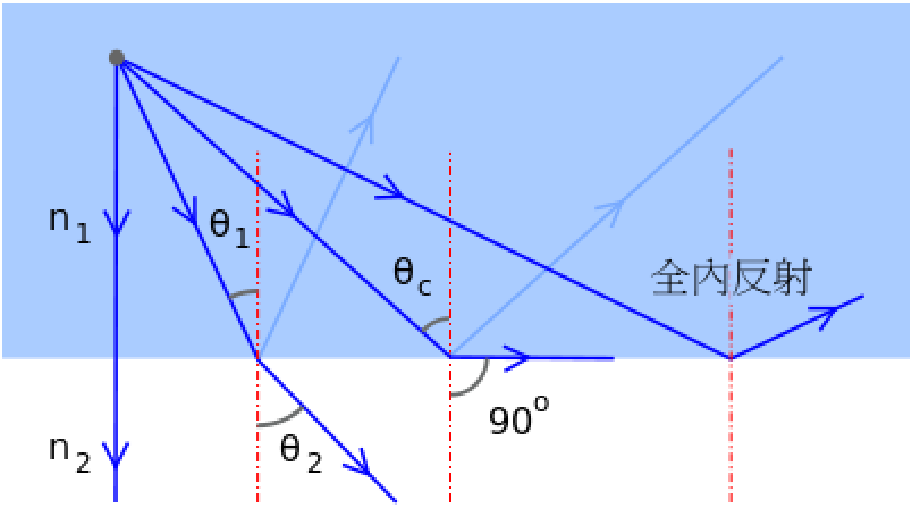
2. 已知 AD = l，BD = n，AE 段的速度為 v_1，EB 段的速度為 v_2。
設 DE = x，利用折射定律證明 $x = \frac{n\,v_2}{\sqrt{{v_2}^2 - {v_1}^2}}$。

延伸問題及活動：

1. 搜集光纖在電訊和醫療上（例如內窺鏡檢查）的應用等。
2. 探討海市蜃樓（Mirage）、鑽石內的全反射現象[10]等。
3. 利用 GeoGebra 找出最優化的路線。



4. 構作以下不同情況下的動態 GeoGebra 檔案。



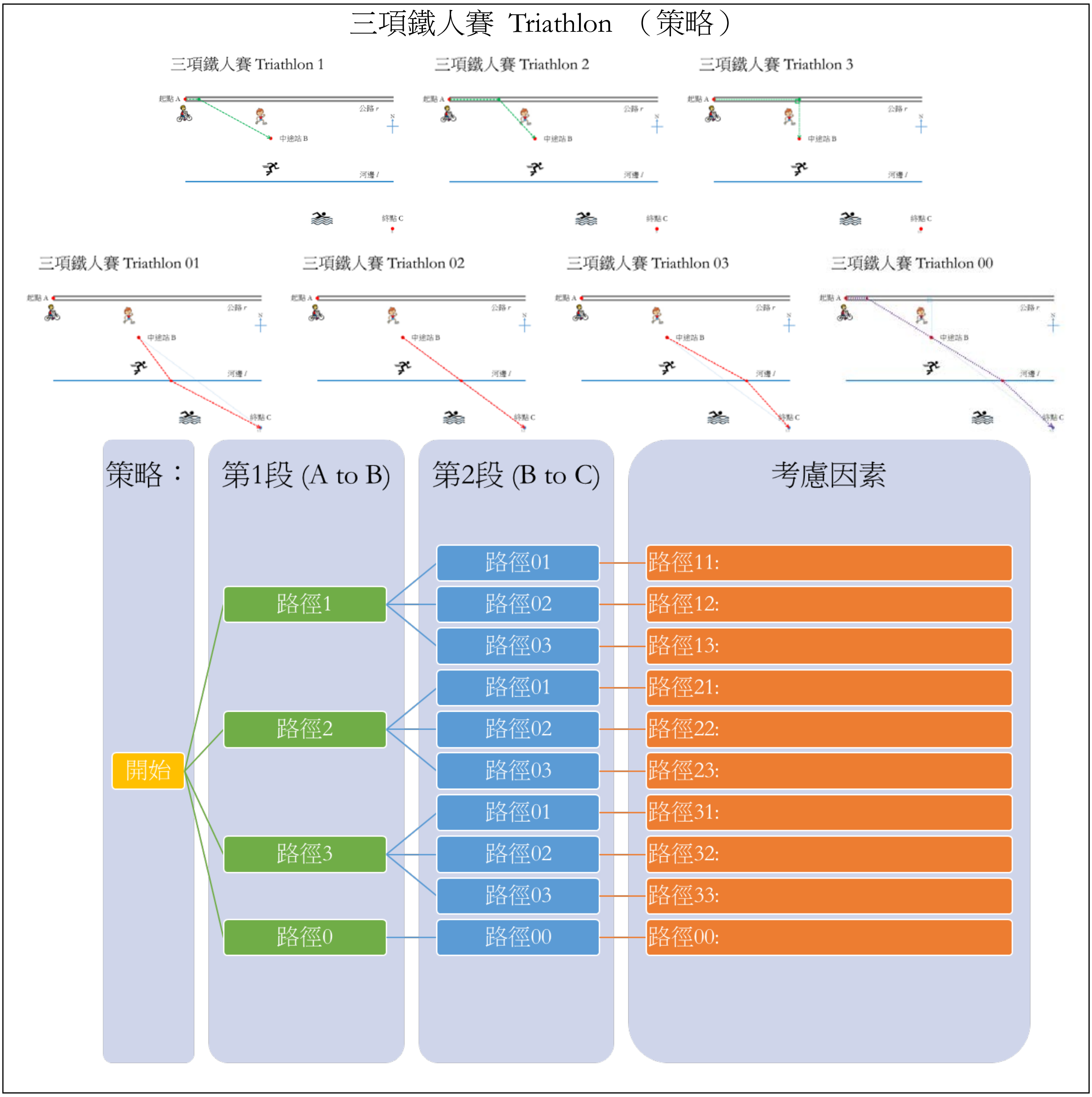
[10] 鑽石置於空氣中時其內部全反射的臨界角只有 24.5 度。任何由內部射向鑽石表面的光線只要超過 24.5 度就無法逃離鑽石內部。

