RECTIFICANDO LA CIRCUNFERENCIA MEDIANTE GEOGEBRA

A. Martín Dinnbier y G. Martín González

1. Introducción

De entre los muchos conceptos que se explican en los primeros años del itinerario académico de un estudiante de matemáticas, la relación entre la longitud de la circunferencia y el radio ocupa un lugar primordial. Esta relación no es trivial y durante siglos ha fascinado y capturado la imaginación de matemáticos y científicos, desde el antiguo Egipto hasta los modernos super ordenadores que miden su potencia de cálculo obteniendo decimales de π. Aunque Arquímedes ya aproximó el número π en su obra Medición del círculo (con otra notación distinta) fue Leonhard Euler el que en 1737 lo convirtió en la notación habitual que se usa hasta nuestros días. [1]. La realidad a la que se enfrentan diariamente los profesores de primaria y secundaria que se aventuran a acompañar a los estudiantes de matemáticas en su comprensión de esta relación es más bien compleja. No en vano, la comprensión de los misterios del número π ha llevado al ser humano miles de años y ahora las programaciones didácticas los relegan a cortos periodos de explicación en el aula.
En el proceso de comprensión de esta relación las herramientas digitales pueden ser un eficaz aliado. Entre las propuestas de software libre para la enseñanza de las matemáticas destaca la de Geogebra. La construcción de la animación que expone este artículo es un recurso de valor didáctico para facilitar la comprensión por parte de los alumnos de la relación entre la longitud de la circunferencia y su radio.

En 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann probó que π es un número trascendente. Esto significa que no es posible construir una ecuación polinómica con coeficientes racionales cuya solución sea el número π. La consecuencia más importante de esta imposibilidad es que uno de los tres problemas clásicos de la matemática griega, la cuadratura del círculo, es imposible. Es decir, no es posible, mediante regla y compás, construir un cuadrado de superficie equivalente a una circunferencia. Se puede cuadrar un círculo, pero no se puede cuadrar recurriendo al uso exclusivo de la regla y el compás.[2] De la imposibilidad de la cuadratura del círculo, se deduce la imposibilidad de rectificar la circunferencia, como vamos a ver a continuación: es decir, mediante regla y compás no se puede construir un segmento de longitud equivalente a la longitud de una circunferencia. La imposibilidad de resolver los otros dos problemas clásicos de la Matemática griega, la trisección del ángulo, y la duplicación del cubo, se deducen de otros procedimientos.

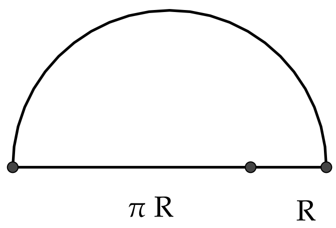
[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Pi
[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadratura_del_circulo

1.1. La cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia

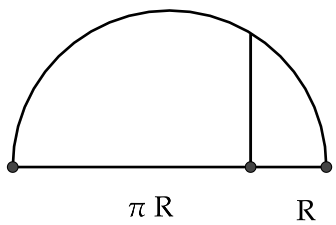
De la imposibilidad de la cuadratura del círculo se deduce la imposibilidad del rectificado de la circunferencia

Consideremos el siguiente proceso geométrico:

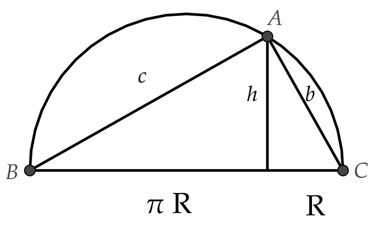
1. Construimos un segmento de longitud $\pi \cdot R + R$, y haciendo centro en su punto medio trazamos una semicircunferencia (se supone $R > 0$)



2. En el punto de unión de ambos segmentos levantamos una perpendicular, hasta que corte a la circunferencia



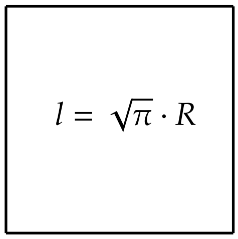
3. Formamos de esta forma un triángulo, que será rectángulo en A



   Como el segmento h, altura del triángulo, es media proporcional entre los segmentos que son proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (teorema de la altura), tendremos:

$$h^2 = \pi \cdot R \cdot R = \pi \cdot R^2 \Longrightarrow h = \sqrt{\pi} \cdot R$$

4. Si ahora construimos un cuadrado de lado $l = \sqrt{\pi} \cdot R$ tendremos



5. La superficie de este cuadrado será $S = (\sqrt{\pi} \cdot R)^2 = \pi \cdot R^2$. Es decir hemos construido un cuadrado de superficie equivalente a un círculo de radio R.

