

A Geometria e as Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano com recurso ao software GeoGebra

A Geometria ganhou uma especial atenção com os gregos, ao ser elevada a uma ciência que trata entidades abstratas pois, durante muito tempo, tais entidades tinham uma relação clara a objetivos físicos (Breda *et al.*, 2011). Ainda assim, Mariotti (1999) considera que deve ser reconhecida a relação privilegiada entre a Geometria, a teoria do espaço e a realidade física e afirma que a completa congruência entre a cognição espacial e o espaço matemático abstrato, em Geometria, nem sempre é garantida, pois a passagem da intuição para a Geometria é um processo que apresenta grandes dificuldades e que está longe de ser natural. Assim, o autor defende que é fundamental: i) o desenvolvimento de uma interação flexível entre imagens e conceitos e ii) o desenvolvimento de esquemas conceituais complexos que controlam os sentidos, as relações e as propriedades de uma figura geométrica.

De entre os gregos, destaca-se Euclides, cuja geometria – euclidiana – foi irrefutável durante séculos. Com o desenvolvimento dos métodos algébricos por René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat, apareceu a Geometria analítica, segundo a qual as coordenadas numéricas e equações algébricas nessas coordenadas eram utilizadas para a determinação de resultados geométricos (Breda *et al.*, 2011). Mas foi já em pleno século XIX que Felix Klein (1849 – 1925) deu um contributo decisivo para a compreensão das Geometrias não euclidianas, apresentando um novo princípio unificador para classificar as várias Geometrias, que ficou conhecido por *Programa Erlangen* (Franco de Oliveira, 1997).

Está na base desse programa o conceito de grupo de transformações e o facto de que a caracterização de cada Geometria passa pelas propriedades das “figuras” que permanecem invariantes para determinado grupo de transformações (id). De acordo com Veloso (2012), Klein foi o primeiro a apresentar uma definição precisa da geometria euclidiana como sendo “a ciência que estuda as propriedades das “figuras” que são invariantes para as transformações de semelhança” (p. 133).

Atendendo a que as Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano podem ser estudadas como um subconjunto do universo das transformações geométricas de semelhança (Breda *et al.*, 2011), inicialmente apresenta-se a definição de transformações geométricas. Depois, define-se e explicita-se as propriedades das transformações de semelhança. Posteriormente, dá-se ênfase às Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano e às Simetrias.

Em geral, uma transformação geométrica é uma função bijetiva de um plano nele próprio (Franco de Oliveira, 1997).

Definição - sejam A, B e C três pontos quaisquer dados; diz-se que uma transformação geométrica S é uma transformação de semelhança ou semelhança se $\overline{AB}/\overline{BC} = \overline{A'B'}/\overline{B'C'}$, $\overline{AB}/\overline{AC} = \overline{A'B'}/\overline{A'C'}$ onde $A' = S(A)$, $B' = S(B)$, $C' = S(C)$ (Veloso, 2012, p.137).

Decorre desta definição que, em toda a transformação de semelhança, as distâncias entre cada dois pontos resultam multiplicadas por uma constante ($\overline{A'B'}/\overline{AB} = \overline{B'C'}/\overline{BC} = \overline{A'C'}/\overline{AC}$), designada razão de semelhança e normalmente escrita por r (Sebastião e Silva, 1999; Veloso, 2012).

Se a transformação de semelhança é uma semelhança de $r > 1$, todos os segmentos aumentam na mesma proporção e diz-se que houve uma ampliação; se a transformação de semelhança é uma semelhança de $r < 1$, acontece o contrário e dizemos que houve uma redução; se a transformação de semelhança é uma semelhança de $r = 1$, não há nem ampliação nem redução, cada segmento é transformado num segmento igual ao primeiro (Sebastião e Silva, 1999). As semelhanças com razão de semelhança igual a 1 designam-se Isometrias do plano (Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

Das várias propriedades das transformações de semelhança, Breda *et al.*, (2011) destacam:

- i) Preservação da colinearidade de pontos e amplitudes de ângulos;
- ii) Transformação: retas (respetivamente, semi-retas, segmentos de retas e triângulos) em retas (respetivamente, semi-retas, segmentos de reta e triângulos semelhantes); retas paralelas (respetivamente, perpendiculares) em retas paralelas (respetivamente, perpendiculares).