參考答案

<u>引入活動：三項鐵人賽</u>

討論問題：

1. 請畫出你建議的路徑及填寫原因。【任何合理原因】
2. 分析各段落的不同策略及考慮因素。【任何合理原因】

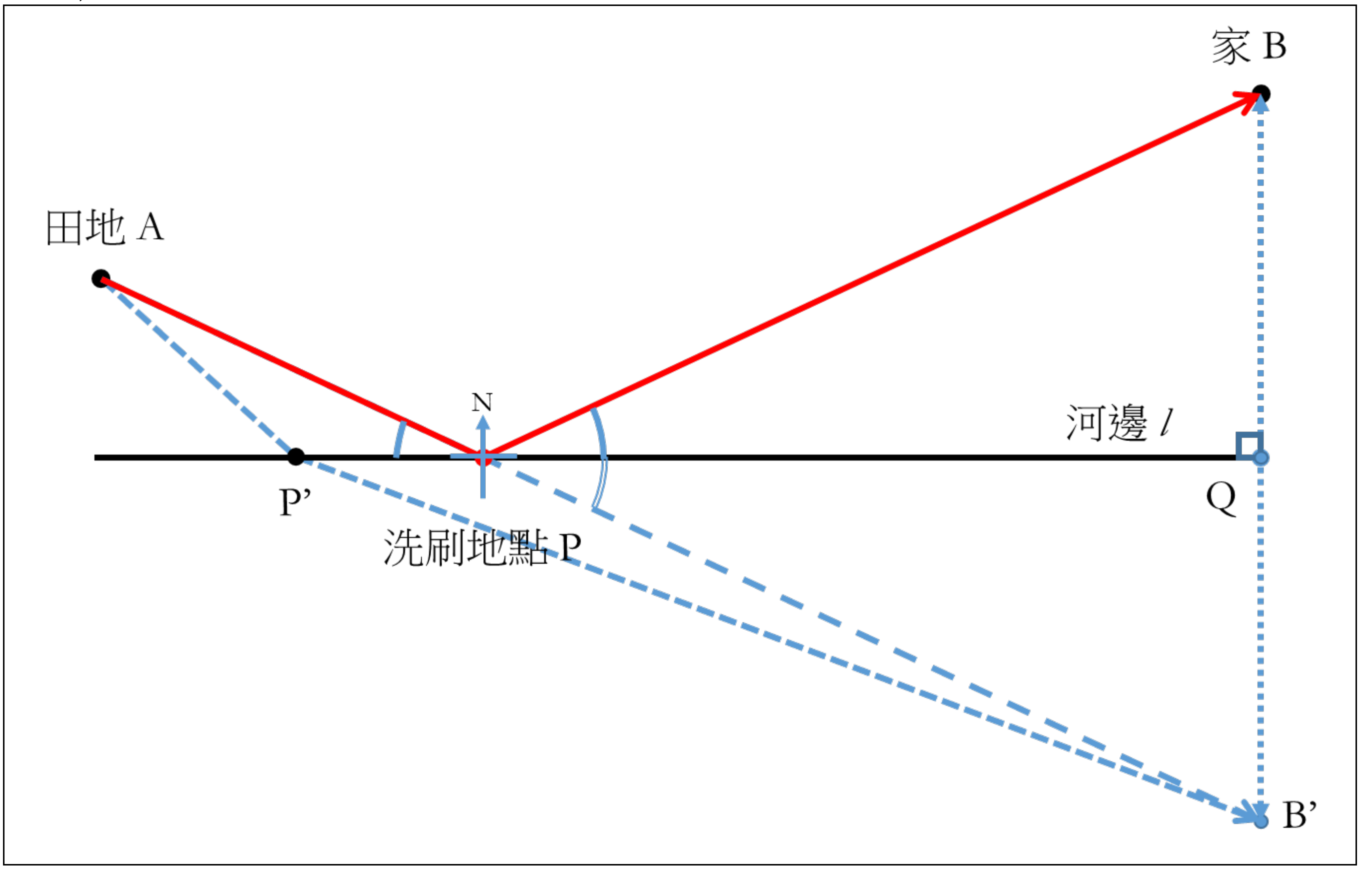


<u>活動一：（光的反射定律）</u>

討論問題：

1. 【任何根據 GeoGebra 檔案的合理結果及原因】。

2. a) 利用幾何作圖的方法找出最佳地點 P 的位置。



b) 利用直線 l 上的任意一點 P'，證明最佳地點的位置為 P 點。

證明：

設 P' 為直線 l 上的任意點。

∵ AP' + P'B = AP' + P'B' ≥ AP + PB' = AP + PB

等號成立的條件是 P' = P。

c) 從而證明「入射角 = 反射角」，即是 ∠APN = ∠BPN。

證明「入射角等於反射角」：

透過證明 ΔPQB ≡ ΔPQB'。以及利用「對頂角」。

從而證明「入射角=反射角」，即 ∠APN = ∠BPN。

3. a) AP + PB 的距離 d(x) = $\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$

b) 利用斜率公式 / 分點公式，證明 $x=\frac{ab}{a+c}$。

延伸問題及活動：

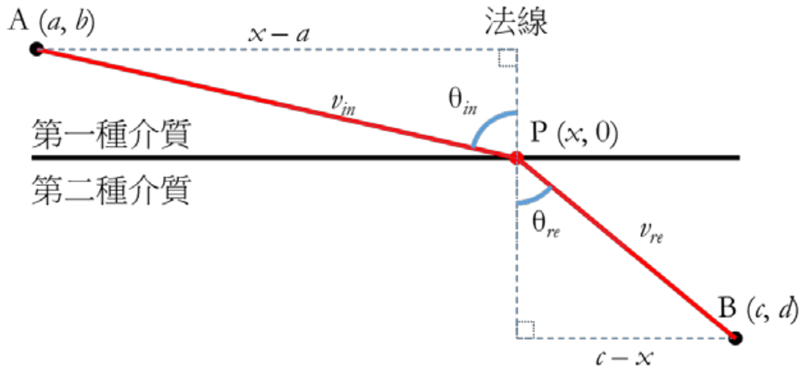
1. 某人在鏡前照鏡剛好能照到全身/上半身，假如她向前或向後移動，鏡像會否改變？
【不會】

2. 欣賞數學的美妙。

活動二：(光的折射定律)

討論問題：

1. 認識有關折射的現象。
2. 由費馬原理到折射定律



a) 證明光線從 A 經過 P 至 B 所需之時間 T(x) 為 $T(x)=\frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{v_{in}}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+d^2}}{v_{re}}$ 。