Da la impresión de que hemos conseguido la cuadratura del círculo. ¿Dónde está el problema? ¿Hemos usado únicamente la regla y compás en la construcción anterior? Lindemann no demostró que no fuera posible la cuadratura del círculo, sino que no es posible la cuadratura del círculo sólo con regla y compás. Si en la construcción anterior la obtención de un segmento de longitud $\pi \cdot R$ con regla y compás, fuera posible, entonces la cuadratura del círculo sería posible. Como sabemos que la cuadratura del círculo no es posible hemos de deducir que el rectificado de la circunferencia no es posible.

1.2. Rectificando la circunferencia mediante Geogebra

Geogebra se basa en la regla y el compás. Por tanto no es posible, mediante este programa resolver el problema de rectificar una circunferencia. Pero como vamos a ver, sí es posible obtener mediante Geogebra una aproximación suficientemente buena al rectificado de la circunferencia.

2. Explicación del problema y de sus elementos.

2.1. La animación final

El objetivo de este documento es la explicación del proceso de despliegue de una circunferencia hasta convertirse en un segmento situado en eje OX utilizando el software Geogebra. La animación final se puede encontrar en `https://www.geogebra.org/m/YZ5wBUDD` y está inspirada y toma la idea de una animación del instituto de Geogebra de HonkKong de Anthony C.M. OR que se puede encontrar aquí: `https://www.geogebra.org/m/fyqAUV22`.

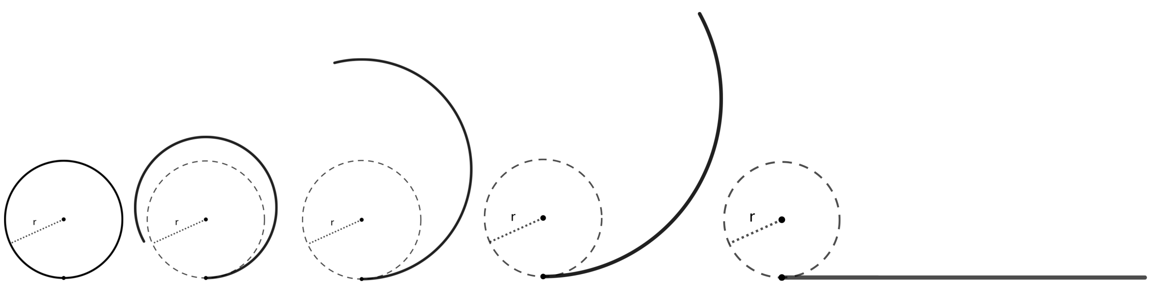


Figura 1: Animación

Para comprender la animación puedes visualizar el aspecto de la misma en la figura 1 en forma de secuencia

2.2. Definición de los elementos clave

Vamos a definir algunos puntos claves de la animación que aparecen representados en la figura 2

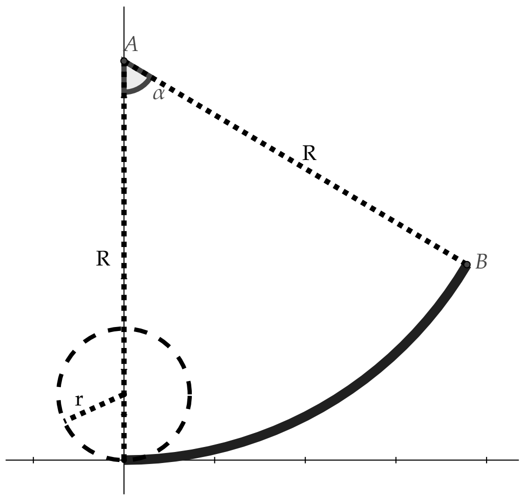


Figura 2: Elementos clave

1. r es el radio de la circunferencia cuya longitud vamos a desplegar como un segmento. Su longitud es la circunferencia que vamos a rectificar.
2. R es el radio del arco de circunferencia que origina la animación en cada paso de la misma. Se trata de un arco de longitud fija de una circunferencia de radio variable.
3. El punto A es el centro de la circunferencia de radio R, que se desplaza a lo largo del eje OX, en el sentido positivo.
4. El punto B es el extremo del arco de circunferencia que vamos a desplegar

