UNIDAD 10
CUERPOS GEOMÉTRICOS

Objetivo General.

Al terminar ésta unidad identificarás los diferentes tipos de Cuerpos Geométricos, resolverás ejercicios y problemas en los que apliques definiciones y fórmulas.

Objetivos específicos:

1. Recordarás la definición y clasificación de poliedros, así como el teorema de Euler.

2. Recordarás la clasificación de los paralelepípedos y prismas, también las fórmulas para calcular área y volumen.

3. Recordaras la definición y clasificación de pirámides, y las fórmulas para calcular altura, apotema, área y volumen.

4. Recordaras los cilindros, cómo calcular el área de la base, área lateral y volumen.

5. Recordaras los conos y cómo calcular su área lateral, área de la base y volumen.

6. Recordarás la esfera y cómo calcular su área y volumen.

Objetivo 1. Recordarás la definición y clasificación de poliedros, así como el teorema de Euler.

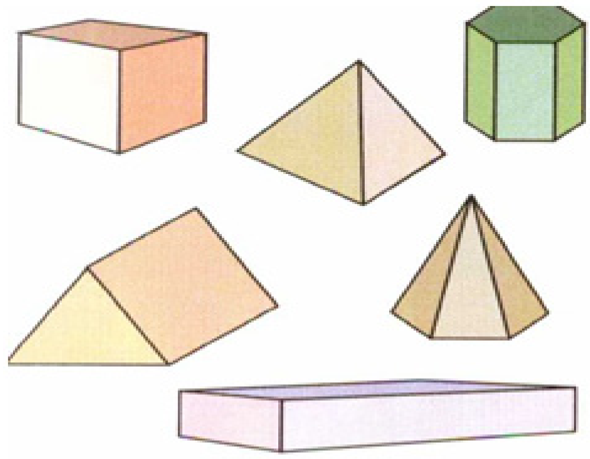
Definición:

Todo lo que ocupa algún lugar en el espacio, como una caja, una moneda, un libro, etc., se llama cuerpo. La extensión del lugar ocupado se denomina volumen del cuerpo.

Cuerpo Geométrico es toda porción limitada del espacio, esté o no ocupada por materia, pues, en los cuerpos geométricos sólo se atiende a la forma y se hace abstracción de la materia. Así, por ejemplo, un agujero en un cuerpo geométrico aunque esté vacío de la materia que lo rodea.

Poliedros:

Es un cuerpo o sólido geométrico limitado por planos.

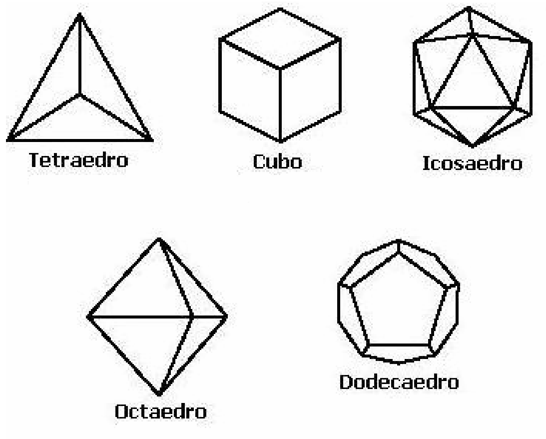


Clasificación de los poliedros según sus caras:

Se llama *tetraedro* el poliedro de cuatro caras, *exaedro* el de seis, etc.

Poliedros regulares:

Es aquel cuyas caras son polígonos regulares de un mismo número de lados y si en todo vértice del poliedro converge un mismo número de aristas.



TEOREMA DE EULER:

En todo poliedro el número de aristas más dos es igual al número de vértices más el número de caras. Es decir:

$$a + 2 = v + c$$

Donde:

a = número de aristas.

v = número de vértices.

c = número de caras.

Ejemplos:

Un poliedro tiene 4 caras y 4 vértices, ¿Cuántas aristas tiene?

a = v + c-2 a = 4+ 4-2 a=6

¿Una pirámide pentagonal regular es un poliedro regular? ¿Por qué?