Considere-se agora as Isometrias ou movimentos rígidos do plano euclidiano que se designará de \mathbb{R}^2 . No sentido etimológico, *Isometria* significa “mesma medida” (Franco de Oliveira, 1997). Uma Isometria do plano [$Iso(\mathbb{R}^2)$] ou um movimento rígido, é uma transformação geométrica T se e somente se $d(P', Q') = d(P, Q)$ para quaisquer pontos P e Q do plano, onde $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$ (Franco de Oliveira, 1997, Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

Da condição de preservação das distâncias entre pontos resultam importantes propriedades para as Isometrias: as Isometrias preservam os conceitos de situado entre, ponto médio, segmento, semi-reta, reta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularidade (Veloso, 2012). As Isometrias são injetivas; bijetivas no conjunto dos pontos do plano; induzem bijeções no conjunto das linhas do plano, são colineações (Franco de Oliveira, 1997).

Pelo facto de toda a Isometria ser uma colineação: Se uma Isometria fixar dois pontos, A e B, esta fixa, necessariamente, a reta AB, ponto a ponto; se uma Isometria f fixar três pontos

não colineares A , B e C , as retas AB , AC e BC são fixas pontualmente pela Isometria e , consequentemente, também o triângulo $\triangle ABC$ o é; qualquer ponto P do plano que não pertença ao triângulo $\triangle ABC$ também é um ponto fixo de f . Realmente, seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. A reta que passa por P e M intersecta o triângulo $\triangle ABC$ nos pontos M e S . Como M e S são pontos do triângulo $\triangle ABC$, são pontos fixos de f e, por conseguinte, f fixa pontualmente a reta MS , pelo que $f(P) = P$, ou seja, f é a aplicação identidade (Breda *et al.*, 2011). Portanto, “Se uma Isometria fixar dois pontos (distintos) de uma reta, então fixa-a pontualmente e se fixar três pontos não colineares é a transformação identidade” (id, p. 77).

Consequentemente, se A , B e C são pontos não colineares e f e g são duas Isometrias tais que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$, então $f = g$. Ou seja, “uma Isometria fica univocamente determinada pelo conhecimento dos transformados de três pontos não colineares” (id:ib).

Segundo Cabrita *et al.* (2008, p. 98), o conjunto das Isometrias (I) do plano \mathbb{R}^2 é um grupo euclidiano para a operação composição habitual de funções “ \circ ”. De facto, considerando (\mathbb{R}^2, \circ) :

- A operação é fechada - $\forall i_1, i_2 \in \mathbb{R}^2, i_1 \circ i_2 \in \mathbb{R}^2$
- A operação é associativa - $\forall i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{R}^2, (i_1 \circ i_2) \circ i_3 = i_1 \circ (i_2 \circ i_3)$
- Existe elemento identidade - $\exists i' \in \mathbb{R}^2, \forall i_1 \in \mathbb{R}^2, i' \circ i_1 = i_1 \circ i' = i_1$
- Todo o elemento tem inverso - $\forall i_1 \in \mathbb{R}^2, \exists i_2 \in \mathbb{R}^2, i_2 \circ i_1 = i_1 \circ i_2 = i'$

Se a operação ainda gozar da propriedade comutativa, o grupo diz-se abeliano

$$\forall i_1, i_2 \in \mathbb{R}^2, i_1 \circ i_2 = i_2 \circ i_1$$

Existem quatro e apenas quatro Isometrias no plano euclidiano: a reflexão, a translação, a rotação e a reflexão deslizante (Lima, 1996; Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012) “que permitem que uma figura e a sua transformada pela aplicação sejam congruentes” (Cabrita *et al.*, 2008, p. 98). As Isometrias do plano euclidiano podem ser classificadas em Isometrias diretas ou positivas e Isometrias opostas ou negativas. Enquanto que as Isometrias diretas – as translações e as rotações – preservam o sentido dos ângulos orientados, as Isometrias opostas – as reflexões e as reflexões deslizantes – invertem o sentido dos ângulos orientados (Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

