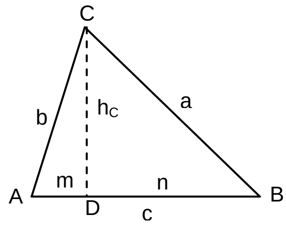
9. TEOREMA DEL COSENO

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido.

Es decir,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Demostración:



Sea m y n las proyecciones ortogonales de los lados b y a, respectivamente, sobre el lado a.

En el triángulo ADC se verifica:

(1) $b^2 = h_C^2 + m^2 = h_C^2 + (c-n)^2 = h_C^2 + c^2 + n^2 - 2nc$

En el triángulo DCB se verifica que $a^2 = n^2 + h_C^2$

Por tanto, sustituyendo en (1), queda:

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2nc$

También, se verifica que $n = a \cdot \cos A$

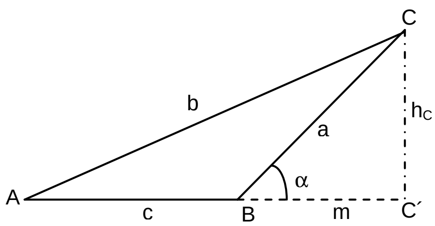
Sustituyendo en (2),obtenemos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos A$$

Las dos restantes igualdades se demuestran igual, considerando las proyecciones sobre los lados b y c.

IMPORTANTE: El teorema es válido para cualquier tipo de triángulo.

Sea el triángulo BAC obtusángulo en B.



Sea m la proyección ortogonal del lado b sobre c.

Se tiene:

(1) $b^2 = h_c^2 + (c+m)^2 = c^2 + 2mc + (m^2 + h_c^2)$

En el triángulo BCC´ se verifica que $a^2 = m^2 + h_C^2$

Por tanto, sustituyendo en (1), queda:

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2mc$

También, se verifica que $m = a \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos A$

($\alpha = 180º - A \rightarrow \cos A = \cos \alpha$)

Sustituyendo en (2),obtenemos:

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos A$

Para el caso particular que A = 90º obtendríamos el teorema de Pitágoras

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS:

1. *Resolver un triángulo conocido dos lados y el ángulo comprendido.*

Datos conocidos: a, b y C

- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$
- $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b}$
- $B = 180º - (A + C)$

En este caso siempre existe una única solución.

Al hallar el ángulo A, obtenemos dos ángulos: uno agudo y otro obtuso.

Como sabemos que a mayor ángulo se opone mayor lado, conociendo la medida de los tres lados, sólo es posible un único valor del ángulo A.

***Ejemplo*:**

Se conocen los siguientes datos de un triángulo: a = 10 cm, b = 7 cm, C = 70º. Resolver el triángulo.

Solución

Por el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \rightarrow c^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos 70º = 101{,}4 \rightarrow c = 10{,}07$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{10}{\operatorname{sen} A} = \frac{10{,}07}{\operatorname{sen} 70º} \rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 70º}{10{,}07} = 0{,}88 \rightarrow A = \operatorname{arc\,sen} 0{,}87 \rightarrow A = 61{,}64º \text{ ó } A = 118{,}36º$$

Como c > a, tiene que ser C > A , por tanto A = 61,64º

También se podía aplicar el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \cos A = \frac{7^2 + 10{,}7^2 - 10^2}{2 \cdot 7 \cdot 10{,}7} = 0{,}42$$

$A = \arccos 0{,}42 \rightarrow A = 64{,}92º$

Como $A + B + C = 180º \rightarrow B = 180º - (61{,}64º + 70º) = 48{,}36º$

2. *Resolver un triángulo conocido los tres lados.*

Datos conocidos: a, b y c

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow \operatorname{sen} B = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}$

  También se puede aplicar el teorema del coseno:

  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \rightarrow \cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ab}$
- C = 180º – (A + B)

En este caso la solución existe y es única siempre que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos lados.

Ejemplo 1

Se conocen los siguientes datos de un triángulo: a = 13 cm, b = 8 cm, c = 9 cm. Resolver el triángulo.

Solución

Por el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \rightarrow \cos A = \dfrac{8^2+9^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 9} = -0{,}17 \rightarrow A = \arccos(-0{,}17)$

A = 99,79º

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \rightarrow \cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ab} \rightarrow \cos B = \dfrac{13^2+9^2-8^2}{2\cdot 13\cdot 9} = 0{,}79 \rightarrow B = \arccos 0{,}79$

B = 37,81º

Como A + B + C = 180º → B = 180º – (99,79º + 37,81º) = 42,4º

Ejemplo 2

Los lados de un triángulo miden, respectivamente, 13 m, 14 m y 15m. Calcula el seno y el coseno del ángulo menor y la superficie del triángulo.

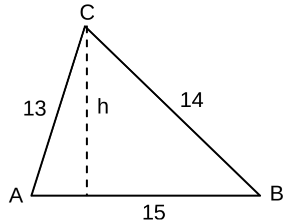
Solución:

Aplicando el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \rightarrow 13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot \cos A$

$\cos A = 0{,}6 = \dfrac{3}{5} \rightarrow \operatorname{sen} A = \dfrac{4}{5}$

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} AB \cdot h = \dfrac{1}{2} AB \cdot a \cdot \operatorname{sen} B = \dfrac{1}{2} 15 \cdot 14 \dfrac{4}{5} = 84 \text{ cm}^2$



3. Identificar el tipo de triángulo.

El teorema del coseno es un buen criterio para determinar el tipo de triángulo con el que trabajamos.

Es decir, según que el cuadrado del lado de un triángulo sea menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo será agudo, recto u obtuso.

***Ejemplos*:**

- Si los lados de un triángulo vienen dados por la terna (3,4,5) se trata de un triángulo rectángulo pues

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

- Si los lados vienen dado por la terna (3,5,7) se trata de un triángulo obtusángulo pues

$$3^2 + 5^2 = 34 < 7^2.$$

- Si la terna de los lados es (7,8,10) el triángulo es acutángulo pues

$$7^2 + 8^2 = 113 > 10^2$$