R: No, porque no todas sus caras son polígonos regulares iguales.

¿Un romboedro es un poliedro regular? ¿Por qué?

R: No es un poliedro regular porque sus caras no son polígonos regulares.

En la tabla siguiente se dan algunos datos de poliedros convexos. Complétala usando el teorema de Euler.

Poliedros	**C**	**V**	**A**
1	4	**4**	6
2	**6**	8	12
3	5	6	**9**

.

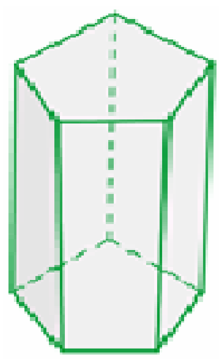
Objetivo 2. Recordarás la clasificación de los paralelepípedos y prismas, también las fórmulas para calcular área y volumen.

Prismas:

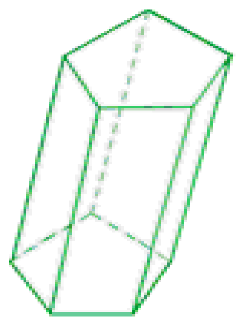
Es un poliedro que tiene 2 caras iguales y paralelas y las demás caras son paralelogramos.

Clasificación de los prismas:

Prisma recto u oblicuo según que sus aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a las bases. En el prisma recto, las aristas laterales son iguales a la altura, y en el prisma oblicuo son mayores que ella.



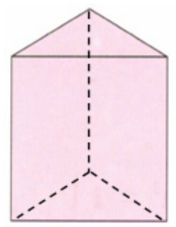
Prisma Recto



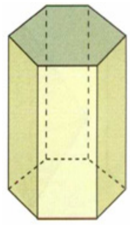
Prisma Oblicuo

Clasificación de los prismas según las bases:

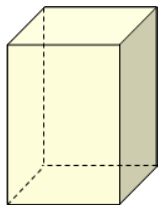
Dícese que un prisma es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. Según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono etc.



Prisma triangular



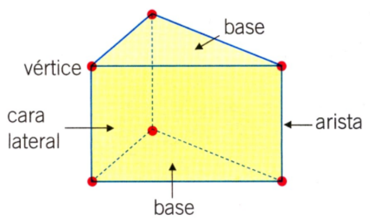
Prisma hexagonal



Prisma rectangular

Bases, caras y aristas laterales de un prisma:

Las caras iguales y paralelas se llaman bases y las demás se llaman caras laterales; las intersecciones de las caras laterales son las aristas laterales.



Área lateral de un prisma:

El área lateral es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de la sección recta.

$$AL = P \cdot h$$

Donde:

AL = Área Lateral

P = Perímetro

h = Altura

Área total de un prisma:

El área total es igual al área latera más la de las bases.

$$AT = AL + 2 \cdot Ab$$

Donde:

AT=Área Total

AL=Área Lateral

Ab=Área de la Base

Volumen de un prisma:

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la base por la altura.

$$V = Ab \cdot h$$

Donde:

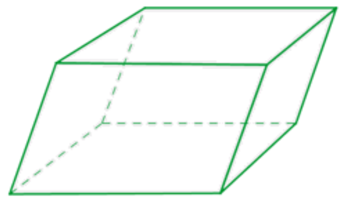
V=Volumen

Ab=Área de la base

h=Altura

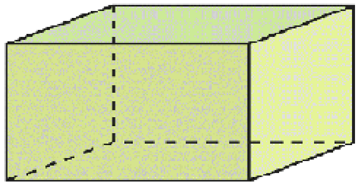
Paralelepípedos:

Es todo prisma en que las bases son paralelogramos.