3. Análisis de los elementos de la animación en profundidad

3.1. Punto A

Un deslizador en Geogebra es un control para modificar un valor numérico por el usuario. En este caso construiremos un deslizador para m que variará entre 0 y 1 y permitirá representar el punto A asociándole las coordenadas $(0, \frac{r}{1-m})$.
Como ya se ha dicho, el punto A se mueve por el *eje y* alejándose del origen de coordenadas sobre el semieje positivo a medida que la circunferencia se despliega. El punto se mueve desde el centro de la circunferencia a rectificar (coordenadas (0,r)) alejándose del origen a medida que se desplaza por el *eje y*, por lo que su primera coordenada siempre será cero, y además $r > 0$ y con tendencia a $+\infty$. Se puede observar que cuando el arco de circunferencia se haya desplegado por completo m tomará el valor 1 y por tanto el valor de la segunda

coordenada del punto A será indefinido dado que la hemos definido como $\frac{r}{1-m}$). En cualquier momento anterior a alcanzar la posición horizontal, el punto A se encontraría sobre semieje positivo de las y. Una forma de representar esta realidad es crear un deslizador en Geogebra al que llamaremos m.

$$A(0, \frac{r}{1-m})$$

Coordenadas del punto A

Observa que $\lim_{m \to 1^-} \frac{r}{1-m} = +\infty$ La función $f(x) = \frac{r}{1-m}$ crece con tendencia a $+\infty$ a medida que m se acerca a 1 por la izquierda. El deslizador m hará que el punto A se mueva en el *eje y* desde la coordenada (0,r) hasta (0,+∞)
El comportamiento del punto A se pueden comprender mejor en la figura 3

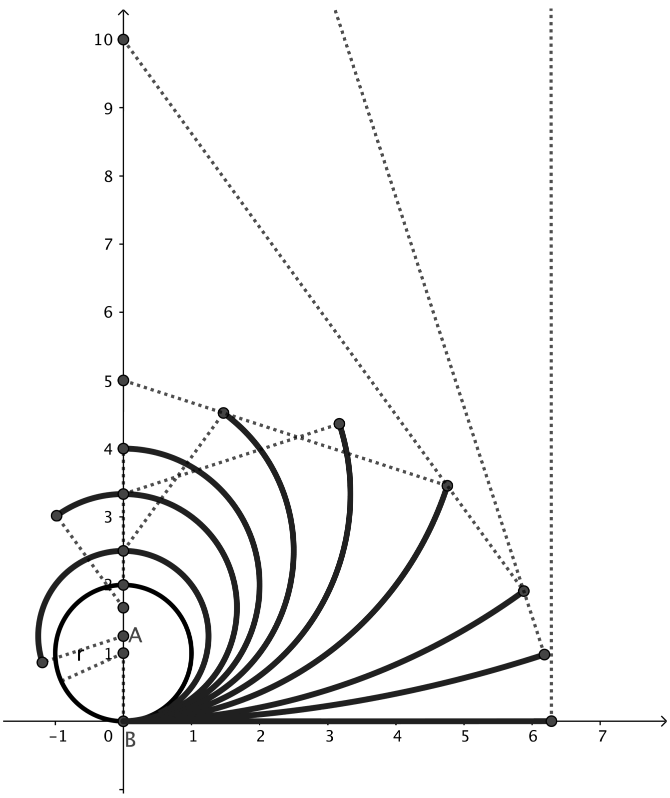


Figura 3: El punto A se desplaza continuamente desde (0,r) a lo largo del eje OY positivo.

