FUNCIÓN AFÍN Y LA RECTA

Función afín es una función polinómica de **grado 1** que se puede escribir como **f(x) = m x + b** en la que **m ≠ 0** y **b ≠ 0** y su representación gráfica es una recta.

El coeficiente **m** es la **pendiente** de la recta y el término independiente **b** es la ordenada del origen, también conocido como **intercepto con el eje Y**.

El punto de intersección de la recta con el eje **Y** es **I_y**, cuyas coordenadas son **(0,b)**: **0** es la **abcisa** o primera componente del par ordenado (**0**,b), mientras que **b** es la **ordenada** o segunda componente del par ordenado (0,**b**).

Dominio de la función afín: El dominio de una función afín es el conjunto de los números reales: Todos y cada uno de los números reales tiene una sola imagen, es decir, la función está definida para todos los reales.

Rango de la función afín: El rango de una función afín es el conjunto de los números reales: Cada número real es imagen de un solo **x**.

En la figura 1 se muestra la gráfica de las **funciones afines f(x)** y **g(x)**. Se observa que cada una de las dos rectas intersecan al eje **Y** en una ordenada distinta de cero (b ≠ 0).

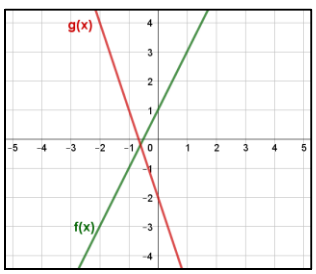

Fig. 1: Función Afín

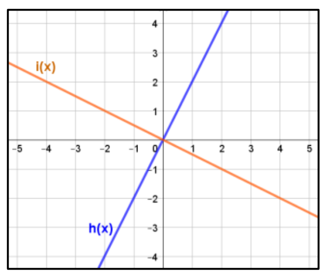

Fig. 2: Función Lineal

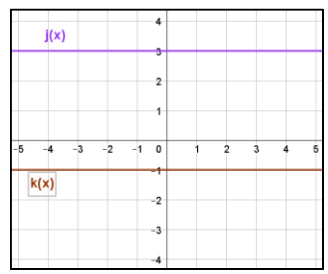

Fig. 3: Función Constante

Casos particulares de la función afín: Se presentan dos casos particulares.

1. Si **b = 0** se tiene la **Función Lineal** cuya expresión es **f(x) = m x**. También se llama **función de proporcionalidad directa.**
   En la figura 2 se muestra la gráfica de las funciones lineales **h(x)** e **i(x).** Obsérvese que las dos rectas son inclinadas y pasan por el origen (I_y = (0,0)).

Dominio de la función lineal: El dominio de una función lineal es el conjunto de los números reales: Todos y cada uno de los números reales tiene una sola imagen, es decir, la función está definida para todos los reales.

Rango de la función lineal: El rango de una función lineal es el conjunto de los números reales: Cada número real es imagen de un solo **x**.

2. Si **m = 0** se tiene la **Función Constante** cuya expresión es **f(x) = b**.
   En la figura 3 se muestra la gráfica de las funciones constantes **j(x)** y **k(x)**. Se observa que las dos rectas son horizontales.

Dominio de la función constante: El dominio de una función constante es el conjunto de los números reales: Todos y cada uno de los números reales tiene una sola imagen, es decir, la función está definida para todos los reales.

Rango de la función constante: El rango de una función constante **f(x) = b** es el número real **b**. Este número real es imagen de todos los **x**.

NOTA: *Para comprender mejor lo correspondiente a la función afín y la recta, se presentan las siguientes aplicaciones en geogebra. Las aplicaciones se complementan y/o se refuerzan unas con otras.*
(Sugerencia: Abra cada aplicación en una ventana nueva!).

