**Collège des Sœurs Du ROSAIRE**
**Cornet El Hamra**
**Examen semestriel Dec. 2017**
**Epreuve en : Mathématiques.**

*Classe :* SV

*Durée : 2 heures*

I- ( 4 pts)

*1 - Calculer les intégrales suivantes :*

a) $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

b) $J = \int_{-\pi}^{\pi} x\left(\cos x - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

*2) a- Calculer l'intégrale* $K = \int_0^{\pi} x\cos x \, dx$

*b- Déduire l'intégrale* $L = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x \, dx$

II- ( 4 pts)

1) Donner la forme exponentielle et la forme trigonométrique du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

a) $z = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2}{-1-i}$ b) $z = -2\left(cos\frac{\pi}{3} - i\ sin\frac{\pi}{3}\right)$ .

2) Sachant que arg (z) $= \frac{\pi}{12}$ , calculer $arg\left(\frac{2i}{\overline{z}^2}\right)$.

3) z et z' sont deux nombres complexes tels que $|z| = 2$ et $z' = 2z - \frac{1}{\overline{z}}$ .

Calculer $|z'|$.

*III- (3 pts)*

*On donne les points $A$ et $A'$ d'affixes respectives - 4 et 4 . M étant un point du plan d'affixe z ( M distinct de A ) . On considère le point M' d'affixe z' telle que* $z' = \frac{z-4}{z+4}$ .

1) *Écrire z' sous la forme algébrique dans le cas où* $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

2) *On pose* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$ *(x, y, x' et y' sont des réels).*
*Exprimer x' et y' en fonction de x et y .*

3) *On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 4 et on suppose que M décrit (C) privé de A et A' . Montrer que z' est imaginaire pur .*

*IV- (3 pts)*

*On donne les points A et B tels que* $z_A = 1$ *et* $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

*Soit (C) le cercle de centre A et de rayon* 1.

*1) a) Écrire* $z_B - z_A$ *sous la forme exponentielle.*

*b) Déterminer une mesure de l'angle* $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ .

*c) Montrer que le point B appartient au cercle (C).*

*2) À tout point M d'affixe z, non nul , on associe le point M' d'affixe*

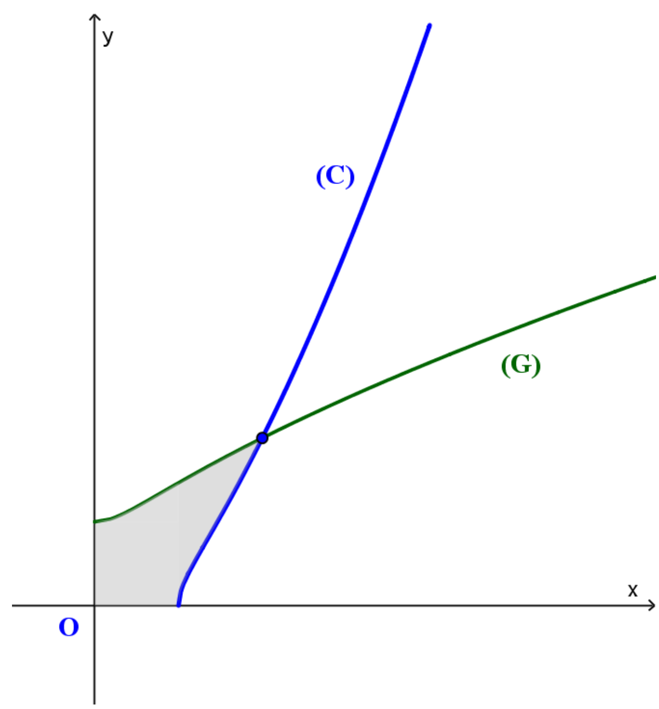
*z' tel que* $z' = \dfrac{\bar{z}+2}{\bar{z}}$ .

*a) Démontrer que* $\bar{z}(z' - 1) = 2$ .

*b) En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C) , M décrit un cercle (T) à déterminer.*

*V-(6 pts)*

*La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé* $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$*, de la fonction f définie dans* $[1\,; +\infty[$ *par* $f(x) = x\sqrt{x-1}$ .




*1) Trouver l'équation de la tangente à (C) au point A(2 ; 2) de (C).*

*2) Soit* $I = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx$ .

*Montrer que* $I = \dfrac{16}{15}$ .

*(on pourrait appliquer une intégration par parties) .*

*3) a- Montrer que f admet dans* $[1\,; +\infty[$ *une fonction réciproque g, indiquer le domaine de définition de g .*

*(La courbe (G) ci-haut est la courbe représentative de la fonction g)*

*b- Montrer que (C) et (G) se coupent en A.*

*4) Calculer l'aire du domaine limité par (C), (G), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées . (Le domaine hachuré)*