Esercizi sui piani
DiCoMat Lab - Università di Trento

Esercizio 1.

a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per il punto $A = (2, 0, 1)$ e perpendicolare alla retta $r : \ (x, y, z) = (2 + 2t, 1, t)$.
b) Determinare il punto di intersezione tra π e r.
c) Trovare un'equazione cartesiana del piano π' parallelo al piano π e passante per il punto $C = (0, 1, 2)$.

Soluzione:

a) La retta r ha equazione parametrica $r : \ (x, y, z) = (2, 1, 0) + (2, 0, 1)t$, quindi ha direzione $\mathbf{v}(2, 0, 1)$ e un piano ad essa perpendicolare ha equazione del tipo $2x + z = d$.

Imponendo il passaggio per A, o equivalentemente calcolando $A \cdot \mathbf{v}$, si ottiene $d = 5$. Infine il piano π cercato ha equazione cartesiana

$$\pi : \ 2x + z = 5$$

Un'equazione parametrica di π si può ottenere ponendo due variabili uguali a due parametri s e t

$$\pi : \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi : \ (x, y, z) = (t, s, 5 - 2t) = (0, 0, 5) + (1, 0, -2)t + (0, 1, 0)s \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che i due vettori $(1, 0, -2)$ e $(0, 1, 0)$ sono paralleli al piano π, ovvero ortogonali a $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, infatti $(1, 0, -2) \cdot \mathbf{v} = (0, 1, 0) \cdot \mathbf{v} = 0$. Il punto $A(0, 0, 5)$ è un punto di π (che si ottiene quando $s = t = 0$). Le due rette $r_1 : \ (x, y, z) = (0, 0, 5) + t(1, 0, -2)$ e $r_2 : \ (x, y, z) = (0, 0, 5) + s(0, 1, 0)$ sono due rette contenute in π.

b) Per trovare il punto di intersezione tra r e π basta mettere a sistema le equazioni ottenute, ovviamente tenendo per π l'equazione cartesiana:

$$r \cap \pi : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2(2 + 2t) + t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{5} \\ x = \frac{12}{5} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \pi \cap r = H = \left(\frac{12}{5}, 1, \frac{1}{5} \right)$$

Notiamo che il punto H è la proiezione ortogonale di A su r.

c) Un piano parallelo a π ha ancora equazione del tipo $2x + z = d$.

Imponendo il passaggio per C, o equivalentemente calcolando $C \cdot \mathbf{v}$, si ottiene $d = 2$. Infine il piano π' cercato ha equazione cartesiana

$$\pi' : \ 2x + z = 2$$

□

Esercizio 2. Determinare un'equazione della retta r passante per il punto $A(1, -4, -2)$ e perpendicolare al piano $\pi : \ x + y - 3z = 15$.

Soluzione:

Sappiamo che la direzione ortogonale a π può essere descritta dal vettore $\mathbf{v}_\perp(1, 1, -3)$. Di conseguenza le retta cercata, passante per A e di direzione $\mathbf{v}_\perp$ ha equazioni parametriche

$$r : \ (x, y, z) = A + t\mathbf{v}_\perp = (1, -4, -3) + t(1, 1, -3) = (1 + t, -4 + t, -3 - 3t) \quad \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Esercizio 3. Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: \ x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: \ 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.

b) Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.

Soluzione:
Calcoliamo un'equazione parametrica di $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} z-3=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x=-2-t \\ y=t \\ z=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r: \ (x,y,z)=(-2,0,3)+(-1,1,0)t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

a) Un modo per verificare se π_3 contiene r è di controllare se π_3 contiene due qualsiasi punti di r. Dall'equazione parametrica di r, assegnando per esempio i valori $t=0$ e $t=1$ otteniamo i punti $A(-2,0,3)$ e $B(-3,1,3)$ di r. Quindi π_3 contiene A e B se:

$$3\cdot(-2)+3\cdot 0-3+9=0 \qquad \text{e} \qquad 3\cdot(-3)+3\cdot 1-3+9=0$$

Siccome entrambe le condizioni sono verificate A e B, e di conseguenza r, sono contenuti in π_3.
In alternativa potevamo direttamente sostituire l'equazione parametrica di r in π_3:

$$3(-2-t)+3(t)-3+9=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$$

Poiché l'equazione è verificata per ogni valore di t, ogni punto di r, e di conseguenza tutta r, appartiene a π_3.

b) Un piano π_4 contenente r contiene i suoi due punti A e B. Si tratta quindi di trovare un'equazione del piano per A, B e l'origine.
Risolviamo l'esercizio in tre modi differenti.

