Nombres complexes (Feuille 1)

« **De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point déterminé par son abscisse x et son ordonnée y représente en même temps la quantité x + y i » - C.F. Gauss – 1811**

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) : mathématicien, physicien et astronome allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Jérôme Cardan (1501 – 1576) : Médecin, astrologue, ingénieur et mathématicien, il inventa un système pour transmettre la rotation d'un axe à un autre, encore appelée de nos jours « un cardan ». On lui attribue également quelques découvertes en physique, en chimie et en mathématiques. Entre autres, il fut le premier à introduire des idées générales à la théorie des équations algébriques. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré, publiée par en 1545, eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIX^{e} siècle.

Les nombres complexes sont aujourd'hui abondamment utilisés pour les simplifications d'écritures et de calculs qu'ils permettent, dans de très nombreux domaines ; pour décrire le fonctionnement d'oscillateurs électriques par exemple, en électricité, pour la compression des signaux, le traitement des images, des couleurs …

Résolution d'une équation du 3ème degré

Le mathématicien italien Giordano Cardano (Jérôme Cardan pour les Français) a publié au XVI^{e} siècle une méthode ayant pour but de résoudre les équations de la forme $x^3 = px + q$.
Raphaël Bombelli, un autre mathématicien italien a voulu utiliser cette méthode pour résoudre l'équation **(E)** : $x^3 = 15x + 4$.

On se propose d'étudier les calculs de Bombelli et de les confronter aux outils actuels.

1 Avec la méthode ce Cardan

a) On pose $x = a + b$. Démontrer que $a + b$ est solution de **(E)** si, et seulement si,

$$a^3 + b^3 + 3(a + b)(ab - 5) - 4 = 0$$

b) L'idée géniale de Cardan est alors d'imposer en plus la condition $ab = 5$.
Démontrer qu'alors les nombres $A = a^3$ et $B = b^3$ sont solutions du système :

$$\textbf{(S)} \begin{cases} A + B = 4 \\ A \times B = 125 \end{cases}$$

c) Résoudre ce système et expliquer l'écueil rencontré par Bombelli.

2 L'idée de Bombelli

Pour aller plus loin, Bombelli eut l'idée folle de faire comme si -121 avait une racine carrée qu'il osa noter $11\sqrt{-1}$!
Plus tard, au XVIII^{e} siècle, Euler nota $\sqrt{-1} = i$, autrement dit, le nouveau **nombre imaginaire** i vérifie $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

a) Expliquer pourquoi on peut déduire de la résolution du système **(S)** que :

$$A = 2 + 11i \quad \text{et} \quad B = 2 - 11i$$

b) Développer $(2 + i)^2$, puis $(2 + i)^3$. Faire de même avec $(2 - i)^2$ et $(2 - i)^3$.

c) En déduire a et b, puis une solution de l'équation **(E)**.

Feuille 2 **Exemples importants** :

1/ Soient $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

a/ Ecrire ces deux nombres complexes sous formes algébrique.

b/ Ecrire ces deux nombres complexes sous formes exponentielles.

c/ Déduisez-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2/ Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)

a/ Placer les points A et B d'affixes $Z_A = 2$ et $Z_B = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$; précisez la nature du triangle OAB.

b/ Déterminer l'affixe du point M milieu de [AB].

c/ Soit E le point d'affixe $Z_E = -2 - 2\sqrt{3}i$. Les points O, M et E sont ils alignés ?

Point d'Histoire

Abraham De MOIVRE (1667 – 1754) : Né en France à Vitry-le-François, il part pour Londres à 18 ans, lors de la révocation de l'Edit de Nantes(*) ,en octobre 1685. On le retrouve souvent dans les *coffee houses* où il résout, pour de modiques sommes, des problèmes avec une vivacité d'esprit surprenante. Il tombe par hasard sur un exemplaire du livre d'Isaac NEWTON, « Principia », le lit avec passion, devient un mathématicien reconnu pour son esprit aigu, rencontre Newton et devient son ami.

En 1697, il est admis à la Royal Society, puis aux académies de Paris et de Berlin, mais ses origines étrangères ne lui permettent pas de devenir professeur à l'Université. Malgré l'aide de Leibniz, il subsiste grâce aux cours particuliers.

A. de Moivre

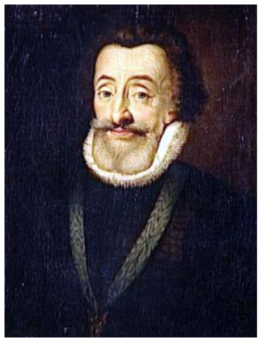
En analyse, outre la formule qui porte son nom, « $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ », on lui doit aussi la ***formule de Stierling***, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$.

Il recherche les ***racines n-ièmes d'un nombre complexe*** par module et argument.

C'est dans le **domaine des probabilités**, que l'apport de Moivre est le plus intéressant ; il y poursuit les travaux des Bernoulli (cf. chapitre sur le calcul intégral), établissant que « *la probabilité de la conjonction de deux événements indépendants est le produit de leurs probabilités* ». Il étudie la ***loi binomiale***, introduit la ***densité de probabilité*** de la forme *f(x)* = $k\,e^{-a\,x^2}$ (il démontre l'égalité : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).

On peut également le considérer comme un des précurseurs des ***mathématiques financières*** et de l'application des mathématiques aux ***études démographiques***.

En 1730, il donne une évaluation asymptotique de la loi de l'écart entre la probabilité *a priori* et celle a posteriori. On peut alors construire des modèles probabilistes de phénomènes expérimentaux ; pour Abraham de MOIVRE, l'existence de DIEU, *qui maintient d'une main ferme les fluctuations du hasard*, est établie !



Henri IV

Edit de Nantes : texte de tolérance, promulgué le 13 avril 1598 par Henri IV, roi de France, qui reconnaissait la liberté de culte aux protestants. Henri IV était lui-même un ancien protestant, et avait choisi de se convertir au catholicisme afin de pouvoir monter sur le trône ; La promulgation de cet édit mit fin aux guerres de religion qui ont ravagé le royaume de France au XVI^{e} siècle, celles-ci ayant provoqué l'émigration de 200 000 huguenots et constitua une amnistie mettant fin à la guerre civile.

Le 18 octobre 1685, à Fontainebleau, le roi Louis XIV, petit fils d'Henri IV le révoque (par ce nouvel édit, le *Roi-Soleil* signifie qu'il n'y a plus de religion autorisée en France en-dehors de la religion catholique), commettant ainsi la plus grande erreur de son règne, conduisant à un désastre politique, moral et économique.

Louis XIV