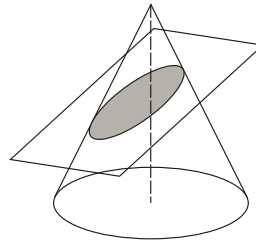


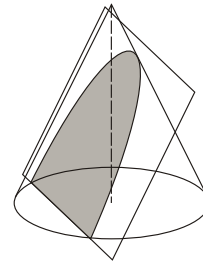
CURVAS CÓNICAS

Son curvas planas de segundo grado. También se les llama Secciones Cónicas, porque son el resultado de intersectar con un plano un cono de revolución.

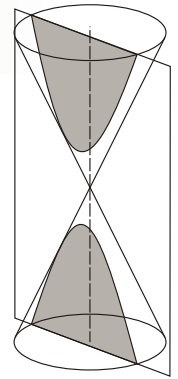
Las curvas cónicas propiamente dichas son tres: Elipse, Parábola e Hipérbola, aunque alterando el cono o la posición del plano pueden buscarse otras figuras, entre ellas la circunferencia.



ELIPSE

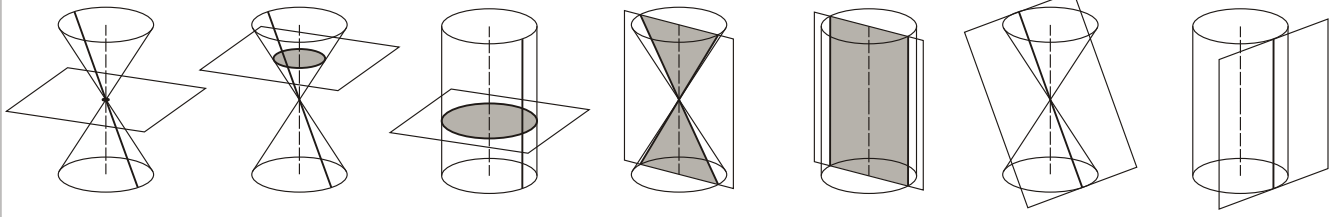


PARÁBOLA



HIPÉRBOLA

Cónicas singulares y degeneradas



Elementos principales

Focos : son los puntos de contacto de la sección con las esferas tangentes al plano que la produce e inscritas en el cono.

Diámetros : rectas que pasan por el centro geométrico. Dos diámetros son conjugados cuando cada uno pasa por la polar del outro.

Ejes : mayor (o focal) y menor. Son los únicos diámetros conjugados perpendiculares.

Vértice : cualquier punto del eje mayor sobre la curva.

Circunferencia focal : de radio igual al eje mayor, y centro en uno de los focos. En la Parábola el elemento correspondiente es la recta Directriz.

Circunferencia principal (o circunscrita): tiene como diámetro el eje mayor. Una recta tangente a una elipse se corta en ella con las perpendiculares que se tracen desde los focos.

Radios vectores : segmentos que unen un punto de la curva con los dos focos.

APOLONIO DE PERGA



Astrónomo y geómetra, fue discípulo de Arquímedes y de la escuela de Euclides. Su obra principal es un tratado de 8 libros sobre las curvas cónicas, tan completo que durante generaciones fue conocido como "el gran geómetra".

Fue el primero en emplear los términos ELIPSE e HIPÉRBOLA, y en demostrar que los tres tipos principales de cónicas pueden producirse en el mismo cono de revolución. Anteriormente a él solo

se consideraba la intersección del cono con un plano perpendicular a una generatriz, y la cónica resultante dependía de que el ángulo de esta respecto del eje fuese igual (parábola), menor (elipse) o mayor (hipérbola) de 45° .



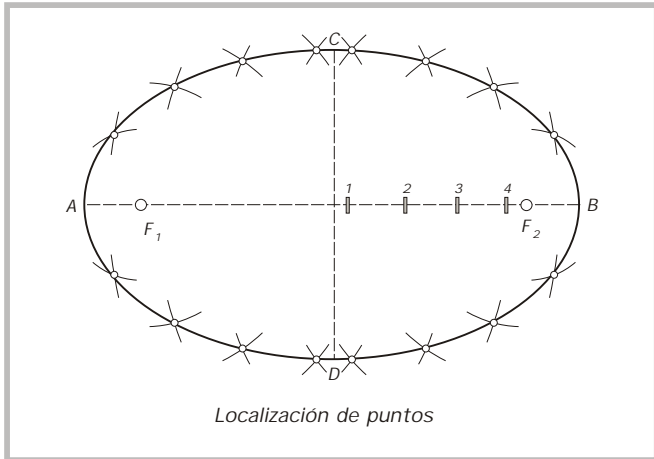
Definió los principales elementos y propiedades de las curvas, determinó tangentes y normales (las líneas más cortas que se pueden trazar desde un punto a una cónica), y formuló gran cantidad de teoremas y demostraciones. Entre sus aportaciones perdidas había un método rápido para calcular la longitud de la circunferencia a partir del diámetro.