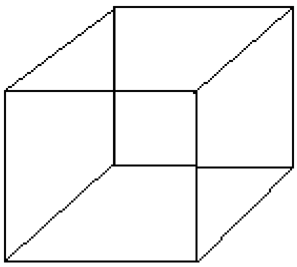


Clasificación de los paralelepípedos:

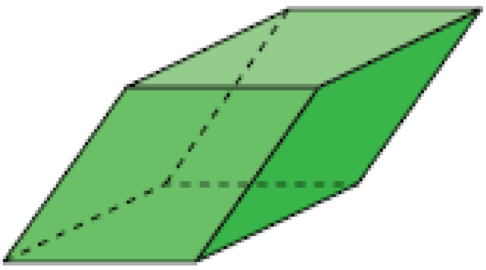
Paralelepípedo recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases; sus caras laterales son rectángulo.



Cubo es el paralelepípedo rectángulo cuyas seis caras son cuadradas; se llama también hexaedro regular.



Romboedro es el paralelepípedo cuyas seis caras son rombos.



Volumen de un paralelepípedo:

Es igual al producto de la base por la altura.

$$V = b \cdot h$$

Donde:
V=Volumen
b=Base
h=Altura

Ejemplos:

Hallar el área lateral de un prisma cuadrilátero regular recto, sabiendo que el lado de la base mide 6 cm. y su arista lateral 12 cm.

Datos	**Formula**	**Resultado**
Base=6cm	$AL = P \cdot h$	AL = 24 * 12
Arista lateral=12cm		AL = 288cm^2
Perímetro=4*6=24		

Un estanque en forma de prisma cuadrilátero recto, necesita ser llenado, se debe calcular su volumen para determinar la cantidad de agua, el área de su base es de 81 cm^2 y su altura es de 10 cm.

Datos	**Formula**	**Resultado**
Área de la Base=81 cm^2	$V = Ab \cdot h$	V = 81 * 10
Altura=10cm		V = 810cm^3

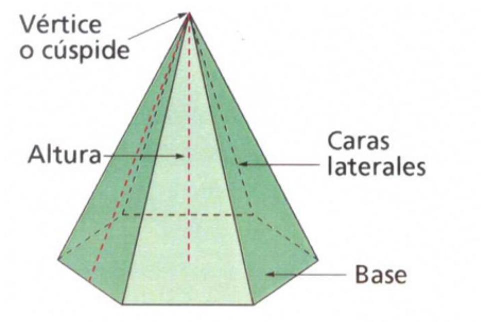
En un prisma triangular recto, hallar el área lateral teniendo en cuenta que cada lado de su base mide 5 cm., y que su altura es de l0 cm.

Datos	Formula	Resultado
Perímetro= 3*5=15	$AL = P \cdot h$	AL = 15 * 10
Altura=10cm		AL = 150cm^2

Objetivo 3. Recordarás la clasificación de las pirámides, también las fórmulas para calcular área y volumen.

Pirámide:

Es un poliedro en que una de las caras llamada base, es un polígono cualquiera y las otras caras son triángulos que tienen un vértice común.

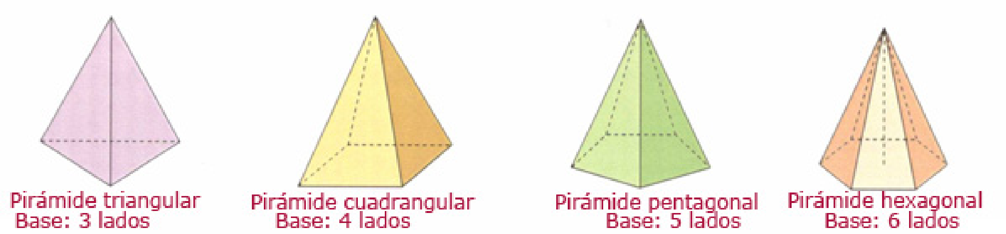


Pirámide regular:

Es aquella cuya base es un polígono regular y cuyo vértice se halla en perpendicularidad levantada al plano de la base en el centro de ese polígono.

Clasificación según su base:

Dícese que una pirámide es triangular, cuadrangular, etc., según que su base sea un triángulo, cuadrilátero, etc.