Funciones 01- 0 - Función lineal - afín - constante: https://www.geogebra.org/m/aaUEq5U7
Funciones 01- 1 - Función lineal-afín dados dos puntos: https://www.geogebra.org/m/nb8pu3yV
Funciones 01- 2 - Función lineal-afín dada pendiente e intercepto Y:
https://www.geogebra.org/m/nmPbGKzJ
Funciones 01- 3 - Función lineal-afín dada ecuación general Ax+By+C = 0:
https://www.geogebra.org/m/CCPQjtDc
Funciones 01- 4 - Función lineal-afín dada pendiente y un punto:
https://www.geogebra.org/m/VM7ejWvd
Funciones 01- 5 - Función lineal-afín - rectas paralelas y perpendiculares:
https://www.geogebra.org/m/aTxaB8a6

1. Estudio de la pendiente de una recta:

Aplicación Funciones 01- 0 - Función lineal - afín - constante: https://www.geogebra.org/m/aaUEq5U7

Pendiente de una recta (m): Es el grado de inclinación de la recta con relación al eje X.

$$\boldsymbol{m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

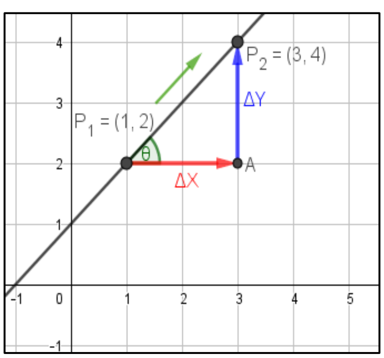

Fig. 4
Función Afín, m>0

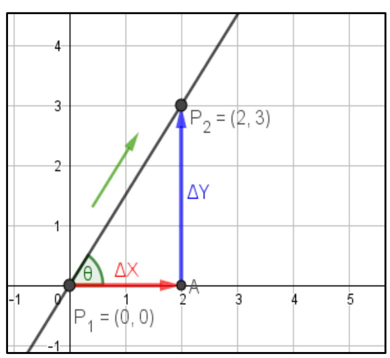

Fig. 5
Función Lineal, m>0

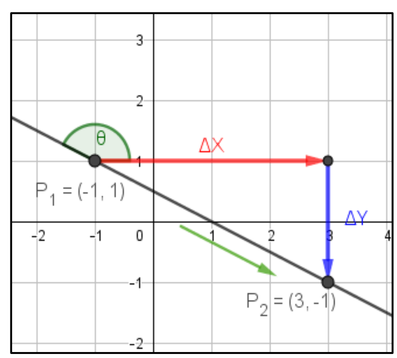

Fig. 6
Función Afín, m<0

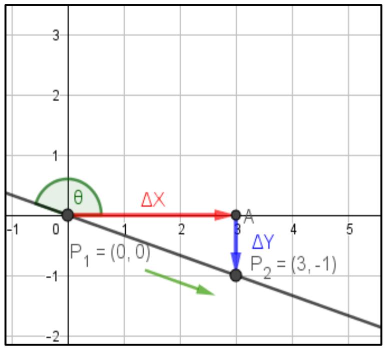

Fig. 7
Función Lineal, m<0

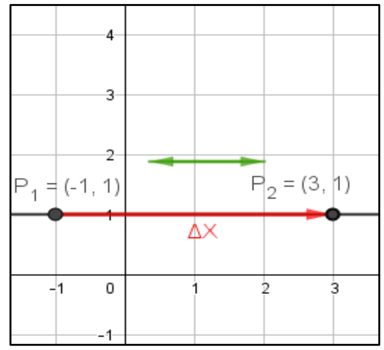

Fig. 8
Función Constante, m=0

ΔY es el desplazamiento vertical (eje Y) y **ΔX** es el desplazamiento horizontal (eje X). Cada uno de los dos desplazamientos pueden ser positivo (hacia arriba y hacia la derecha, respectivamente) o pueden ser negativos (hacia abajo y hacia la izquierda, respectivamente). **NOTA: El desplazamiento es un vector**.

Como el triángulo P_1AP_2 es un triángulo rectángulo se tiene que

$$\boldsymbol{m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \tan\theta}$$

- Si la pendiente es positiva (**m>0**), la recta es **ascendente** y el ángulo de inclinación **θ** con relación al semieje X positivo es **agudo**. Esto se muestra en la función afín de la figura 4 y en la función lineal de la figura 5.

- Si la pendiente es negativa (**m<0**), la recta es **descendente** y el ángulo de inclinación **θ** con relación al semieje X positivo es **obtuso**. Esto se muestra en la función afín de la figura 6 y en la función lineal de la figura 7.