Teorema de Apolonio : La suma de los cuadrados de dos diámetros conjugados en una elipse (la diferencia, en el caso de la hipérbola) es constante e igual, por tanto, a la suma de los cuadrados de los ejes.

ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos de los que la suma de distancias a otros dos fijos es constante (los puntos fijos son los focos, y la suma de distancias es igual al diámetro mayor)

También es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a otra dada que pasan por un punto interior a esta, o de los puntos que equidistan de una circunferencia y de un punto interior.



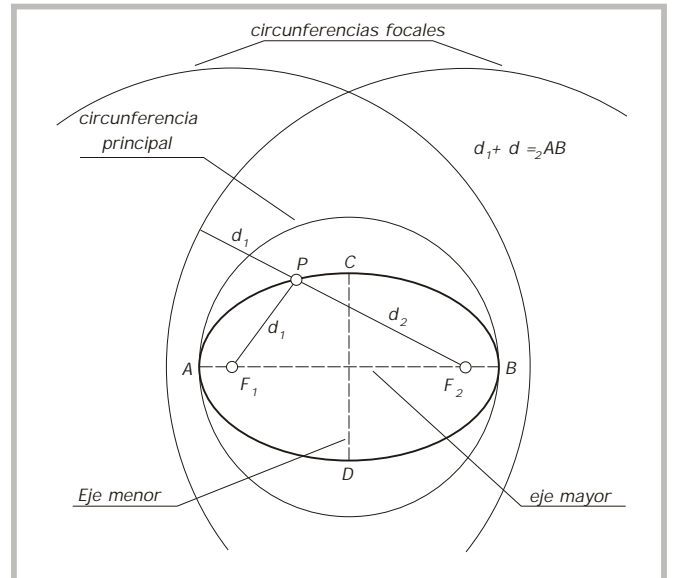
medidas parciales tomadas desde A y B, localizamos los puntos de la curva.

Puede definirse también con rectas tangentes que serán perpendiculares en la circunferencia principal a otras trazadas desde los vértices (derecha).

Construcción dados los ejes mayor y menor:

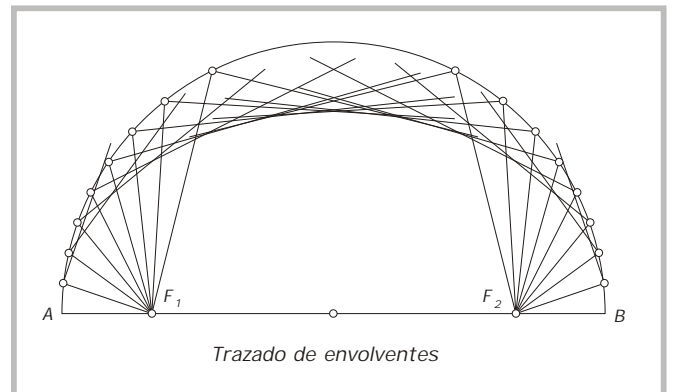
En el primer caso se utiliza el teorema de Thales para relacionar las dos medidas diametrales, y trasvasar las semicuerdas perpendiculares de la circunferencia correspondiente al eje menor, al eje mayor.

En la figura central se colocan las circunferencias de los diámetros mayor y menor concéntricas, que son afines a la elipse. Se localizan puntos de la curva trazando primero varios radios comunes.