3.2. Punto B

El punto B es el extremo del arco a rectificar: es la circunferencia a rectificar. Es decir el arco en el que se convierte la circunferencia a rectificar está limitado por el origen de coordenadas (0,0) y el punto $B(x_1, x_2)$

Las coordenadas del punto B se definen en la figura 4. En esta figura se puede observar el triángulo rectángulo ABC y el ángulo α cuyo seno es: $sin(\alpha) = \frac{x_1}{R}$. Teniendo en cuenta que $R - x_2$ es el valor del cateto contiguo a α en dicho triángulo, tenemos que $cos(\alpha) = \frac{R-x_2}{R}$

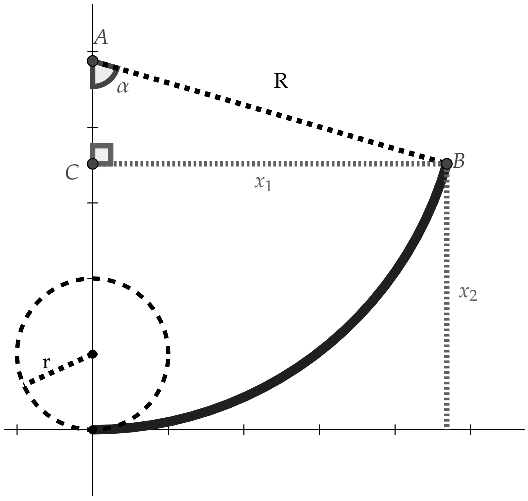


Figura 4: Coordenadas del punto B

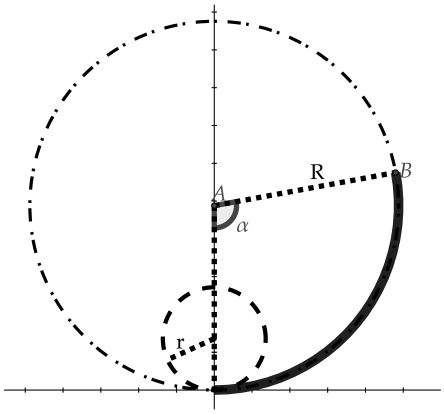


Figura 5: Relación de proporción entre radios

3.3. El ángulo α

En la figura 5 se observan la circunferencia inicial a rectificar de radio r, y el arco en que se convierte dinámicamente dicha circunferencia. Este arco es un arco de circunferencia de radio R, que tiene un extremo en el punto A, y el otro extremo en el punto (0,0). Puesto que los ángulos centrales son proporcionales a la longitud del arco correspondiente, tendremos (nótese que los ángulos se miden en radianes):

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2\pi r}{2\pi R}$$

Despejando de la expresión obtenemos que $\alpha = \frac{2\pi r}{R}$, medido en radianes. Recuerda que en su momento al hablar del punto A lo definimos con las coordenadas $(0, \frac{r}{1-m})$. Es decir, que el radio de la circunferencia mayor, con centro en A es $\frac{r}{1-m}$. Sustituyendo en la expresión anterior. $\alpha = \frac{2\pi r}{R} = \frac{2\pi r}{\frac{r}{1-m}} = 2\pi \cdot (1 - m)$.

Volviendo a las coordenadas del punto B:
La coordenada x_1 se puede calcular despejando de la expresión que nos daba el seno:

$$sin(\alpha) = \frac{x_1}{R} \Longrightarrow x_1 = sin(\alpha) \cdot R = sin(2\pi \cdot (1-m)) \cdot \frac{r}{1-m} = \frac{r \cdot sin(2\pi \cdot (1-m))}{1-m}$$

$$x_1 = \frac{r \cdot sin(2\pi \cdot (1-m))}{1-m}$$

La coordenada x_2 se puede calcular despejando de la expresión que nos daba el coseno:

$$cos(\alpha) = \frac{R - x_2}{R} \Longrightarrow x_2 = R - cos(\alpha) \cdot R = R \cdot (1 - cos(\alpha)) = \tfrac{r}{1-m} \cdot (1 - cos(2\pi \cdot (1-m)))$$

$$x_2 = \frac{r \cdot (1 - cos(2\pi \cdot (1-m)))}{1-m}$$

3.4. Demostración analítica de la relación entre la coordenada x_1 y la longitud de la circunferencia cuando $m \to 1^-$

Vamos a demostrar que cuando $m \to 1^-$ la coordenada x_1 se convierte en la longitud de la circunferencia. Recordemos que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = 1$ (x medido en radianes). En base a lo anterior, tendremos: (observa que si $m \to 1$ entonces $(1-m) \to 0$)

$$\lim_{m\to 1^-} \frac{r \cdot sin(2\pi \cdot (1-m))}{1-m} = \left[\frac{0}{0}\right] = 2\pi r \cdot \lim_{m\to 1^-} \frac{sin(2\pi \cdot (1-m))}{2\pi(1-m)} = 2\pi r$$