(1) Poiché chiede l'equazione cartesiana la cosa più semplice è forse considerare la generica equazione cartesiana e imporre il passaggio per i tre punti:

$$ax+by+cz=d \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2a+3c=d \\ -3a+b+3c=d \\ d=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2}c \\ b=\frac{3}{2}c \\ d=0 \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di c. Ponendo $c=2$ otteniamo

$$\begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi_4: \ 3x+3y+2z=0$$

(2) In alternativa potevamo ricavare l'equazione parametrica e da questa ricavare l'equazione cartesiana. Poichè $A = A - O = (-2,0,3)$ e $B = B - O = (-3,1,3)$ sono due vettori paralleli a π_4, otteniamo l'equazione parametrica di π_4:

$$\pi_4: \ (x,y,z)=(0,0,0)+(-2,0,3)t+(-3,1,3)s \quad \pi_4: \begin{cases} x=-2t-3s \\ y=s \\ z=3t+3s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Eliminando i parametri s e t otteniamo

$$\begin{cases} s=y \\ x=-2t-3y \\ z=3t+3y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} s=y \\ t=\frac{-x-3y}{2} \\ z=3\,\frac{-x-3y}{2}+3y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi_4: \ 3x+3y+2z=0$$

(3) In alternativa ancora potevamo sfruttare il fatto che $A=(-2,0,3)$ e $B=(-3,1,3)$ sono due vettori paralleli a π_4 per cercare la direzione ortogonale ad entrambi e quindi anche a π_4. Per esempio tutti i vettori del tipo $\mathbf{v}(3,b,2)$ sono ortogonali ad A in quanto $A\cdot\mathbf{v}=0$. Imponendo l'ortogonalità tra B e $\mathbf{v}$ ottenaimo $-9+b+6=0$, quindi $b=3$. Infine la direzione ortogonale a π_4 può essere descritta da $\mathbf{v}=\mathbf{v}_\perp=(3,3,2)$ e π_4 ha equazione del tipo $3x+3y+2z=d$. Dal momento che passa per l'origine otteniamo $\pi_4: \ 3x+3y+2z=0$.

□

Esercizio 4. Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni

$$\begin{aligned} r_1 &: \ (x,y,z)=(3t+1,\ -t,\ 3t+1) \\ r_2 &: \ (x,y,z)=(s,\ 2,\ s) \\ r_3 &: \ (x,y,z)=(1,\ h,\ 1-h) \end{aligned}$$

a) Si determini un'equazione del piano π contenente le rette r_1 e r_2.
b) Si stabilisca se il piano π contiene r_3.
c) Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1,2,0)$ sul piano π e la distanza di P da π.
d) Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1,2,0)$ sulla retta r_3 e la distanza di P da r_3.

Soluzione:

a) Notiamo che

$$\begin{aligned} r_1 &: (x,y,z) = (3t+1,\ -t,\ 3t+1) = (1,0,1) + (3,-1,3)t \\ r_2 &: (x,y,z) = (s,\ 2,\ s) = (0,2,0) + (1,0,1)s \end{aligned}$$

quindi r_1 ha direzione $\mathbf{v_1}(3,-1,3)$ e r_2 ha direzione $\mathbf{v_2}(1,0,1)$. Di conseguenza le due rette non sono parallele in quanto i rispettivi vettori direzione non sono uno multiplo dell'altro. Le due rette sono comunque complanari in quanto si intersecano:

$$\begin{cases} 3t+1 = s \\ -t = 2 \\ 3t+1 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = A(-5,2,-5)$$

A questo punto possiamo direttamente scrivere un'equazione parametrica di π, in quanto le direzioni $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono parallele a π e il punto A è un punto di π. Quindi il piano cercato ha equazione parametrica:

$$\pi:\ (x,y,z) = (-5,2,-5) + (3,-1,3)t + (1,0,1)s \quad \Rightarrow \quad \pi: \begin{cases} x = -5+3t+s \\ y = 2-t \\ z = -5+3t+s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Eliminando i parametri otteniamo facilmente l'equazione cartesiana

$$\pi:\ x - z = 0$$

Il piano poteva essere cercato in più modi come nel precedente esercizio.