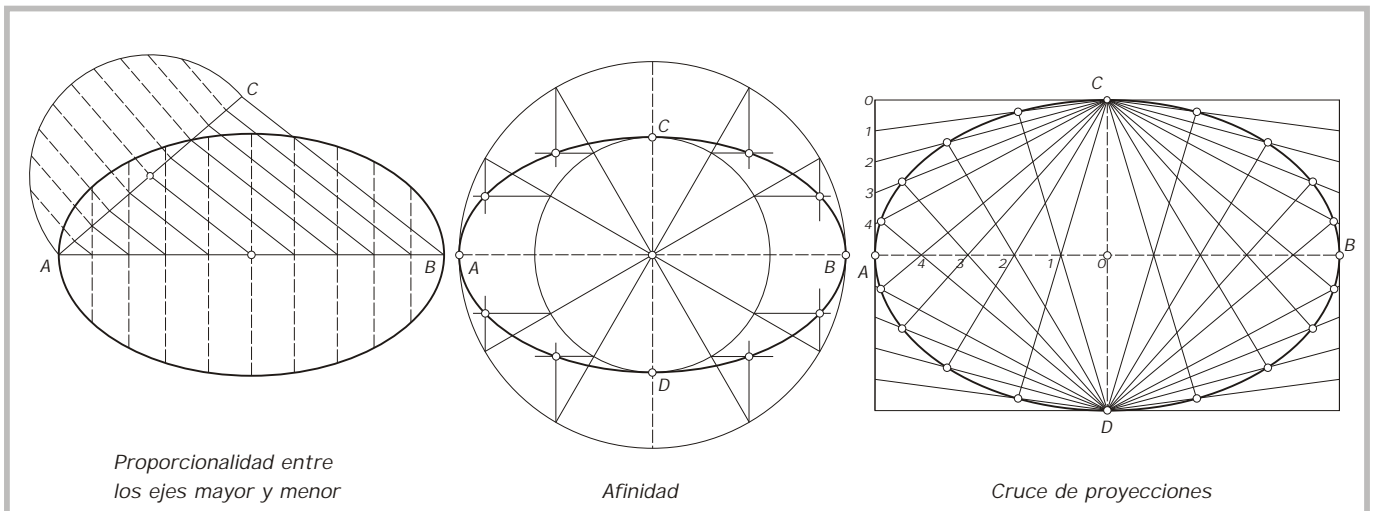


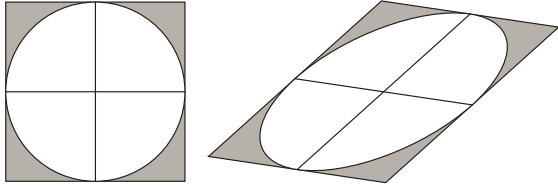
Construcción dados los focos y el eje mayor:

Basándonos en la primera definición, colocamos varias marcas arbitrarias (1,2,3,4) entre el centro y uno de los focos. Estas divisiones permiten tomar con el compás pares de distancias (A1/B1, A2/B2), que suman la medida AB. Trazando arcos desde los focos con



En el tercer método se traza un rectángulo que tiene los ejes como medianas. Se divide desde el punto medio uno de los ejes en el mismo número de partes iguales que el lado paralelo al otro. Los extremos de este último, alineados con las divisiones, darán los puntos buscados.

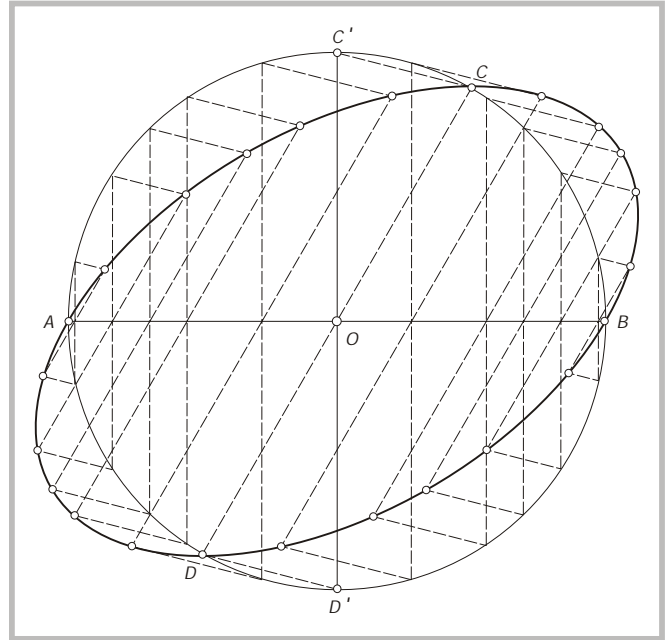




Construcción dados los diámetros conjugados:

Del mismo modo que una circunferencia vista en perspectiva es una elipse, dos diámetros perpendiculares aparecerán con un ángulo diferente, y serán diámetros conjugados.

Si imaginamos que el conjugado menor era antes del mismo tamaño y perpendicular al mayor, podemos aplicar el supuesto desplazamiento de sus extremos ($C'=C$, $D'=D$) al resto de los puntos de una circunferencia inicial. También podemos inscribir los diámetros conjugados en un romboide de lados paralelos a ellos y aplicar el método de cruce de proyecciones.