Y de la misma forma ocurre para $m \to 1^+$, por tanto:

$$\lim_{m\to 1} \frac{sin(2\pi r \cdot (1-m))}{1-m} = 2\pi r$$

Para el cálculo de este límite se puede también usar la regla de L'Hopital, pero entonces habría que suponer conocido el cálculo de derivadas

3.5. Para la coordenada x_2 también se debe demostrar que tiende a 0 cuando $m \to 1$ tanto por la derecha como por la izquierda. Esto implica que la circunferencia rectificada quedará sobre el eje OX

$$\lim_{m\to 1^-} \frac{r \cdot (1 - cos(2\pi \cdot (1-m)))}{1-m} = \left[\frac{0}{0}\right] = (^1) \lim_{m\to 1^-} \frac{r \cdot (2sin^2\left[\frac{2\pi\cdot(1-m)))}{2}\right]}{1-m} =$$
$$2 \cdot r \cdot \lim_{m\to 1^-} \frac{sin(\pi \cdot (1-m))}{1-m} \cdot \frac{sin(\pi \cdot (1-m))}{1} =$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{m\to 1^-} \frac{sin(\pi \cdot (1-m))}{\pi \cdot (1-m)} \cdot \frac{sin(\pi \cdot (1-m))}{1} = 2\pi \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

En donde en $(^1)$ se ha utilizado la identidad $1 - cos(x) = 2sin^2(\frac{x}{2})$
Se obtiene el mismo resultado para $m \to 1^-$, y en consecuencia

$$\lim_{m\to 1} \frac{r \cdot (1 - cos(2\pi r \cdot (1-m)))}{1-m} = 0$$

4. Consideraciones finales

Como el punto A no puede existir cuando $m = 1$ cabría por tanto preguntarse porqué cuando $m = 1$ el segmento se dibuja. La respuesta es que cuando $m = 1$ las coordenadas del punto A no están definidas y mediante código obligamos al programa a que dibuje un segmento de longitud (aproximada) $2\pi r$. Esto se puede hacer con las condiciones de visualización de los elementos en Geogebra. En la pestaña de propiedades disponemos de una subsección que se llama *avanzado*. En ella podemos incluir una condición para mostrar un objeto que en este caso será $m = 1$. En la animación añadimos además tres circunferencias completas y la parte proporcional de una tercera para mostrar la relación de forma gráfica.

5. Animaciones relacionadas

El trabajo previo aquí expuesto puede emplearse para la construcción de otras animaciones de cierto valor didáctico. La animación que se presenta a continuación puede facilitar la comprensión del cálculo del área de un circunferencia. El archivo de Geogebra se puede encontrar en el siguiente enlace `https://www.geogebra.org/m/BmdpMWez` y consiste dada una circunferencia de radio r en la construcción de un triángulo de igual superficie a ésta, cuya base es πr y cuya altura es r. La aclaración previa a la animación anterior sería necesaria también en este caso, dado que como ya se ha explicado la circunferencia no se puede rectificar con regla y compás.

La animación construida en este apartado emplea todo el análisis previo presente en este documento pero utiliza múltiples circunferencias concéntricas que se despliegan hasta formar segmentos horizontales. Cada circunferencia se ha partido en dos arcos de igual longitud tal y como se puede observar en la Figura 6.

La construcción en Geogebra se ha diseñado de modo que el número de circunferencias circunscritas se puede modificar con un control de nombre n, por tanto se puede realizar la misma animación pero incrementado el número de circunferencias, tal y como se observa en la figura 7.

En la figura 8 se observa el triángulo final con una altura igual al radio de la circunferencia y cuya base mide $2\pi r$ [3]. Por tanto su área se calcularía como:

$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

[3]Tal y como se ha explicado repetidas veces, en realidad la base no mide $2\pi r$ dado que la circunferencia no se puede rectificar con regla y compás.