b) Un modo per verificare se π contiene r_3 è di controllare se π contiene due qualsiasi punti di r_3. Dall'equazione di r_3, ponendo per esempio $h=0$ o $h=1$, otteniamo i punti $B(1,0,1)$ e $C(1,1,0)$ di r_3. Quindi π contiene B e C se:

$$1-1=0 \qquad \text{e} \qquad 1-0=0$$

Il punto B appartiene quindi a π, ma il punto C è esterno a π e di conseguenza r_3 non è contenuta in π. Anche se non richiesto, abbiamo ottenuto che π e r_3 si intersecano in $B(1,0,1)$.

c) La proiezione ortogonale di P su π è il punto di intersezione tra π e la retta s per P ortogonale a π. Determiniamo quindi la retta s per P ortogonale a π. Dall'equazione cartesiana $x-z=0$ di π, sappiamo che la $\mathbf{v}_\perp(1,0,-1)$ è ortogonale a π. Di conseguenza s, che ha direzione $\mathbf{v}_\perp$ e passa per P, ha equazione

$$s:\ (x,y,z) = (1,2,0) + (1,0,-1)t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La proiezione ortogonale di P sul piano π è quindi il punto H di intersezione tra s e π:

$$H = \pi \cap s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = -t \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = -t \\ 1+t+t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $H\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$.

La distanza di P dal piano π è data dalla lunghezza del segmento PH:

$$d(P,\pi) = \overline{PH} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1,2,0)$ sulla retta r_3 è il punto di intersezione tra r_3 e il piano π' passante per P e ortogonale a r_3. Caloliamo quindi π'. Sappiamo che r_3 ha direzione $\mathbf{v_3}(0,1,-1)$, quindi π' ha equazione del tipo $y - z = d$. Imponendo il passaggio per P, o calcolando $\mathbf{v_3} \cdot P$, otteniamo

$$\pi':\ y - z = 2$$

Possiamo ora calcolare la proiezione k di P su r_3 intersecanto r_3 e π':

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = h \\ z = 1 - h \\ y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = h \\ z = 1 - h \\ h - 1 + h = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \\ h = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La proiezione di P su r_3 è quindi il punto $K\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Infine la distanza di P da r_3 è data dalla lunghezza del segmento PK:

$$d(P, r_3) = \overline{PK} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

Esercizio 5. Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

a) Mostrare che le due rette sono sghembe.
b) Determinare un'equazione del piano π contenente la retta r e parallelo alla retta s.

Soluzione:

a) Due rette del piano sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano.

Notiamo che

$$r: \ (x, y, z) = (1, 1, 3) + (1, -1, 0)t$$
$$s: \ (x, y, z) = (1, 0, -1) + (-1, 1, 2)s$$

La retta r ha direzione $\mathbf{v_r}(1, -1, 0)$ mentre s ha direzione $\mathbf{v_s}(-1, 1, 2)$. I due vettori hanno differente direzione quindi le due rette non sono parallele. Inoltre se calcoliamo $r \cap s$ otteniamo

$$r \cap s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ x = 1 - s \\ y = s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - s = 1 + t \\ s = 1 - t \\ -1 + 2s = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -t \\ s = -t + 1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Poiché le prime due equazioni si contraddicono il sistema non ammette soluzione, quindi le due rette non si intersecano.

Di conseguenza r e s sono sghembe.

b) Poiché π contiene r, deve essere parallelo a r e passare per un punto di r.

Ponendo $t = 0$ nell'equazione di r otteniamo il punto $A = (1, 1, 3)$ di r.

Abbiamo appena osservato che le due rette hanno rispettivamente direzione $\mathbf{v_r}(1, -1, 0)$ e $\mathbf{v_s}(-1, 1, 2)$ che sono quindi vettori paralleli a π. Di conseguenze un'equazione paramentrica di π è data da:

$$\pi: \ (x, y, z) = (1, 1, 3) + (1, -1, 0)t + (-1, 1, 2)s \quad \Rightarrow \quad \pi: \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = 3 + 2s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Per ottenere un'equzione cartesiana bisogna *risolvere* il sistema, eliminando i parametri s e t. In questo caso si ottiene facilmente l'equazione

$$\pi: \ x + y = 2$$

Notiamo che dall'equazione cartesiana vediamo che π è ortogonale a $\mathbf{v}_\perp(1, 1, 0)$ e si verifica facilmente che tale vettore è effettivamente ortogonale ai due vettori $\mathbf{v_r}(1, -1, 0)$ e $\mathbf{v_s}(-1, 1, 2)$, paralleli a π:

$$\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v_r} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0$$
$$\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v_s} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$$

□