- Si la pendiente es nula (**m = 0**), la recta es **horizontal** y el ángulo de inclinación **θ** con relación al semieje X positivo es **0°**. Esto se muestra en la función constante de la figura 8.

Observación: Si la pendiente de la recta no está definida, la recta es vertical y el ángulo de inclinación **θ** es de 90°. **En este caso la recta no es función**. Sólo es una relación y tiene por ecuación **x = K** , (constante).

2. Estudio de la recta conocidos dos puntos:

Aplicación Funciones 01- 1 - Función lineal-afín dados dos puntos: https://www.geogebra.org/m/nb8pu3yV

Se tienen dos puntos $\mathbf{P_1 = (x_1,y_1)}$ y $\mathbf{P_2 = (x_2,y_2)}$.

Pendiente m: $\boldsymbol{m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Vamos a desarrollar como ejercicio modelo el representado en la figura 6.

$\mathbf{P_1 = (-1,1)}$ $\mathbf{P_2 = (3,-1)}$

$\mathrm{m} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad$ $\mathrm{m} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{(-1)-(1)}{(3)-(-1)}$ $\quad$ $\mathrm{m} = \frac{-2}{4}$ $\quad$ $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$

Ángulo de inclinación θ: $\boldsymbol{m} = \tan \boldsymbol{\theta}$ por lo tanto $\boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}(\boldsymbol{m})$

$\theta = \tan^{-1}(m)$ $\quad$ $\theta = \tan^{-1}(-\frac{1}{2})$ $\quad$ $\boldsymbol{\theta = 153.43°}$

Intercepto con el eje Y: Se denota por **b** y corresponde a la ordenada del origen. Es decir que la recta corta al eje Y en el punto $\mathbf{I_y = (0,b)}$.

En la ecuación normal de la recta $\boldsymbol{y = mx + b}$ se tiene que $\boldsymbol{b = y - mx}$

Se toman las coordenadas de cualquiera de los dos puntos P_1 o P_2.
$P_1 = (-1,1)$ $\quad$ $\mathrm{m} = \frac{-1}{2}$

$\mathrm{b} = \mathrm{y} - \mathrm{mx}$ $\quad$ $\mathrm{b} = y_1 - \mathrm{m}x_1$ $\quad$ $\mathrm{b} = 1 - (-\frac{1}{2})(-1)$ $\quad$ $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

En consecuencia, la recta de la función afín de la figura 6 interseca al eje Y en el punto $\mathbf{I_y = (0, \frac{1}{2})}$.

Intercepto con el eje X: Se obtiene cuando la ordenada (**y**) es cero.

En la ecuación normal de la recta $\boldsymbol{y = mx + b}$ se tiene que $\boldsymbol{x = \frac{y-b}{m}}$
$\mathrm{y} = 0$ $\quad$ $\mathrm{x} = x_0$ $\quad$ $\mathrm{m} = \frac{-1}{2}$ $\quad$ $\mathrm{b} = \frac{1}{2}$
$x_0 = \frac{0-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_0 = 1}$ $\quad$ La recta interseca al eye Y en el punto $\mathbf{I_X = (1,0)}$.

Ecuación normal de la recta: $\boldsymbol{y = mx + b}$

$\mathrm{m} = \frac{-1}{2}$ $\quad$ $\mathrm{b} = \frac{1}{2}$ $\quad$ por lo tanto la ecuación es $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

Cálculo de la imagen de un x:
Como la recta de la figura 6 tiene por ecuación $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$ y es la representación gráfica de una función afín, la ecuación de la función se transforma en $\mathbf{f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

La imagen de un **x** en una función es la ordenada correspondiente a la **x** dada. Se obtiene evaluando la función para ese **x**.

La imagen de **2** en la función **f(x)** será: $\quad$ $\mathrm{f}(2) = -\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}$ $\quad$ $\mathrm{f}(2) = -\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}$ $\quad$ $\mathbf{f(2) = -\frac{1}{2}}$
En consecuencia, si $x = 2$ entonces $\mathrm{f}(2) = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto se obtiene el punto $(2, -\frac{1}{2})$.

Con este procedimiento se puede obtener cualquier punto de la recta. El subconjunto de puntos obtenidos se puede organizar en una tabla de doble entrada conocida como **tabla de valores** (la primera columna, identificada por ** es opcional).