Área Lateral:

Es la suma de las áreas de sus caras.

$$AL = N \cdot \text{Área Triángulo}$$

Donde:

AL=Área lateral

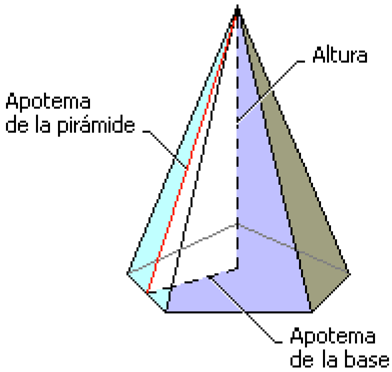
N = número de lados

Altura:

Se llama altura de una pirámide a la longitud de la perpendicular del vértice al plano de la base.

Apotema de una pirámide regular:

Es la altura de los triángulos que forman sus caras, tomando por bases de los triángulos los lados de la base de la pirámide.



Volumen:

El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto de la base por la altura.

$$V = \frac{A\ b \bullet h}{3}$$

Donde:

V = volumen

Ab =Área de la base

h = altura

Ejemplos:

Andrés y su hijo quieren construir una tienda de campaña con forma de pirámide cuadrangular. ¿Qué cantidad de lona tienen que comprar si la apotema de la pirámide es 3m y un lado de la base mide 2.5 m?

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
h = 3m	AL= N · Área Triángulo	AL=4*(7.5/2)
b = 2.5m	AT = AL+AB	AL=15
AB = (2.5*2.5)=6.25		AT=15+6.25
		AT=21.25

El comité de deportes del pueblo está construyendo una cancha de fútbol, pero necesita mover un montículo de forma piramidal de base rectangular que mide 30m de largo por 15m de ancho. Si la altura es 50m; ¿cuántos metros cúbicos de la tierra se tendrán que mover?

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
Base=30m	$V = \frac{A\ b \bullet h}{3}$	
$V = \frac{(30*15)*50}{3}$ Ancho=15m		$V=7500m^3$

Altura=50m

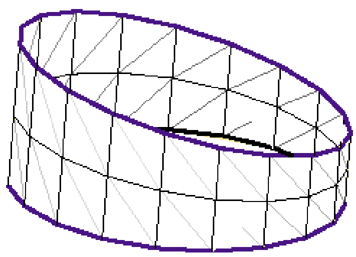
Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de lado l=3cm y una altura h=4cm ¿Cuál es su capacidad en litros?

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
b=3cm.	$V = \frac{A\ b \bullet h}{3}$	$V = \frac{(3*3)*4}{3}$
h=4cm		$V = 12cm^3$

Objetivo 4. Recordarás los cilindros y las fórmulas para calcular su área lateral, área de la base y volumen.

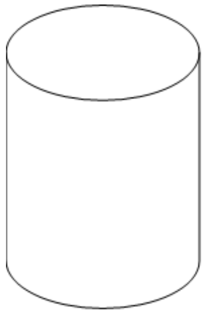
Definición:

Se le llama *superficie cilíndrica* a la que está generada por una recta que se mueve en el espacio permaneciendo siempre paralela a una recta fija, y recorre una curva también fija. La recta que se mueve se llama *generatriz*, y la curva fija, *directriz*.



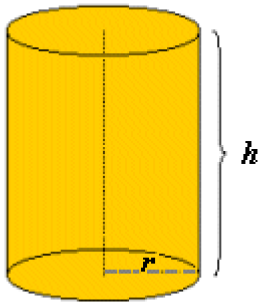
Cilindro:

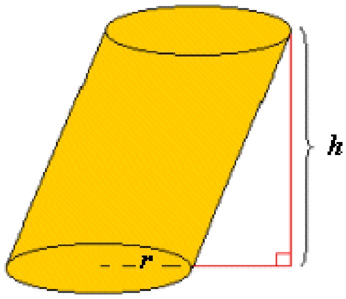
Es un sólido limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies planas paralelas.



Cilindros rectos u oblicuos:

Un cilindro es recto cuando su generatriz es perpendicular a las bases, de lo contrario es oblicuo.