Nota-se que a composição de duas Isometrias diretas é uma Isometria direta e que a inversa de uma Isometria direta também é uma Isometria direta. Por outro lado, a composição de duas Isometrias opostas é uma Isometria direta (Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

Considere-se, de seguida, as quatro Isometrias no plano euclidiano. Primeiro como composição de duas ou três reflexões e depois de forma independente.

Seja f uma Isometria do plano. Considerando l uma reta do plano, a reflexão de eixo l , R_l é uma transformação $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que fixa a reta l ponto a ponto tal que $R_l(Q) = Q'$ para todo o ponto Q em l e transforma T não pertencente a l em T' (distinto de T) tal que l é a mediatriz do segmento de recta $[TT']$ (Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011).

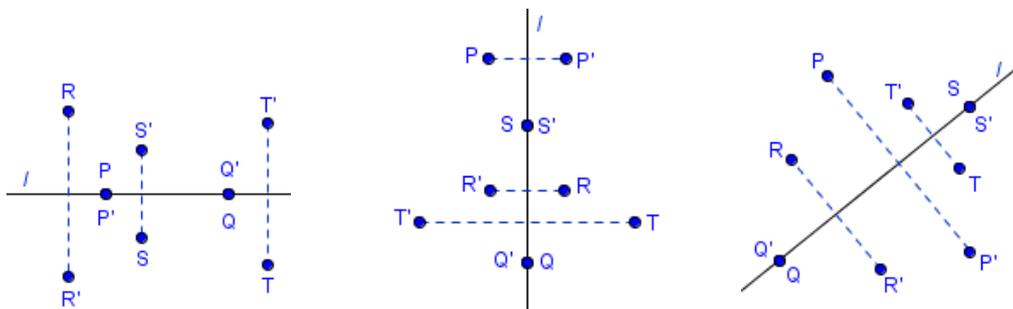


Figura 1. Pontos do plano e seus transformados por reflexões (Adaptados de Breda *et al.*, 2011)

Para além das propriedades comuns das Isometrias, verifica-se que a reflexão:

- i) é uma transformação involutiva (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Breda *et al.*, 2011, Veloso, 2012). Seja l uma reta pertencente ao plano e Q um ponto qualquer do plano, $R_l^2(Q) = R_l(R_l(Q)) = Q$. Se $R_l = R_l^{-1}$, então $R_l^2 = I$ (Isometria identidade) (Breda *et al.*, 2011);
- ii) fixa pontualmente os pontos que pertencem ao eixo de reflexão (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Breda *et al.*, 2011, Veloso, 2012) e não pontualmente, qualquer reta perpendicular ao eixo de reflexão (Breda *et al.*, 2011);
- iii) não preserva a orientação dos ângulos (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012):

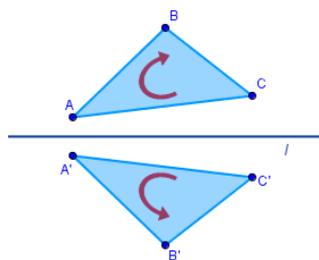


Figura 2. Transformado do ΔABC pela reflexão de eixo l

Sejam R_m e R_n duas reflexões de eixos m e n , respetivamente, e $f = R_n \circ R_m$ a aplicação composta de R_n após R_m .

- i) Se $m = n$, a Isometria $f = R_n \circ R_m$ é a transformação identidade.
- ii) Se $m \neq n$ então as retas m e n ou são concorrentes ou são paralelas (estritamente) (Breda *et al.*, 2011)

- No caso em que as retas m e n são concorrentes num ponto O , a composição $f = R_n \circ R_m$ será uma rotação (Figura 3) com centro no ponto de interseção das retas m e n e medida de amplitude igual ao dobro da medida de amplitude do ângulo entre m e n (Veloso, 1998, 2012; Breda *et al.*, 2011).