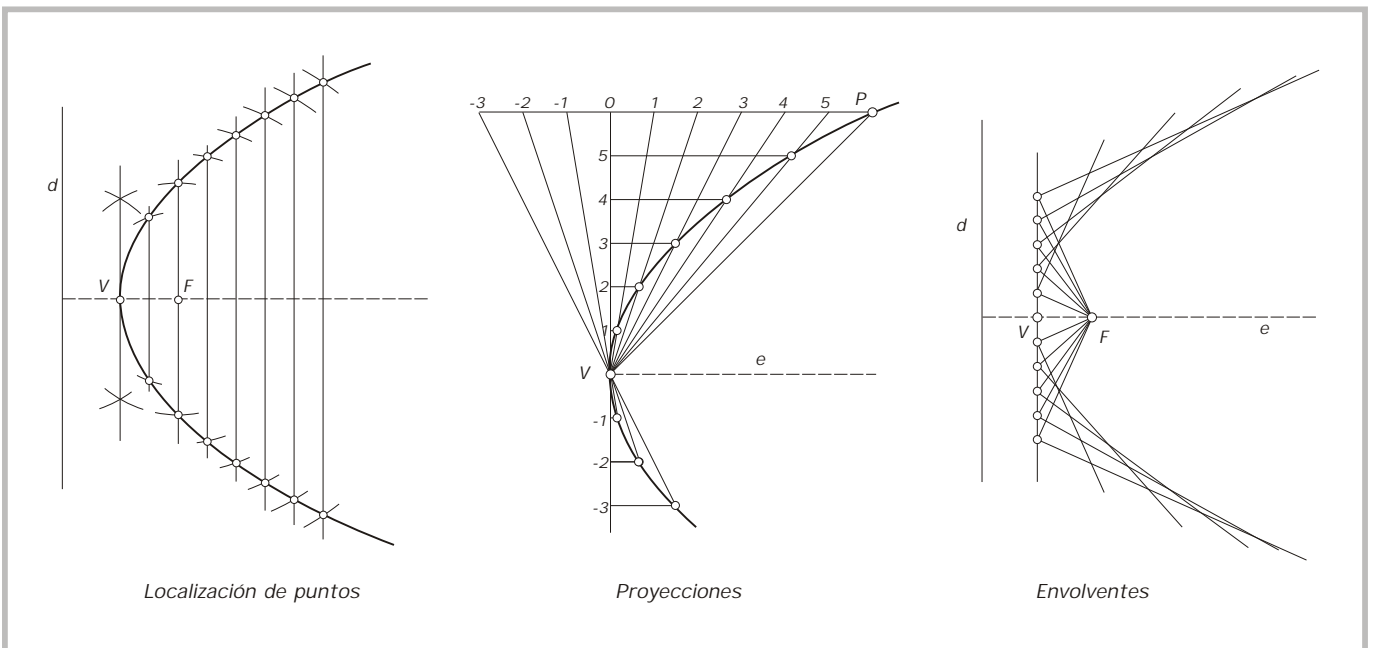
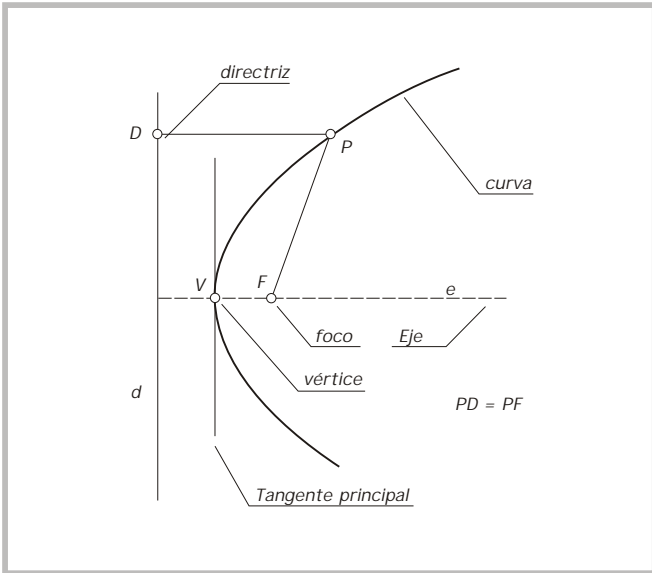


PARÁBOLA

Es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro punto y de una recta (Foco y recta Directriz).

Puede compararse a una elipse en la que uno de los focos se desplaza al infinito. La recta Directriz corresponde a la circunferencia focal.

Puede construirse cortando con arcos desde el foco rectas paralelas a la directriz, tomando como radio la distancia a ésta de cada una de las paralelas. También por cruce de proyecciones si conocemos el eje, el vértice y un punto P de la curva, o definirla uniendo el foco con distintos puntos de la tangente principal y trazando desde estos puntos rectas perpendiculares, que serán tangentes a la curva.