Cilindro recto

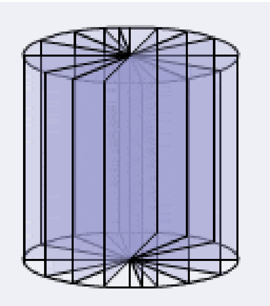
Cilindro oblicuo

Cilindro circular:

Es todo cilindro cuyas bases son círculos.

Cilindro de revolución:

Es aquel que está limitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos paralelos entre sí perpendiculares al eje. También se puede considerar cono generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.



Área lateral de un cilindro circular:

El área lateral de un cilindro circular es igual al producto de la generatriz por el perímetro de la sección recta.

$$A\,L = 2\,\pi \cdot r \cdot g$$

Donde:
AL=Área lateral
r=radio
g=longitud de la generatriz

Área lateral de un cilindro de revolución:

El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la altura del cilindro por la circunferencia de la base.

$$AL = 2\pi \bullet r \bullet g$$

Donde:
AL=Área lateral
r=radio
g=longitud de la generatriz

Área Total de un cilindro de revolución:

$$AT = 2\pi \bullet r \bullet h + 2\pi \bullet r^2$$

Volumen de un cilindro circular:

El volumen de un cilindro circular es igual al producto de la base por la altura.

Volumen de un cilindro de revolución:

El volumen de un cilindro de revolución de radio **r** y de generatriz **g** es:

$$V = \pi r^2 \bullet g$$

Ejemplos:

En un cilindro recto, la generatriz mide 12 cm. y el radio de la base 4 cm.
Hallar el área lateral.

Datos	Fórmula	Resultado
g=12cm.	$AL = 2\pi \bullet r \bullet g$	AL=2 π *4*12
r=4cm.		AL=301.5929 cm^2

En un cilindro recto, la generatriz mide 4m., y su radio es de 7 cm., hallar el área total.

Datos	Fórmula	Resultado
g=4m.	$AT = 2\pi \bullet r \bullet g + 2\pi \bullet r^2$	AT= (2 π *7*4)+(2 π *49)
r=7cm.		AT= 483.81 cm^2

Un vaso en forma de cilindro recto necesita ser llenado de agua, para saber cuanto liquido servir se debe saber el volumen de este, su generatriz es de 10 cm y el radio de la base es la mitad de la generatriz al cuadrado.

Datos	Fórmula	Resultado
g=10cm.	$V = \pi r^2 \bullet g$	V= (π *2500)*10
r= g^2/ 2=100/2=50cm		V=78539.8163cm^3

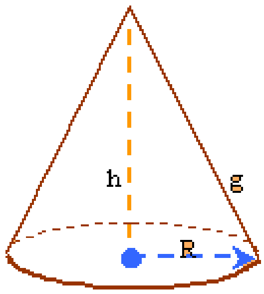
Objetivo 5. Recordarás los conos y las fórmulas para calcular su área lateral, área de la base y volumen.

Definición:

Llámase superficie cónica toda superficie engendrada por una recta que se mueve de tal modo que siempre corta una curva plana fija y pasa por un punto exterior al plano de esa curva. La curva fija se llama directriz; el punto fijo vértice.

Cono:

Es todo sólido limitado por una superficie cónica y por un plano que corta todas las generatrices. La superficie cónica se llama superficie lateral del cono, y su vértice, vértice del cono.



h= altura del cono

g=generatriz del cono

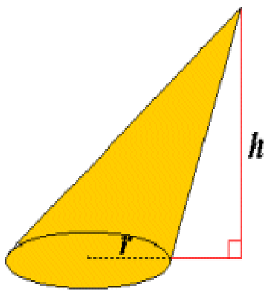
R=radio de la base

Cono circular:

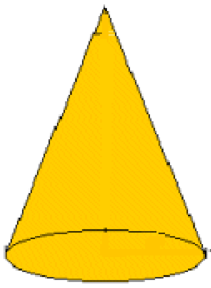
Es el cono que tiene un círculo por base.