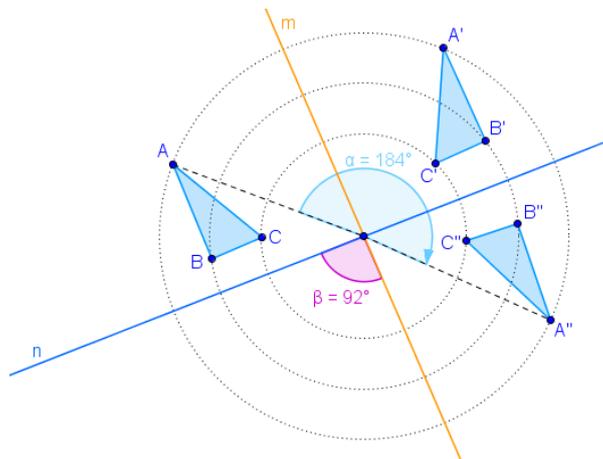


Figura 3. Transformado do ΔABC pela composição de duas reflexões de eixo concorrentes

- No caso em que as retas m e n são paralelas (estritamente), a composição $f = R_n \circ R_m$ será uma translação (Figura 4) cujo vetor tem direção perpendicular a m e n (sentido de m para n) e norma igual ao dobro da distância entre m e n . (Veloso, 1998, 2012; Breda *et al.*, 2011)

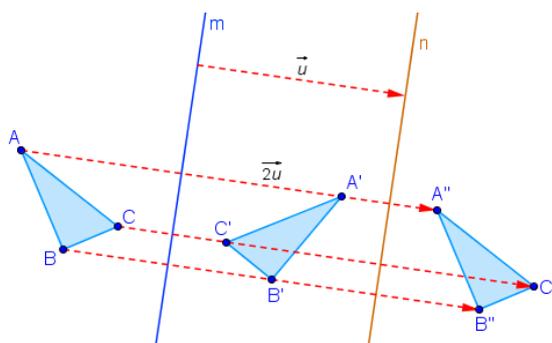


Figura 4. Transformado do ΔABC pela composição de duas reflexões de eixos paralelos

A composição de duas Isometrias opostas é uma Isometria direta. Assim, pode-se concluir que a composição de duas reflexões não é uma reflexão. Consequentemente, a operação de composição usual de funções não confere ao conjunto das reflexões uma estrutura de grupo (Franco de Oliveira, 1997; Breda *et al.*, 2011).

Sejam R_l , R_m e R_n três reflexões de eixos l , m e n , respetivamente e $f = R_l \circ R_n \circ R_m$ a aplicação composta de R_l após R_n após R_m . De acordo com Franco de Oliveira (1997), a composição f é uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

- i) Se os eixos das três reflexões forem paralelos ou se se encontrarem num único ponto a composição é uma reflexão (Figuras 5 e 6) (Franco de Oliveira, 1997; Breda, 2006; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

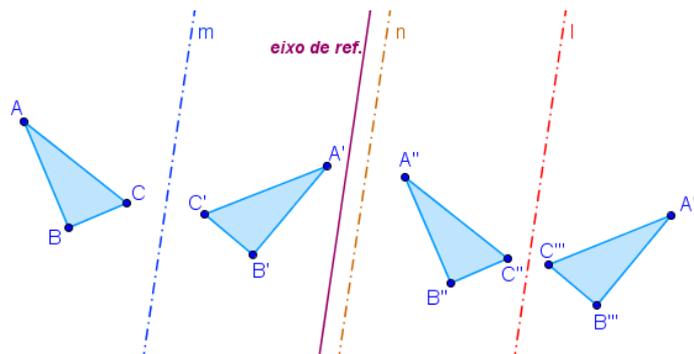


Figura 5. Transformado do $\triangle ABC$ pela composição de três reflexões de eixos paralelos