Localización de puntos

Proyecciones

Envoltentes

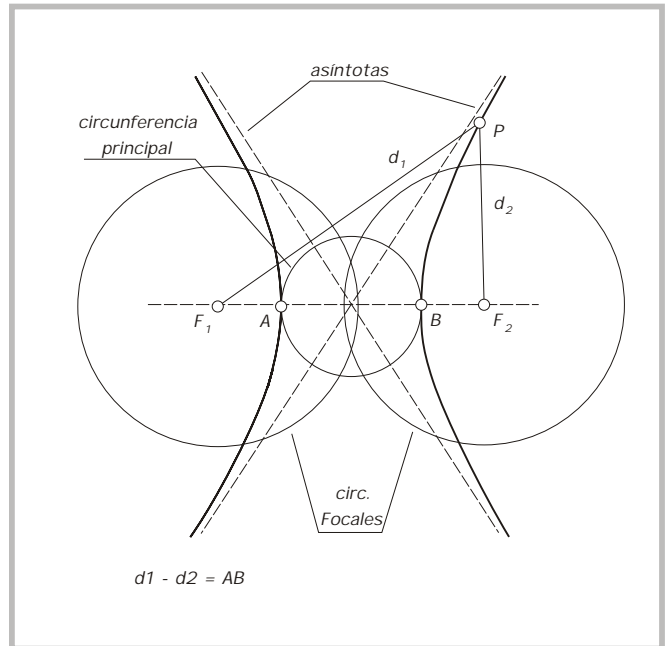
HIPÉRBOLA

La Hipérbola es una curva plana, abierta y con dos ramas. Es el lugar geométrico de los puntos de los que la diferencia de distancias a otros dos fijos es constante.

También es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a otra dada que pasan por un punto exterior a ésta, o de los puntos que equidistan de una circunferencia y de un punto exterior.

La medida nominal del eje mayor sigue siendo la distancia entre los vértices A e B de la curva. Las asíntotas son las tangentes de la curva en el infinito.

Dependiendo de los datos, su construcción se hace por métodos esencialmente iguales a los empleados en las otras curvas cónicas.



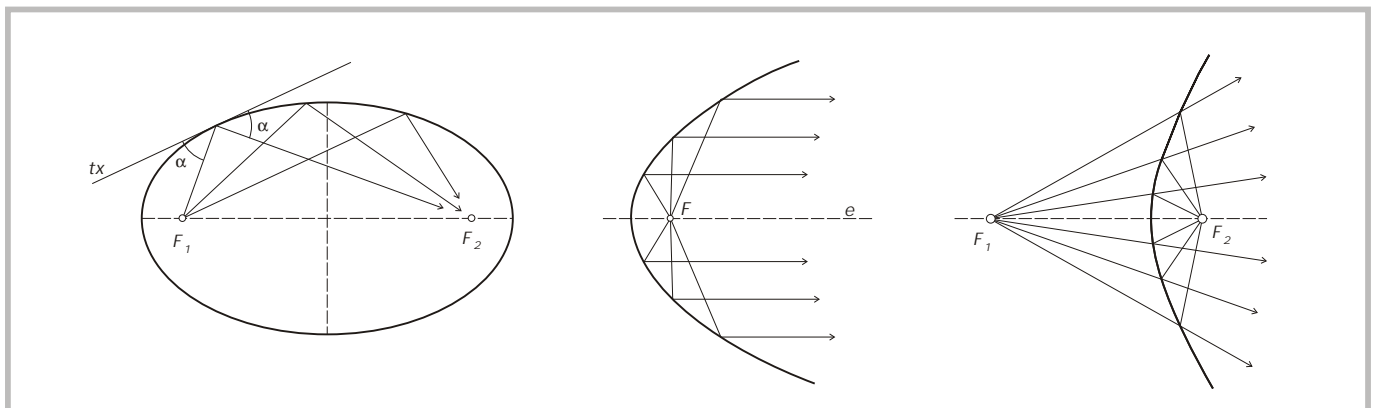
Localización de puntos, dados el eje mayor y los focos

Por proyecciones, dados el eje mayor, los focos y un punto P.

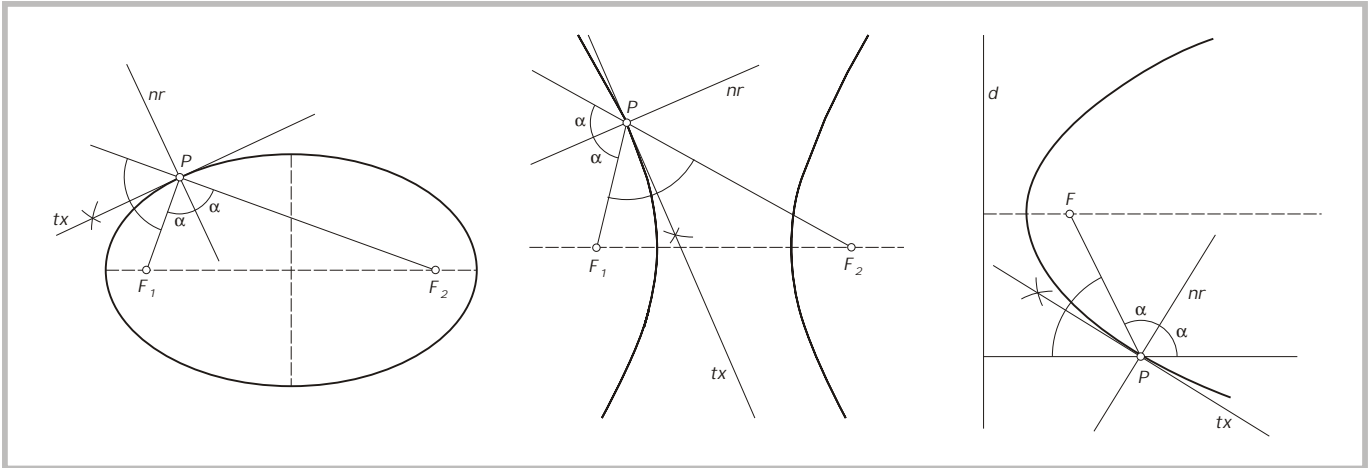
Por envolventes, dados el eje mayor y los focos