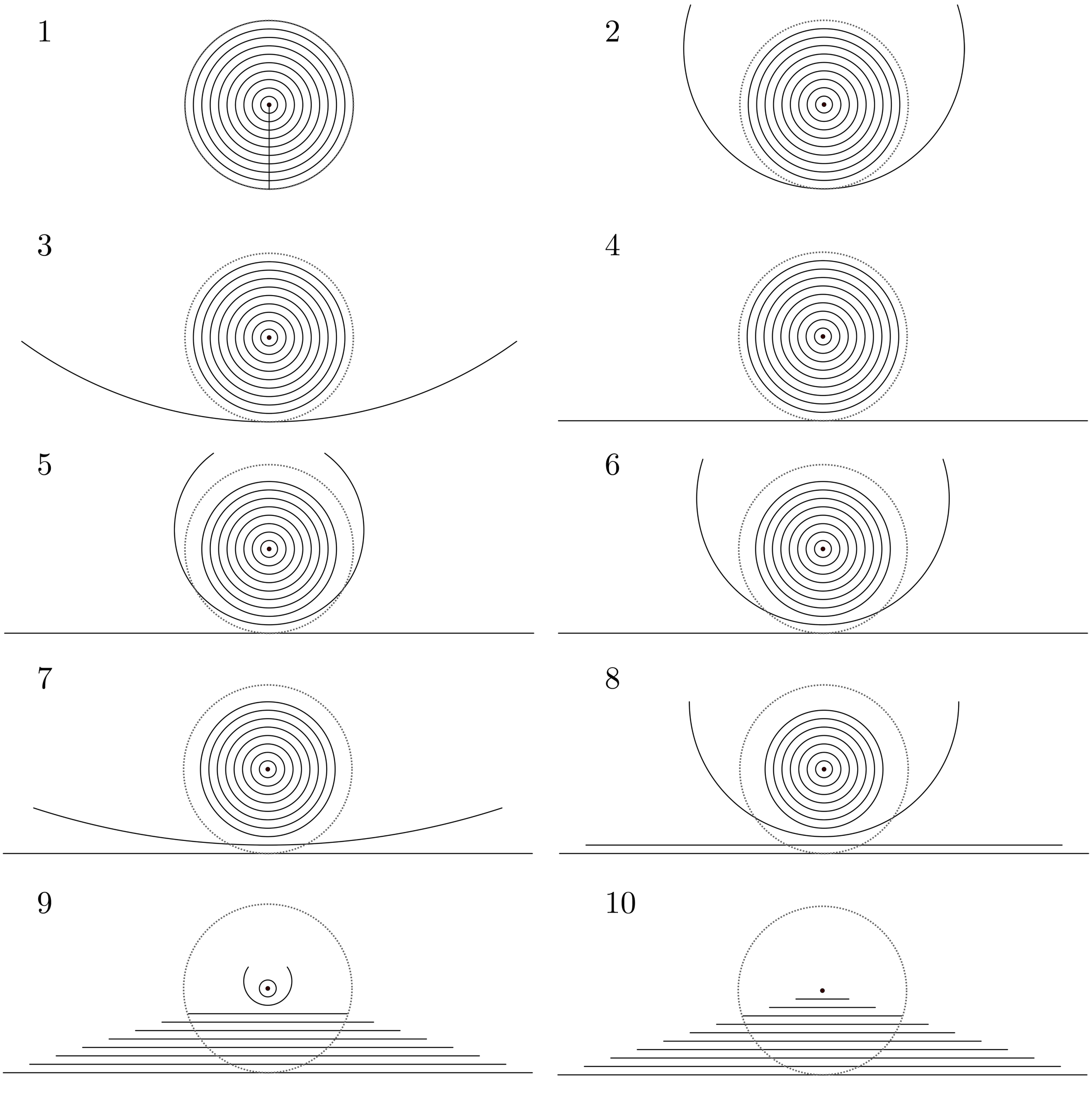


Figura 6: Animación relacionada

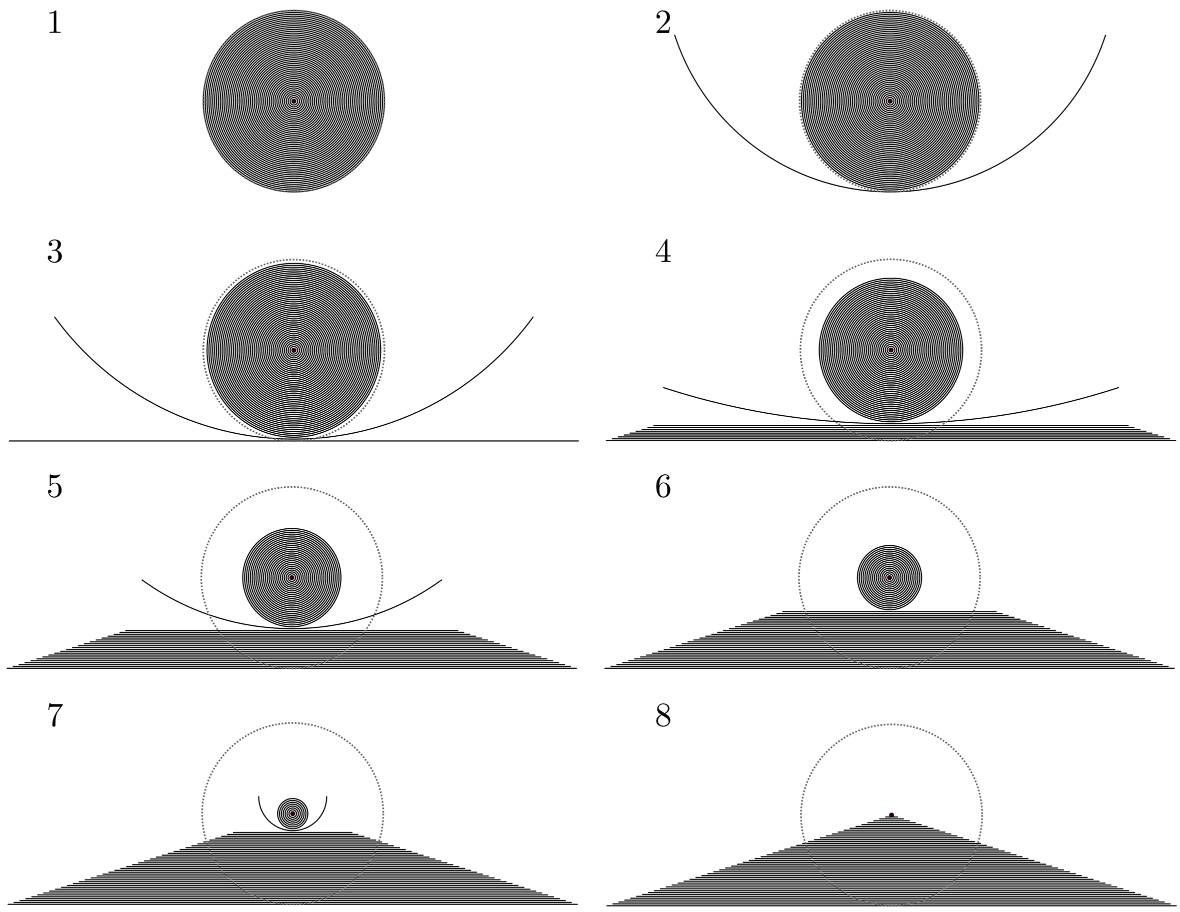


Figura 7: Animación aumentando el número de circunferencias

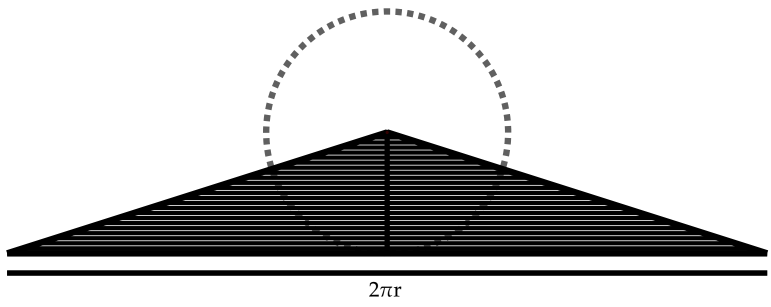


Figura 8: Área del triángulo resultante