Esercizio 1. Determinare un'equazione parametrica e cartesiana delle rette seguenti del piano

(a) Passante per il punto $C(2,3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v_r} = (-1,2)$.
(b) Passante per i punti $A(1,2)$ e $B(-1,3)$.
(c) Di equazione Cartesiana $y = 2x+5$. Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Soluzione:

(a) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \ (x,y) = C + \mathbf{v_r}t = (2,3) + (-1,2)t \ \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana ottenendo un'equazione che leghi x e y, ovvero eliminando il parametro t:

$$\begin{cases} t = 2-x \\ y = 3+2(2-x) \end{cases} \qquad \Rightarrow \ 2x+y-7=0 \ \Rightarrow \ y = -2x+7$$

(b) La direzione della retta è $\mathbf{v_r} = B - A = (-2,1)$, quindi

$$r: \ (x,y) = A + v_r t = (1,2) + (-2,1)t \ \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana basta ricavare t come nel punto (a):

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1-2(y-2) \\ t = y-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \ x+2y-5=0 \ \Rightarrow \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

(c) La cosa più semplice è porre una variabile uguale al parametro t, ottenendo

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 5+2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ r: \ (x,y) = (0,5) + (1,2)t$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x,y) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \Rightarrow P(0,5).$$

Oppure assegnando il valore 1 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \Rightarrow Q(1,7).$$

□

Esercizio 2. Verificare che le equazioni $r_1: \ (1,-3) + (2,-2)t$ e $r_2: \ (3,-5) + (-1,1)s$ descrivono la stessa retta.

Soluzione:

La retta r_1 ha direzione $\mathbf{v_1}(2,-2)$ e la retta r_2 ha direzione $\mathbf{v_2} = (-1,1)$. Notiamo che i due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ hanno differente modulo e verso, ma stessa direzione (infatti $\mathbf{v_1} = -2\mathbf{v_2}$), quindi anche le rette r_1 e r_2 hanno la stessa direzione ovvero sono parallele. Ponendo $t = 0$ vediamo che la retta r_1 passa per il punto $A(1,-3)$, basta ora verificare che tale punto appartiene anche a r_2. Infatti il sistema

$$\begin{cases} 3-s = 1 \\ -5+s = -3 \end{cases}$$

ha soluzione $s = 2$, quindi A appartiene anche alla retta r_2. Infine r_1 e r_2 sono due rette parallele con il punto A in comune, ovvero sono coincidenti.

□