Propiedades de las curvas cónicas :
 Cualquier recta trazada desde un foco a una elipse será reflejada en dirección al otro foco.
 En la parábola todos los reflejos serán paralelos al eje.
 Así, las antenas parabólicas permiten la emisión o recepción unidireccional de las ondas.

En la hipérbola, los reflejos formarán un haz divergente polarizado por el foco contrario.
 Las estructuras convexas basadas en curvas cónicas presentan una muy buena resistencia a las presiones exteriores, siendo utilizadas, entre otras cosas, en la construcción de arcos y puentes.

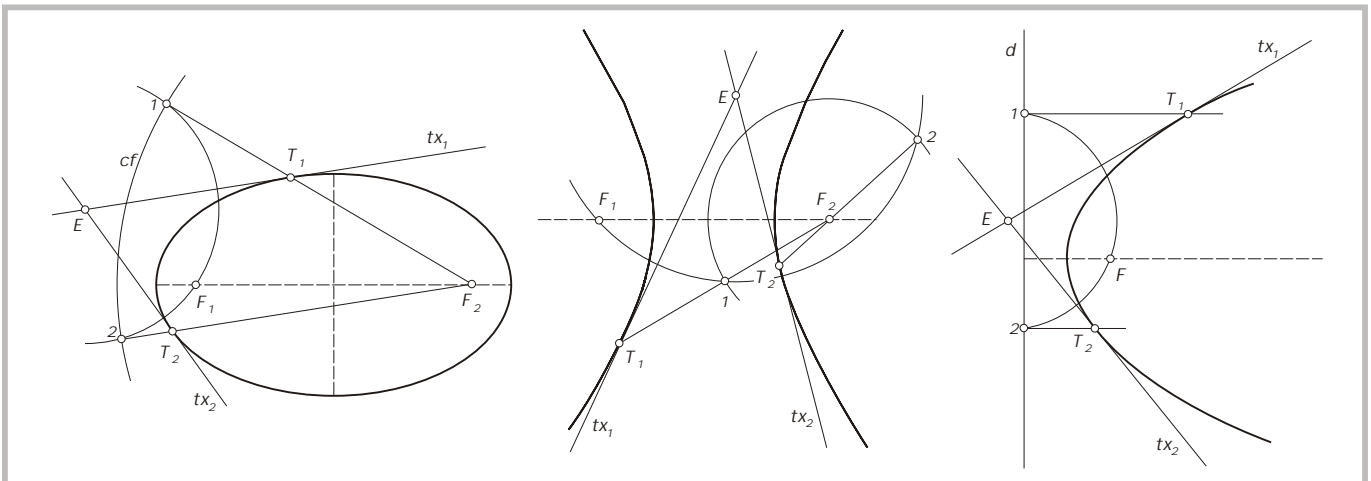


TANGENTES Y NORMALES



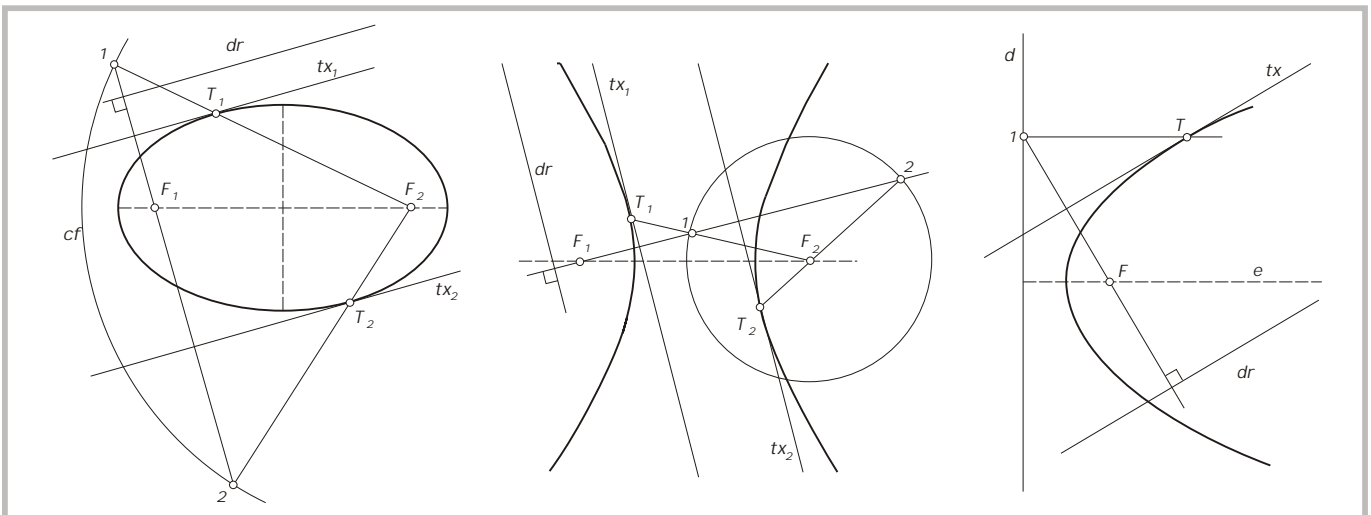
Tangente y normal en un punto P de la curva: son las bisectrices de los ángulos producidos por las rectas que pasan por P y por cada uno de los focos. Su posición en