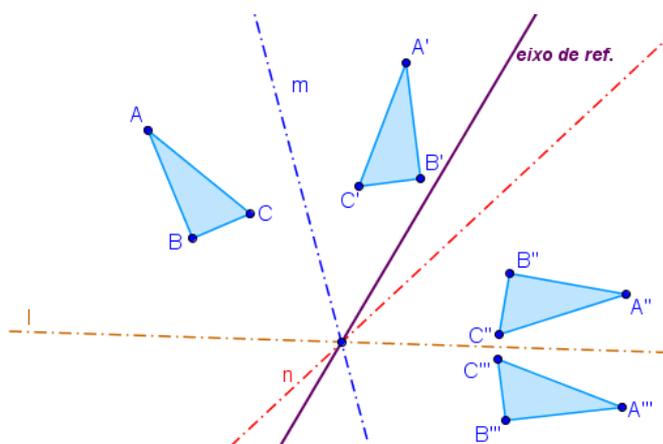


Figura 6. Transformado do $\triangle ABC$ pela composição de três reflexões de eixos concorrentes

- ii) Se os três eixos de reflexão se encontram (aos pares) em três pontos, ou dois são paralelos e o terceiro os intersesta, a composição é uma reflexão deslizante (Figuras 7 e 8) (Franco de Oliveira, 1997; Breda, 2006; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

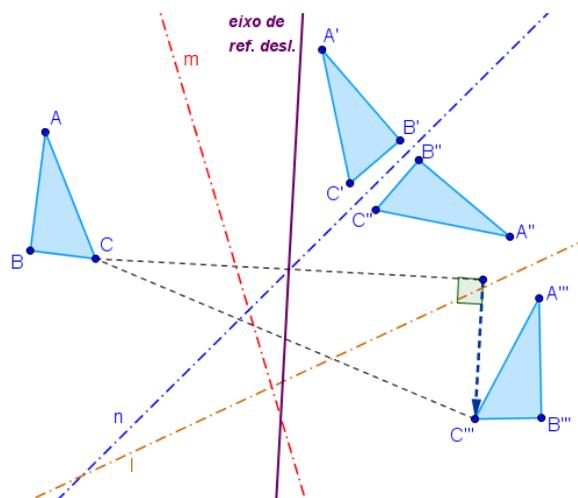


Figura 7. Transformado do $\triangle ABC$ pela composição de três reflexões de eixos que interseitam (aos pares) em três pontos

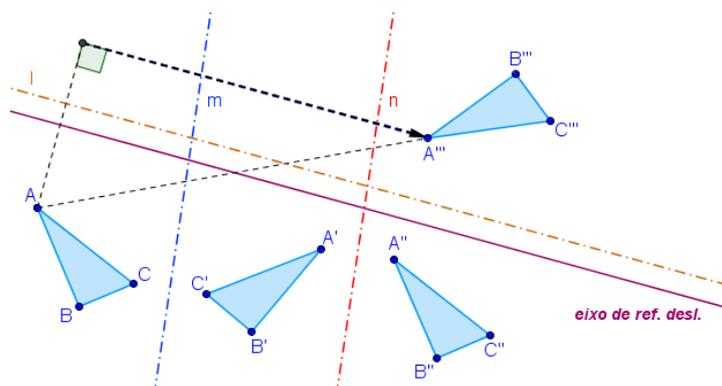


Figura 8. Transformado do $\triangle ABC$ pela composição de três reflexões em que dois dos eixos são paralelos e o terceiro os interseita

Constata-se que a reflexão é uma das principais Isometrias do plano, pois, pelo teorema fundamental das Isometrias, “toda a Isometria de \mathbb{R}^2 é uma composição de duas ou três reflexões” (Franco de Oliveira, 1997, p. 157).

Foram ilustradas as Isometrias: rotação, como composição de duas reflexões de eixos concorrentes; translação, como composição de duas reflexões de eixos paralelos e reflexão deslizante como composição de três eixos de reflexão que se encontram (aos pares) em três pontos, ou em que dois são paralelos e o terceiro os interseita. De seguida, apresentam-se as definições destas Isometrias de forma independente.

