المعادلات والمتراجحات في $\mathbb{R}$

I) المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد :

1) – **تعريف** :

a و b و x أعداد حقيقية ؛ $a \neq 0$

كل مساواة على شكل : $a\,x + b = 0$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هو x .

2) – **مثال** : كل من الكتابات : $2x+11=0$; $\sqrt{3}.x-\dfrac{11}{23}=0$; $-\pi-5x=0$; $-\dfrac{1}{2}x+5=0$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد و هو x .

3) – **حل المعادلة** $a\,x + b = 0$ **في مجموعة ما** :

حل في $\mathbb{R}$ (مثلا) المعادلة $a\,x + b = 0$

يعني

ابحث عن مجموعة الحلول المنتمية الى $\mathbb{R}$ والتي نرمز اليها بـ $S_{\mathbb{R}}$

* / الطريقة العملية :

عند إزالة حد من إحدى طرفي معادلة نضيف مقابله إلى الطرف الآخر

* / أمثلة :

أ)– حـل المعادلة : $2x+3=0$ في $\mathbb{Z}$ ثم في $\mathbb{D}$

المعادلة $2x+3=0$ تكافئ على التوالي :
$$\left.\begin{aligned} 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned}\right]$$

$\dfrac{-3}{2}$ هو عدد ليس من $\mathbb{Z}$ اذن $S_{\mathbb{Z}} = \varnothing$ ؛ $\dfrac{-3}{2}$ هو عدد من $\mathbb{D}$ اذن $S_{\mathbb{D}} = \left\{\dfrac{(-3)}{2}\right\}$

ب) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x\sqrt{3}-7=0$

المعادلة $x\sqrt{3}-7=0$ تكافئ على التوالي :

$$x\sqrt{3}=7$$
$$x=\frac{7}{\sqrt{3}}$$
$$x=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$\frac{7\sqrt{3}}{3}$ هو عدد من $\mathbb{R}$ اذن $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\sqrt{3}}{3}\right\}$

ج) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x+2=3x+2$.

المعادلة $2x+2=3x+2$ تكافئ على التوالي

$$2x-3x=2-2$$
$$2x-3x=0$$
$$-x=0$$
$$x=0$$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$

حالات خاصة:

1)– حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(3x-1)-(4-x)=4x-5$

هذه المعادلة تكافئ $3x-1-4+x=4x-5$ اي $4x-5=4x-5$ ومنه :

$$4x-4x=5-5$$
$$0x=0$$

نلاحظ ان جميع الأعداد الحقيقية هي حل للمعادلة وبالتالي : $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$

2) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $5x+7=-2+5x$.

المعادلة $5x+7=-2+3x$ تكافئ على التوالي :

$$5x-5x=-2-7$$
$$0x=-9$$

وهذا غير ممكن ومنه $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ اي ان المعادلة $5x+7=-2+3x$ ليس لها حـل .

3) – **حل المعادلة** : $\mathbf{(ax+b)(cx+d)=0}$

* / بصفة عامة :

a و b عددان حقيقيان معلومان .

$(ax+b)(cx+d)=0$ **يعني** $(ax+b)=0$ أو $(cx+d)=0$

* / مثال :

حل في $\mathbb{Z}$ ثم في $\mathbb{Q}$ المعادلة : $(2x+4)(-3x-5)=0$.

المعادلة $(2x+4)(-3x-5)=0$ تكافئ على التوالي :

$$\left.\begin{aligned} 2x+4&=0\\ 2x&=-4\\ x&=\frac{-4}{2}\\ x&=-2 \end{aligned}\right\} \text{ او } \left\{\begin{aligned} -3x-5&=0\\ -3x&=5\\ x&=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3} \end{aligned}\right.$$

إذن للمعادلة حلان هما : -2 و $-\frac{5}{3}$ ومنه : $S_{\mathbb{Z}}=\{-2\}$ لان $\frac{5}{-3}$ ليست من $\mathbb{Z}$ بينما $S_{\mathbb{Q}}=\{-\frac{5}{3};-2\}$

4) – **حل المعادلة** : $x^2=a$

*** / بصفة عامة :**

* / إذا كان : $a>0$ فإن المعادلة $x^2=a$ تقبل حـلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

* / إذا كان : $a=0$ فإن لمعادلة $x^2=a$ تقبل حـلا وحيدا هو العدد 0 .

* / إذا كان : $a<0$ فإن المعادلة $x^2=a$ لا تقبل أي حـل .

*** / أمثلة :**

أ – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2=5$.

سيكون لدينا : $x=\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$

إذن المعادلة $x^2=5$ تقبل حلين هما : $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

ب – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2=-6$.

