1.-ÁREA BAJO UNA CURVA.

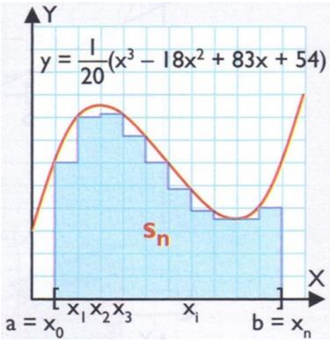
Dada una función $f(x)$ **CONTINUA** en $[a,b]$ y **POSITIVA**, se puede hacer una aproximación del área comprendida entre el eje X y la gráfica de la función en el intervalo $[a,b]$ del siguiente modo:

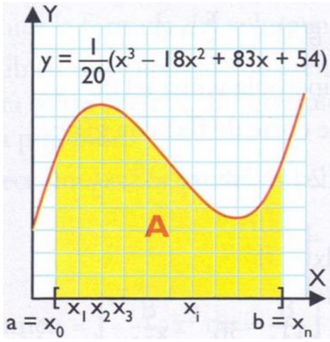
a) Se divide el intervalo $[a,b]$ en $\boldsymbol{n}$ partes iguales: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

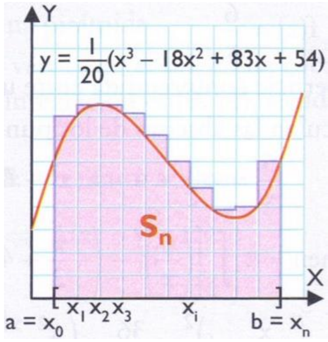
b) La función $f(x)$ es continua en los intervalos $[x_i,x_{i+1}]$, ya que lo es en $[a,b]$. Por el teorema de Weierstrass, se puede garantizar que la función alcanza un valor máximo, $\boldsymbol{M_i}$, y un valor mínimo, $\boldsymbol{m_i}$, en cada intervalo $[x_i,x_{i+1}]$.

c) Se dibujan los **rectángulos inferiores** de base $x_{i+1}-x_i$ y de altura m_i.

d) Se dibujan los **rectángulos superiores** de base $x_{i+1}-x_i$ y de altura M_i.







e) Se suma el área de los rectángulos inferiores y se obtiene una aproximación del área por defecto.

<u>Área por defecto</u>$=(x_1-x_0)m_1+(x_2-x_1)m_2+(x_3-x_2)m_3+\ldots+(x_n-x_{n-1})m_n$

[Se llaman **sumas inferiores** a las distintas aproximaciones del área por defecto que se puede calcular del recinto según el número de intervalos que se tomen. Se representa por: $s_n=\sum_{i=0}^{n} m_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$]

f) Se suma el área de los rectángulos superiores y se obtiene una aproximación del área por exceso.

<u>Área por exceso</u>$=(x_1-x_0)M_1+(x_2-x_1)M_2+(x_3-x_2)M_3+\ldots+(x_n-x_{n-1})M_n$

[Se llaman **sumas superiores** a las distintas aproximaciones del área por exceso que se puede calcular del recinto según el número de intervalos que se tomen. Se representa por: $S_n=\sum_{i=0}^{n} M_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$]

Las sumas inferiores y superiores dependen de $\boldsymbol{n}$, es decir, del número de intervalos que se tomen en $[a,b]$, y se tiene entonces que:

g) Las sumas inferiores son una sucesión $s_1,s_2,s_3,\ldots,s_n\ldots$, que corresponderán a las distintas divisiones que se hagan del intervalo $[a,b]$.

h) Las sumas superiores son una sucesión $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n\ldots$, que corresponderán a las distintas divisiones que se hagan del intervalo $[a,b]$.

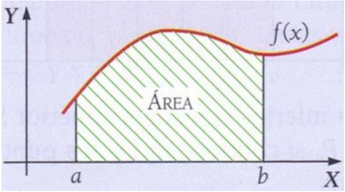
Se puede asegurar que el área del recinto está comprendida entre estas dos aproximaciones.

$$s_n=\sum_{i=0}^{n} m_{i+1}(x_{i+1}-x_i) \quad \leq \quad \text{Área del recinto} \quad \leq \quad S_n=\sum_{i=0}^{n} M_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$$

Si se hacen cada vez más intervalos en $[a,b]$, es decir, que $n\to\infty$, entonces los valores de m_i y M_i de cada intervalo se aproximarán: $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0$. Y entonces tendremos que el área será: $\boxed{\textbf{Área}=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_n}$

2.-INTEGRAL DEFINIDA. (Interpretación geométrica de la integral definida)