la Hipérbola es inversa que en la Elipse. En la Parábola se considera el segundo foco en el infinito.



Tangentes desde un punto exterior a la curva: Trácese una circunferencia con centro en E que pase por uno de los focos, y a circunferencia focal con centro en el otro (recta Directriz, en la Parábola). Las rectas tangentes

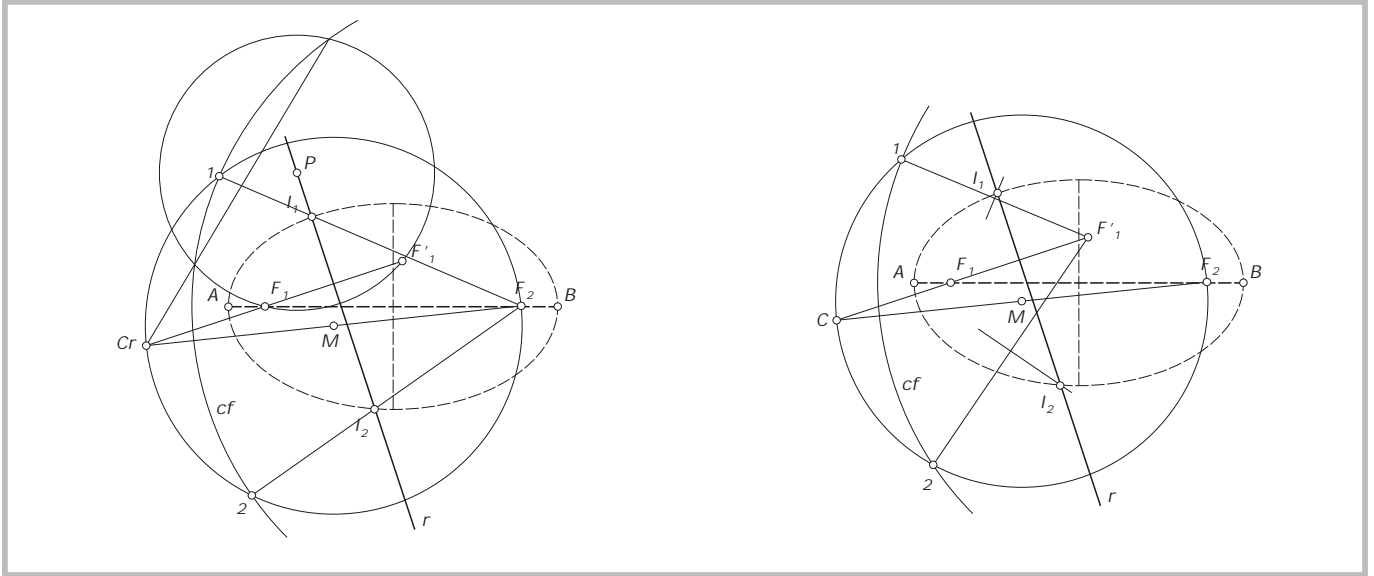
son las mediatrices de los segmentos definidos por cada intersección entre los dos arcos y el primer foco. Los puntos de tangencia están alineados con los de intersección y el centro de la circunferencia focal.



Tangentes paralelas a una dirección dada: Trácese por un foco una perpendicular a la dirección dada, y la circunferencia focal con centro en el otro foco. Las

tangentes (una en el caso de la Parábola) y los puntos de tangencia quedan definidos de la misma manera que en el caso anterior.