**	Tabla de valores	
Punto	x	f(x)
P_1	-1	1
P_2	3	-1
I_y	0	1/2
I_x	1	0
P_3	2	- 1/2
P_4	4	-3/2

Se debe tener en cuenta que:

- Por ser función, cada **x** sólo puede tener una sola imagen **f(x).**
- Todos los puntos deben ser colineales porque pertencen a la misma recta.

3. Estudio de la recta conocida la pendiente y el intercepto con eje Y:

Aplicación Funciones 01- 2 - Función lineal-afín dada pendiente e intercepto Y: https://www.geogebra.org/m/nmPbGKzJ

En la figura 9 se muestra la recta correspondiente a una función afín. El intercepto con Y es **b = -1** y la pendiente **m = 2**.

Para hacer la gráfica (recta) se puede hacer de dos formas:

- Ubicar el punto de corte con el eje **Y** (Punto I_Y = (0,-1)) y dibujar la pendiente a partir del punto I_Y: Dibujar un triángulo rectángulo con el cateto base ΔX = 1 (horizontal y positiva, hacia la derecha) y el cateto altura ΔY = m = 2 (vertical y positiva, hacia arriba). Se obtendrá el punto P=(1,1) por donde pasará la recta.

- Obtener en primer lugar la ecuación de la función **f(x) = mx + b** y a partir de ella, calcular la imagen de un **x** cualquiera, ejemplo x = 2. La ecuación quedará **f(x) = 2x – 1** y la imagen de 2 será **f(2) = 3**. Por lo tanto la recta pasará por el punto P=(2,3).

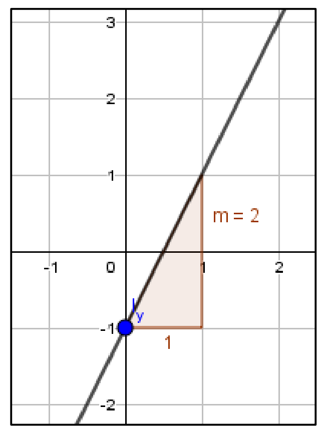

Fig. 9
Función afín:
Intercepto con *Y* y pendiente

Como ya se conocen dos puntos de la recta, se puede hacer lo que queda pendiente de los procedimientos indicados en los numerales **1** y **2** a saber: análisis de la recta y de la pendiente, intercepto con el eje **X** y obtener más puntos para la tabla de valores.

4. Estudio de la recta conocida la ecuación general Ax + By + C = 0:

Aplicación Funciones 01- 3 - Función lineal-afín dada ecuación general Ax+By+C = 0: https://www.geogebra.org/m/CCPQjtDc

En la figura 10 se muestra la recta a partir de la ecuación **– x + 2y - 2 = 0** correspondiente a la ecuación general de la recta **Ax + By + C = 0**, en la cual, **A = -1**, **B = 2** y **C = -2**.

Intercepto con el eje Y (b), **Pendiente (m)** y **ecuación normal**: La ecuación general **Ax + By + C = 0** se transforma a la ecuación normal **y = mx + b**:

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ al despejar **y**: $\boldsymbol{y = \frac{-A}{B}x + (\frac{-C}{B})}$

Comparando con la ecuación normal $y = mx + b$ se obtiene:

$m = \frac{-A}{B}$ $\quad$ $b = \frac{-C}{B}$

Por lo tanto: $m = \frac{-(-1)}{2}$ $\quad$ $m = \frac{1}{2}$

$b = \frac{-(-2)}{2}$ $\quad$ $b = 1$ La recta interseca al eje **Y** en I_y = (0,**1**).

La ecuación normal resultante es $y = \frac{1}{2}x + 1$

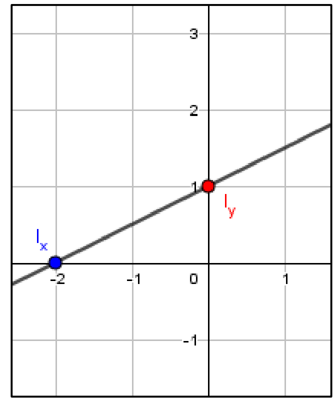

Fig. 10
Función afín: Interceptos a partir de Ax + By + C = 0

Intercepto con el eje X, (x_0): Como **y = 0**, al despejar la ecuación general se obtiene $x_0 = \frac{-C}{A}$

En consecuencia, $x_0 = \frac{-(-2)}{(-1)}$ $\quad$ $x_0 = -2$ La recta interseca al eje **X** en I_x = (**-2**,0).