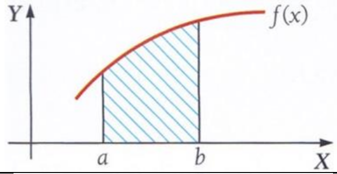
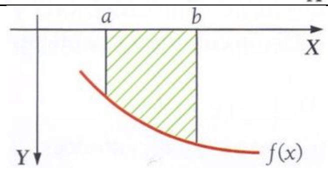
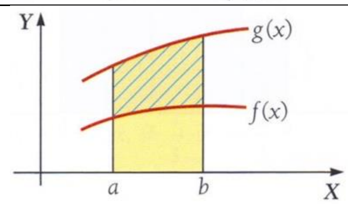
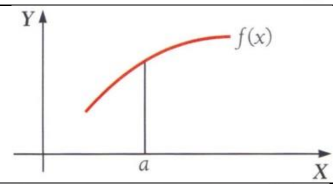
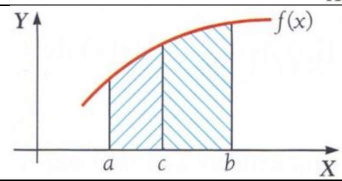
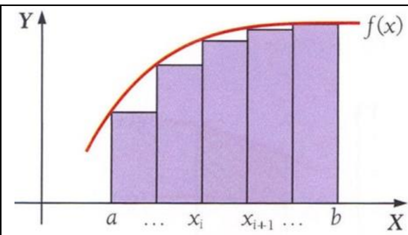
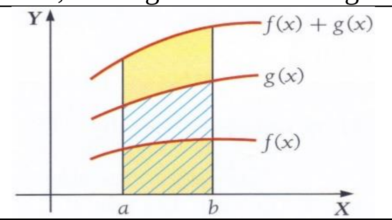
Sea $f(x)$ una función **CONTINUA** y **POSITIVA** en el intervalo $[a,b]$.



Llamamos $\int_a^b f(x)\,dx$, y lo leemos como **integral definida** entre a y b de $f(x)$, al valor del área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. Por tanto: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$

Al número a se le llama límite inferior de integración; al número b, límite superior de integración, y al intervalo $[a,b]$, intervalo de integración.

3.-PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Monotonía respecto el integrando	*1.*	Si $f(x)\geq \mathbf{0}$ y es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$		
	2.	Si $f(x)\leq \mathbf{0}$ y es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$		
	3.	Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$ que cumplen que para cualquier $x\in[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$		
Aditividad respecto el intervalo de integración	*3.*	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$		
	4.	Si c es un punto del intervalo $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$		
	5.	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$		Los factores $(x_{i+1}-x_i)$ que consideramos para calcular las sumas superiores e inferiores pasan a ser $(x_i - x_{i+1})$, al intercambiar los límites de integración; por tanto, la integral cambia de signo.
Linealidad respecto el integrando	*6.*	Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$, se cumple que: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$		
	7.	$\int_a^b k\, f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$		
	8.	Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$, entonces: $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$		

4.- TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL.

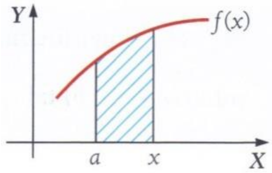
Sea $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, entonces $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

5.-TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Dada una función f continua en $[a,b]$, para cualquier punto $x \in [a,b]$ definimos la función:

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \quad \to F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Considerando x como una variable, obtenemos una función que llamamos **función integral**, o **función área**, y la designamos por $F(x)$.

Teorema fundamental del cálculo integral:

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, y consideramos la función integral: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ con $x \in [a,b]$; entonces F es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para cualquier punto $x \in (a,b)$.

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $\int_0^x (sen\ t\ +\ e^t)dt$

6.-REGLA DE BARROW.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, y $F(x)$ es **UNA** primitiva de $f(x)$, entonces: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} \boxed{= F(b) - F(a)}$

La regla de Barrow me permite calcular áreas delimitadas por curvas de una forma rápida y cómoda relaciona el concepto de integral definida con el de primitiva. El tema anterior lo hemos dedicado al cálculo de primitivas.

Ejemplos:

a) $\int_1^2 (x^2 - 2)dx =$

b) $\int_1^5 (-2x^2 + x - 1)dx =$

c) $\int_1^e \frac{1}{2x}\,dx =$

d) $\int_0^\pi -5\,sen\,x\ \ dx =$

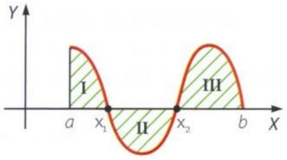
e) $\int_{-4}^4 |x|\,dx =$

f) $\int_1^4 (x^2 - 2x - 3)dx =$

g) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)} =$ (Selectividad Junio 2008)

7.-CÁLCULO DE ÁREAS.