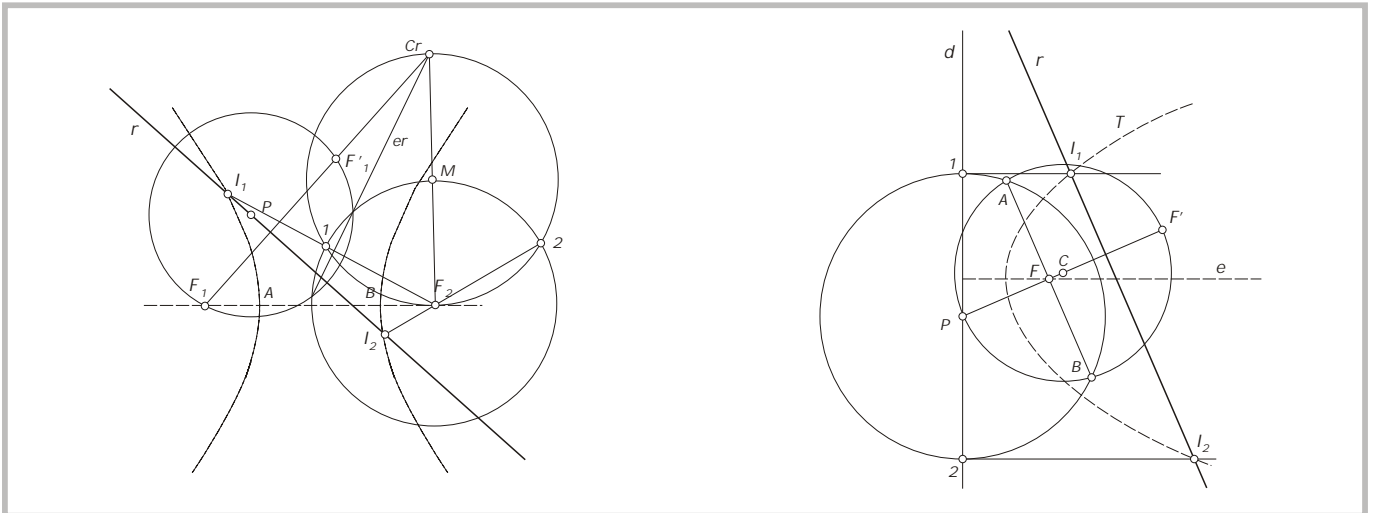
INTERSECCIÓN CON RECTA



Se conocen el eje AB y los focos F_1 y F_2 de la elipse, así como la recta secante r . Mediante una perpendicular, se localiza el simétrico del foco F_1 respecto de la recta: F'_1 . Se traza una circunferencia que pase por los dos puntos simétricos con centro en cualquier punto P de r , con tal que corte a la focal de F_2 . Se traza el eje radical de ambas pasando por los puntos de corte, y se localiza en centro radical donde corte a la prolongación de $F_1 F'_1$. Se une el centro Cr con F_2 y desde el punto medio M se

traza una tercera circunferencia que corta a la focal en los puntos 1 y 2. Uniendo cada uno de ellos con F_2 , se obtienen en r las intersecciones I_1 e I_2 .

Un método algo más breve consiste en escoger cualquier punto C en la recta $F_1 F'_1$ y trazar la circunferencia de diámetro $F_2 C$. Las mediatrices de los segmentos $F_1 1$ y $F_1 2$ dan en la recta r los puntos de intersección.



Se conocen el eje AB y los focos F_1 y F_2 de la hipérbola, así como la recta secante r . Mediante una perpendicular, se localiza el simétrico del foco F_1 respecto de la recta: F'_1 . Se traza una circunferencia que pase por los dos puntos simétricos con centro en cualquier punto P de r , con tal que corte a la focal de F_2 . Se traza el eje radical de ambas pasando por los puntos de corte, y se localiza en centro radical donde corte a la prolongación de $F_1 F'_1$. Se une el centro Cr con F_2 y desde el punto medio M se traza una tercera circunferencia que corta a la focal en los puntos 1 y 2. Uniendo cada uno de ellos con F_2 , se obtienen en r las intersecciones I_1 e I_2 .

Se conocen el eje e de una parábola, el foco F y la recta directriz d , así como la recta secante r . Mediante una perpendicular, se localiza F' , simétrico de F respecto de r , y se prolonga hasta cortar la directriz en P . Se traza una circunferencia con centro en C que tiene como diámetro P' , así como la cuerda perpendicular AB que pasa por F . Con centro en P se traza otra circunferencia que pase también por A y B , que corta a la directriz en los puntos 1 y 2. Trazando por ellos paralelas al eje e tendremos en r los puntos de intersección.