5. Estudio de la recta conocida la pendiente y un punto:

Aplicación Funciones 01- 4 - Función lineal-afín dada pendiente y un punto:
https://www.geogebra.org/m/VM7ejWvd

La figura 11 muestra la recta a partir del punto **P_1 = (1,2)** y la pendiente **m = -3**

Ecuación normal de la recta: $y = mx + b$

$m = -3$ $\quad$ $P_1 = (x_1, y_1) = (1, 2)$ $\quad$ $x_1 = 1$ $\quad$ $y_1 = 2$

Como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ entonces $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

Si se hace $y_2 = y$ y $x_2 = x$ la ecuación anterior quedará

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Al remplazar: $y - 2 = (-3)(x - 1)$ por lo tanto $y = -3x + 5$

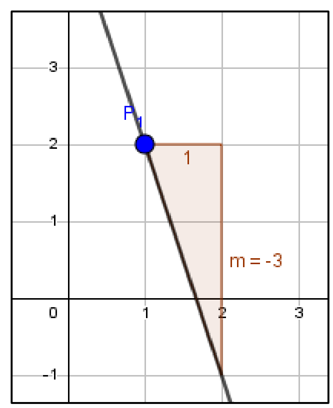

Fig. 11
Función afín con pendiente y un punto

6. Rectas paralelas y rectas perpendiculares:

Aplicación Funciones 01- 5 - Función lineal-afín - rectas paralelas y perpendiculares:
https://www.geogebra.org/m/aTxaB8a6

La figura 12 muestra la recta **R_2** que pasa por el punto **P** y es paralela a la recta **R_1**, la cual pasa por los puntos **A** y **B**. También se muestra la pendiente de cada recta:

$\boldsymbol{m_1 = 2} \qquad \boldsymbol{m_2 = 2}$

Dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente:

$$\boldsymbol{R_1 \parallel R_2 \quad \leftrightarrow \quad m_1 = m_2}$$

La figura 13 muestra la recta **R₃** que pasa por el punto **P** pero es perpendicular a la misma recta **R₁**. Igualmente se muestra la pendiente de cada recta:

$\boldsymbol{m_1 = 2} \qquad \boldsymbol{m_3 = -\frac{1}{2}}$

Dos rectas son perpendiculares si las pendientes de las dos son inversas (o recíprocas) y de signo contrario:

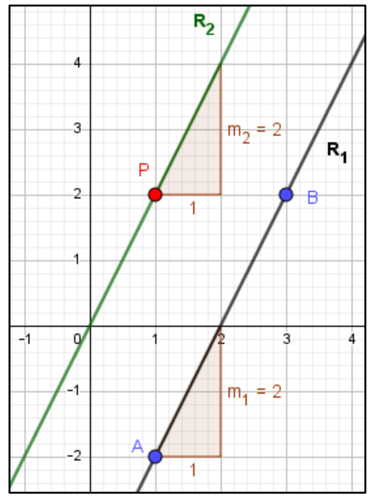

Fig. 12
Rectas paralelas

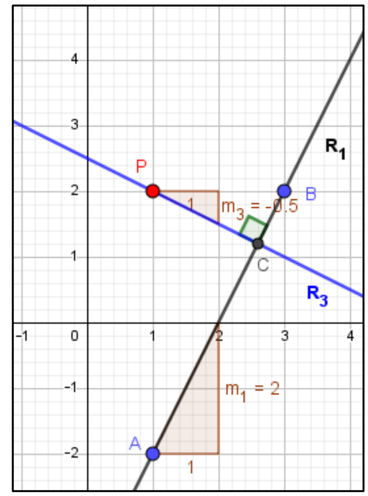

Fig. 13
Rectas perpendiculares

$$\boldsymbol{R_1 \perp R_2 \quad \leftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{R_1 \perp R_2 \quad \leftrightarrow \quad m_1 . m_2 = -1}$$