7.1.-Área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.



Para calcular el área comprendida entre la gráfica de una función $f(x)$ y el eje X en un intervalo en el que la gráfica aparece por encima y por debajo del eje X, es necesario hallar cada una de las áreas por separado. Si la gráfica está por debajo del eje X, la integral será negativa; para evitar esto, tomaremos el valor absoluto en toda la integral.

Área = Área I + Área II + Área III =

$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{b} f(x)\,dx\right| = |F(x_1)-F(a)| + |F(x_2)-F(x_1)| + |F(b)-F(x_2)|$$

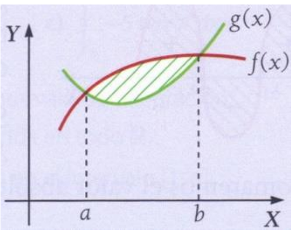
[¡CUIDADO! Si calculamos $\int_a^b f(x)\,dx$, el resultado que obtendríamos es: $\int_a^b f(x)\,dx =$ Área I – Área II + Área III**]**

Ejemplos:

- Calcula el área del recinto limitado por el eje X y la función $f(x)=x^2-2x-3$ en el intervalo $[1,4]$

- Halla el área encerrada entre la función $f(x)=-x^2+3x+4$, el eje X y las rectas $x=-2$ y $x=5$

7.2.-Área comprendida entre dos funciones.



Área = $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|$

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es la misma que el área encerrada entre la función diferencia $(f-g)(x)$ y el eje X en ese intervalo.

Ejemplos:

- Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+9$ y $g(x)=(x+1)^2-4$

- Calcula el área comprendida entre el eje X y la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\,e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área. *(Selectividad Junio 2002)* *Sol.: Área=1*

2 Determina un polinomio $P(x)$ de 2º grado sabiendo que: $P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x)\,dx = \frac{1}{3}$ *Sol.:* $P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$
(Selectividad Junio 2002)

3 Halla la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$. *(Selectividad Septiembre 2006)* *Sol.:* $2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

4 Calcula $\int_0^1 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$ *(Septiembre 2002)* *Sol.:* $\frac{9}{2} - \frac{23}{3}\ln 2$

5 Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)\,dx = 6$. Calcula a, b y c. *(Selectividad Junio 2003)* *Sol.:* $x^3 + 3x^2 + 4'75$

6 Dadas la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide: *(Selectividad Junio 2003)*

a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.

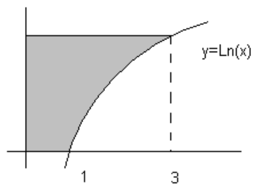
b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola. Sol.: a) Área= $\frac{1}{6}$; b) $y - 1'25 = 1\cdot(x - 0'5)$

7 Halla b sabiendo que $b > 0$ y el área de la región limitada por $y = x^2$ e $y = bx$ es $\frac{9}{2}$ *(Selectividad Junio 2004)* *Sol.:* $b = 3$

8 Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y las curvas $y = x^2$ *e* $y = x^2/2$.
Sol.: Área $= 4$ *(Selectividad Septiembre 2004)*

9 Halla el área de la superficie sombreada siendo $y = \ln x$.
(Selectividad Septiembre 2004)

Sol.: Área $= 2$



10 Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+1)$: *(Selectividad Septiembre 2007)*

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. Sol.:a) $y = x$; b) $\frac{3}{2} - 2\ln 2$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en a) y la recta $x = 1$.

11 Sea $I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ *(Selectividad Junio 2006)*

a) Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$

b) Calcula el valor de I

12 El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \frac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, vale 3. Calcula el valor de a. (Junio 2006)

13 Sean f y g las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$. *(Selectividad Junio 2007)*

a) Esboza las gráficas de *f* y de *g* calculando sus puntos de corte.

b) Calcula el área de cada uno de los recintos limitados entre las gráficas de f y g.

14 Sea f la función definida por $f(x) = x|x - 2|$.
(Selectividad Septiembre 2007)

a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.

b) Esboza la gráfica de f.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

15 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$. *(Selectividad Junio 2008)*

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.

b) Calcula el área el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

16 Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + \left|x^2 - 1\right|$.

(Selectividad Septiembre 2008)

a) Esboza la gráfica de g.

b) Calcula $\int_0^2 g(x)\,dx$