Conos recto y oblicuo:

El cono recto es un cono circular cuyo eje es perpendicular al plano de la base; el cono oblicuo es el que no es recto.



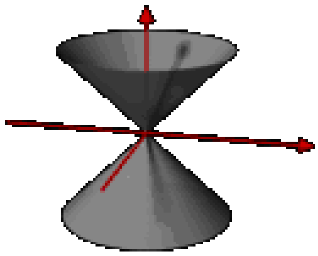
Cono Oblicuo



Cono Recto

Cono de revolución:

Es un cono circular recto, que puede suponerse engendrado por la rotación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sobre un cateto.



Área lateral de un cono de revolución:

El área lateral de un cono de revolución es igual a la mitad del producto del lado del cono por la circunferencia de la base.

$$AL = \frac{1}{2} C l$$

Donde:

AL=área lateral

l=lado

C=circunferencia

Volumen de un cono circular:

El volumen de un cono circular es igual a un tercio del producto de la base por la altura.

$$V = \frac{\pi \bullet r^2 \bullet h}{3}$$

Ejemplos:

Hallar el volumen de un cono recto cuya generatriz es de 5 cm. y radio de la base de 4cm.

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
g=5cm	$V = \frac{\pi \bullet r^2 \bullet h}{3}$	$V = \frac{(16\pi * 3)}{3}$
r=4cm.		V=50.26 cm^3
$h = \sqrt{(5^2 - 4^2)} = 3$		

Hallar el área lateral de un cono recto de 8 cm. de altura y 10 cm. de generatriz.

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
h=8cm.	$AL = \frac{1}{2} C l$	AL= $\frac{1}{2}(2\pi * 6) * 10$
g=10cm.		AL=188.4956 cm^2
$r=(10^2-8^2)^{1/2}=6$		

Hallar el área total del ejercicio anterior

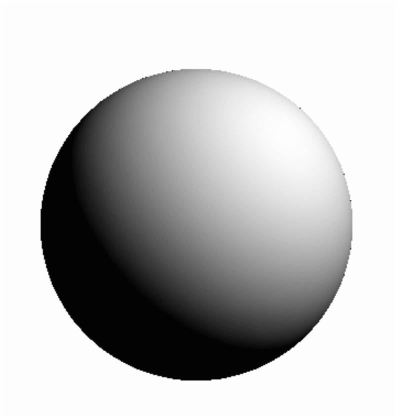
Datos	**Fórmulas**	**Resultado**
h=8cm.	$AB = \pi r^2$	AB=36π
g=10cm.	AT=AL+AB	AB=113.09cm^2
r=6cm.		AT=188.4956+113.0973

AL=188.4956 AT=301.5929 cm^2

Objetivo 6. Recordarás las esferas y las fórmulas para calcular su área y su volumen.

Esfera:

Es un sólido limitado por una superficie todos cuyos puntos equidistan de un punto interior, este punto se llama centro.



Área de una esfera:

El área de una esfera es igual al producto del diámetro por una circunferencia máxima.

$$A = 4\pi \bullet r^2$$

Donde:

A=Área

r=Radio

d=Diámetro

Volumen de una esfera:

El volumen de una esfera es igual a un tercio del producto del área por el radio.

$$V = \frac{4\pi \bullet r^3}{3}$$

Donde:

V=Volumen

S=Área

r=Radio

Ejemplos:

Hallar el área de una esfera de 6 cm. de radio.

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
r = 6cm.	$A = 4\pi \bullet r^2$	$A = 4\pi * 36$ $A = 452.3893\ cm^2$

Hallar el volumen de una esfera de radio 5 cm.

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
r = 5cm.	$V = \dfrac{4\pi \bullet r^3}{3}$	$V = \dfrac{(4\pi * 125)}{3}$ $V=523.5988\ cm^3$

Un balón de fútbol tiene un diámetro de 22 cm, hallar su área.

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
d = 22cm. r = 11cm.	$A = 4\pi \bullet r^2$	$A = 4\pi * 121$ $A = 1520.5308\ cm^2$