المعادلة $2x^2=-6$ تكافئ على التوالي : $\left.\begin{aligned} x^2&=-\frac{6}{2}\\ x^2&=-3 \end{aligned}\right)$ وهذا غير ممكن لان المربع عدد موجب

إذن المعادلة $2x^2=-6$ ليس لها حـل ومنه ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{\quad\}$.

ج – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2+5=x^2+5$.

المعادلة $2x^2+5=x^2+5$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2-x^2=5-5$$

اذ ن $x^2=0$

تال ي . $x=0$

إذن للمعادلة $2x^2+5=x^2+5$ حـلا وحيدا هو العدد 0 ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$.

5) – **المعادلات و النشـر** :

أ – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2(3x+2)-5(x-1)=0$.

المعادلة $2(3x+2)-5(x-1)=0$ تكافئ على التوالي :

$$\left.\begin{aligned}6x+4-5x+5&=0\\6x-5x&=-4-5\\x&=-9\end{aligned}\right)$$

إذن العدد -9 هو حـل المعادلة $2(3x+2)-5(x-1)=0$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{-9\}$

ب – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$.

المعادلة $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$ تكافئ على التوالي :

$$\left[\begin{aligned}-6x-3&=x-2x-4\\-6x-x+2x&=-4+3\\-5x&=-1\\x&=\frac{1}{5}\end{aligned}\right.$$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\{\frac{1}{5}\}$.

6) – **المعادلات و التفكيك :**

1) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$.

المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تكافئ على التوالي :

$$(x+2)[(3x-1)+(-4x+5)]=0$$
$$(x+2)(3x-1-4x+5)=0$$
$$(x+2)(-x+4)=0$$

مما يعطي $x=-2$ او $x=4$

إذن المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تقبل حلين هما : -2 و 4 .

ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{4;-2\}$.

2) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $25x^2+30x+9=0$.

المعادلة $25x^2+30x+9=0$ تكافئ على التوالي :

$$(5x)^2+30x+3^2=0$$
$$(5x+3)^2=0$$
$$5x+3=0$$
$$5x=-3$$
$$x=\frac{-3}{5}$$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-3}{5}\right\}$

II) حـل المسائل :

1) – التمشي :

لحـــــل مسألة نتبع التمشي الآتي :

1) – اختيار المجهول .

2) – صياغة المعادلة .

3) – حـــــل المعادلة .

4) – اختيار الحل المنطقي الموافق للمسألة .

2) – مثال :

حصان يحمل على ظهره 5 أكياس و 20 kg من القمح و 3 أكياس و 10 kg من الذرة، و جمل يحمل 3 أكياس و 80 kg من القمح و كيسان (2) و 50 kg من الشعير . فأجهد ذلك على الجمل فقال له الحصان : كيف تشعر بالتعب و نحن نحمل نفس الوزن ؟ إذا علمت أن الكيس الواحد من الشعير يزيد عن الكيس الواحد من القمح ب 10 kg، فما هو وزن الكيس الواحد من كـل نوع ؟

الحـل :

1) – اختيار المجهول : ليكن x وزن الكيس الواحد من القمح .

2) – صياغة المعادلة : بما أن x هو وزن الكيس الواحد من القمح فإن $(x+10)$ هو وزن الكيس الواحد من الشعير .

إذن : -- الوزن الذي يحمله الحصان هو : $(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]$.

-- الوزن الذي يحمله الجمل هو : $(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$.

و بما أن الحصان و الجمل يحملان نفس الوزن فستكون لدينا المعادلة الآتية :

$$(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]=(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$$

3) – حـل المعادلة :

المعادلة $(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]=(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$

تكافئ على التوالي :

$$3x+80+2x+20+50=5x+20+3x+30+10$$
$$3x+2x-5x-3x=20+30+10-80-20-50$$
$$-3x=-90$$
$$x=30$$

***) ملاحظة :** لنتحقق من الحـل :

$$(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]=5\times30+20+3(30+10)+10$$
$$=150+20+3\times40+10=300$$
$$(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]=3\times30+80+2(30+10)+50$$
$$=90+80+2\times40+50=300$$

إذن العدد 30 هو حـل المعادلة $(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]=(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$

4)– الرجوع إلى المسألة :

وزن الكيس الواحد من القمح هو : 30 kg .

وزن الكيس الواحد من الذرى هو : 40 kg .

III – الحصر :

1) – حصر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t **أعداد حقيقية بحيث** :

اذا كان $x\le a\le y$ و $z\le b\le t$

فان $x+z\le a+b\le y+t$

*** مثال :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 8$ و $-4\le y\le 2$

لنحصر $x+y$.