b) 對 T(x) 作微分，並取 T'(x) = 0（時間最短），證明 $\frac{x-a}{v_{in}\sqrt{(x-a)^2+b^2}}=\frac{c-x}{v_{re}\sqrt{(c-x)^2+d^2}}$。

c) 利用三角比（$\sin\theta_{in}=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$ 及 $\sin\theta_{re}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+d^2}}$），
證明折射定律 $\frac{\sin\theta_{in}}{v_{in}}=\frac{\sin\theta_{re}}{v_{re}}$。

延伸問題及活動：

1. 科學現象及背後的數學。
2. 欣賞數學的美妙。

活動三：(光的全內反射條件)

討論問題：

1. 【任何合理原因】

- 由於跑步的速度一般較騎單車的速度慢，所以太早下車跑步並不是太好。
- 若沿公路行走到 D 點（B 點與公路的垂足），雖然跑步的路程較短，但卻繞遠了。

2. 設 DE = x，利用折射定律證明 $x=\frac{n\,v_2}{\sqrt{{v_2}^2-{v_1}^2}}$。

由折射定律： $\frac{\sin\theta_{in}}{v_{in}}=\frac{\sin\theta_{re}}{v_{re}}$，其中 v_{in}=90°，

又因為 $\sin\theta_{re}=\frac{x}{\sqrt{n^2+x^2}}$，

所以 $\frac{x^2+n^2}{x^2}=\frac{{v_1}^2}{{v_2}^2}$，可得 $x=\frac{n\,v_2}{\sqrt{{v_2}^2-{v_1}^2}}$。

延伸問題及活動：

1. 搜集光纖在電訊和醫療上（例如內窺鏡檢查）的應用等。
2. 探討海市蜃樓（Mirage）、鑽石內的全反射現象等。
3. 利用 GeoGebra 找出最優化的路線。
4. 構作以下不同情況下的動態 GeoGebra 檔案。

Please feel free to edit and send the comments to me (slhui@edb.gov.hk)