لدينا : $3+(-4)\le x+y\le 8+2$

إذن : $-1\le x+y\le 10$

2) – حصر مقابل عدد حقيقي

a **عدد حقيقي** $x\le a\le y$

يعني $-y\le -a\le -x$

3) – حصر فرق عددين حقيقيين :

ملاحظة هامة : لحصر $a-b$ ، نكتب $a-b=a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 8$ و $-4\le y\le 2$ ؛ لنحصر $x-y$.

لدينا : $-2\le -y\le 4$ و $3\le x\le 8$ إذن : $3-2\le x+(-y)\le 8+4$

و منه فإن : $1\le x-y\le 12$

4) – حصر جذاء عددين حقيقيين :

a و b و x و y و z و t **أعداد حقيقية موجبة بحيث :**

$x\le a\le y$ و $z\le b\le t$

$x\times z\le a\times b\le y\times t$

*** مثال 1 :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 7$ و $1\le y\le 3$ ؛ لنحصر $x\times y$.

لدينا : $3\times 1\le x\times y\le 7\times 3$ إذن : $3\le x\times y\le 21$

* مثال 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5\le x\le -2$ و $3\le y\le 6$ ؛ لنحصر $x\times y$.

لدينا : $2\le -x\le 5$ إذن : $2\times 3\le (-x)\times y\le 5\times 6$ أي $6\le -xy\le 30$

و منه فإن : $-30\le xy\le -6$.

5) – حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

a و x و y **أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة**

$x\le a\le y$ **يعني** $\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{a}\le\dfrac{1}{x}$

6) – حصر خارج قسمة عددين :

ملاحظة هامة : لحصر $\dfrac{a}{b}$ ، نكتب $\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين

*مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 7$ و $5\le y\le 9$ ؛ لنحصر $\dfrac{x}{y}$.

لدينا : $\frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{5}$ إذن : $3 \times \frac{1}{9} \le x \times \frac{1}{y} \le 7 \times \frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}}$

<u>* تمرين تطبيقي محوصل :</u>

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أحصر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

<u>الحـل :</u>

1) – حصر a^2 .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $\underline{36 \le a^2 \le 64}$

2) – حصر b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $\boxed{4 \le b^2 \le 16}$

3) – حصر $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$ و $-4 \times (-3) \le -4c \le -4 \times 5$ أي $12 \le -4c \le 20$

إذن : $6+(-8)+12 \le a+2b-4c \le 8+(-4)+20$ و منه فإن : $\boxed{10 \le a+2b-4c \le 24}$

4) – حصر $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$ أي $2 \le a+b \le 6$ و $\frac{1}{16} \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \le (a+b) \times \frac{1}{b^2} \le 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{1}{8} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{3}{2}}$

<u>أخطاء شائعة :</u>

1) $1 \le x \le 3 \not\Rightarrow -1 \le -x \le -3$ و الصواب هو $1 \le x \le 3 \Rightarrow -3 \le -x \le -1$

2) $x \le y \Rightarrow \cancel{x^2 \le y^2}$ مثال : -5<2 لكن 25>4 اصلح الخطأ باضافة الشروط

3) $\left.\begin{array}{l} a \le x \le b \\ a' \le x' \le b' \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{a-a' \le x-x' \le b-b'}$ اصلح الخطأ .

4) الاعداد a و b و a' و b' موجبة قطعا : $\left.\begin{array}{l} a \le x \le b \\ a' \le x' \le b' \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\dfrac{a}{a'} \le \dfrac{x}{x'} \le \dfrac{b}{b'}}$

5) $2 \le x \le 3 \not\Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{3}$ و الصواب هو $2 \le x \le 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{2}$

IV-المجالات :

نعتبر عددين حقيقيين a و b بحسث $a \le b$ لدينا :

مجال مغلق

$$\{x ; x \in \mathbb{R} ; a \le x \le b\} = [a;b]$$

مجال نصف مغلق

$$\{x ; x \in \mathbb{R} ; a \le x < b\} = [a;b[$$

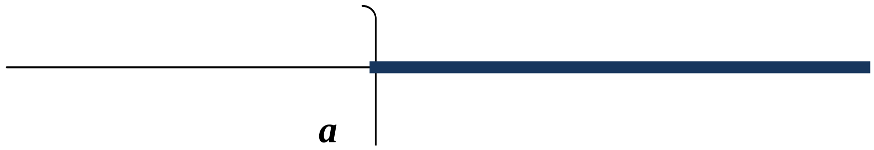
مجال مفتوح

$$\{x ; x \in \mathbb{R} ; a < x < b\} =]a;b[$$

نعتبر عدد حقيقي a لدينا :

1) $\{x ; x \in \mathbb{R} ; x \le a\} =]-\infty;a]$

2) $\{x ; x \in \mathbb{R} ; x > a\} =]a;+\infty[$



امثلة :

$$x\,;x\in\mathbb{R};-1\leq x\leq\sqrt{3}\;=\left[-1;\sqrt{3}\right]$$

$$\left\{x\,;x\in\mathbb{R};\frac{2}{7}\leq x\prec\sqrt{11}\right\}=\left[\frac{2}{7};\sqrt{11}\right[$$

$$x\,;x\in\mathbb{R};-5\prec x\prec\sqrt{3}\;=\left]-5;\sqrt{3}\right[$$

$$\left\{x\,;x\in\mathbb{R};x\prec\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$$

خطأ شائع :

$x\,;x\in\mathbb{R};5\prec x\prec-1\;=\;\cancel{5;-1}$ لكن $x\,;x\in\mathbb{R};5\prec x\prec-1\;=\varnothing$ والعلة هي :

$5\succ-1$

هام : $\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[\quad;\quad\mathbb{R}_{+}=\left[0;+\infty\right[\quad;\quad\mathbb{R}_{-}^{*}=\left]-\infty;0\right[$

حالات خاصة:

نعتبر عدد حقيقي a لدينا :

$$x\,;x\in\mathbb{R};|x|\leq a\;=\;-a;a$$

$$x\,;x\in\mathbb{R};|x|\succ a\;=\;-\infty;-a\;\cup\;a;+\infty$$

امثلة :

$$\left\{x\,;x\in\mathbb{R};|x|\leq\frac{2}{3}\right\}=\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$$

$$\left\{x\,;x\in\mathbb{R};|x|\geq\frac{2}{3}\right\}=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$$

تحذ يــر:

$$E = \{x ; x \in \mathbb{Z}; -4 \prec x \le 3\} = \cancel{]-4;\sqrt{3}]}$$

والصواب هو $E = \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ لان $x \in \mathbb{Z}$

II) المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحـد :

1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية ؛ $a \neq 0$

كل لا مساواة على شكـل : $ax + b > 0$ أو $ax + b \ge 0$ أو $ax + b < 0$ أو $ax + b \le 0$

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد x.

2) – أمثلـة :

العبارات : $2x+5<0$ و $\sqrt{2}.x-5>0$ و $\frac{1}{2}x-11\le 0$ و $3x+3\ge 0$

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

* / ملاحظة هامة : مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق متراجحة ما تسمى مجموعة حلول هذه المتراجحة وهي عادة في شكل مجـــــــــــــال.

3) – حـل متراجحة :

أ – حـل في المتراجحة : $3x+2<0$.

المتراجحة $3x+2<0$ تكافئ على التوالي :
$$3x < -2$$
$$x < \frac{-2}{3}$$

الأعداد الحقيقية الأصغر قطعا من $\frac{-2}{3}$ هي حلول المتراجحة $3x+2<0$ ومنه $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty;\frac{-2}{3}\right[$

ب – حـل المتراجحة : $-x+4\le 2x-2$.

المتراجحة $-x+4\le 2x-2$ تكافئ على التوالي :

$$\left.\begin{array}{l} -x-2x \le -2-4 \\ -3x \le -6 \\ x \ge \frac{-6}{-3} \\ x \ge 2 \end{array}\right\}$$

ومنه : $S_{\mathbb{R}}=[2;+\infty[$

الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 هي حـلول المتراجحة $-3x+4\le 2x-2$.

* / تمثيل الحـلول على مستقيم مدرج :

خطأ شائع :

لنحل المتراجحة $1-\frac{5x+4}{3}\le 2$ في $\mathbb{R}$: $1-\frac{5x+4}{3}\le 2$ يعني $\frac{3}{3}-\frac{5x+4}{3}\le\frac{6}{3}$ يعني

$3-5x\cancel{+}4\le 6$ والصواب هو $3-5x-4\le 6$ يعني $-5x\le 6-3+4$ يعني $-5x\le 7$

يعني $x\cancel{\le\frac{7}{-5}}$ والصواب هو $\underbrace{\left(\frac{-1}{5}\right)}_{\in\mathbb{R}_-}\times -5x \ge 7\times\underbrace{\left(\frac{-1}{5}\right)}_{\in\mathbb{R}_-}$ يعني $x\ge-\frac{7}{5}$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\left[-\frac{7}{5};+\infty\right[$

للتعرف على سلسلة الثبات في الرياضيات زوروا موقع السلسلة :

L’apothème