Uma rotação é um movimento rígido que pode ser entendida como “uma figura a mover-se” ao longo de um arco de circunferência cujo centro coincide com o centro de rotação.

Para a caracterização de uma rotação é necessário sempre o centro de rotação, a medida da amplitude e orientação do ângulo (Cabrita *et al.*, 2008). Dado um ponto O e um ângulo α , denomina-se rotação de centro O uma aplicação $R(O, \alpha): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que fixa O e envia B em B' com $d(B, O) = d(B', O)$ e $(\angle BOB') = \alpha$ (id).

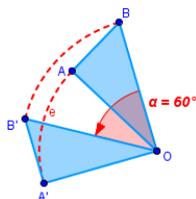


Figura 9. O transformado do triângulo ΔOAB pela rotação $R_O^{60^\circ}$

Através de uma rotação, obtém-se uma figura final geometricamente igual à dada, onde um dos pontos é fixo, o centro da rotação, e todos os outros sofrem “deslocações” percorrendo arcos de circunferência com o mesmo centro e a mesma amplitude. É muito importante o sentido de rotação. Por convenção, considera-se o sentido negativo o sentido dos ponteiros do relógio, caso contrário designa-se por sentido positivo.

Salientam-se como propriedades particulares da rotação as seguintes:

- i) “Uma rotação, distinta da transformação identidade, fixa um e um só ponto e fixa uma recta (não pontualmente) se e somente se a sua amplitude for de 180° e o centro da rotação pertencer à recta” (Breda *et al.*, 2011, p. 84). Geralmente, a rotação de amplitude 180° é designada meia-volta (Greenberg, 1994; Breda *et al.*, 2011) e é um caso particular de rotação.

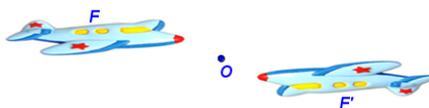
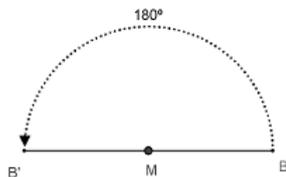


Figura 10. O transformado de F pela meia volta de centro em O

A meia-volta (simetria central) admite um centro (M) e amplitude 180° (S_M). M é o centro da ‘simetria’, os pontos B e B' são simétricos em relação a M (Cabrita *et al.*, 2008) e M é o ponto médio do segmento de reta $[BB']$.



$$\begin{aligned} \overline{MB} &= \overline{MB'} \\ S_M(B) &= B' \\ S_M(B') &= B \end{aligned}$$

- ii) “Uma rotação fixa circunferências com centro no centro da rotação, embora não pontualmente. Apenas a (rotação) identidade fixa pontualmente circunferências” (Breda *et al.*, 2011, p.85).
- iii) A rotação preserva a orientação dos ângulos (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012).

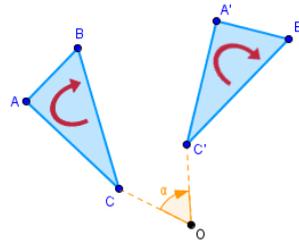


Figura 11. O transformado do triângulo ΔOAB pela rotação R_O^α

- iv) A rotação de centro em O e ângulo $-\alpha$ é a transformação inversa da rotação de centro em O e ângulo α , $R_O^{-\alpha} = (R_O^\alpha)^{-1}$ (Breda *et al.*, 2011). A única rotação igual à sua inversa é a transformação identidade (Greenberg, 1994).
- v) A composição de duas rotações com o mesmo centro (ponto O) e de amplitudes, respetivamente, α e β é comutativa e a resultante é uma rotação de centro em O e de amplitude $\alpha + \beta$, $R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$ (Breda *et al.*, 2011). O grupo de rotações com o mesmo centro é cíclico e qualquer grupo cíclico é comutativo.

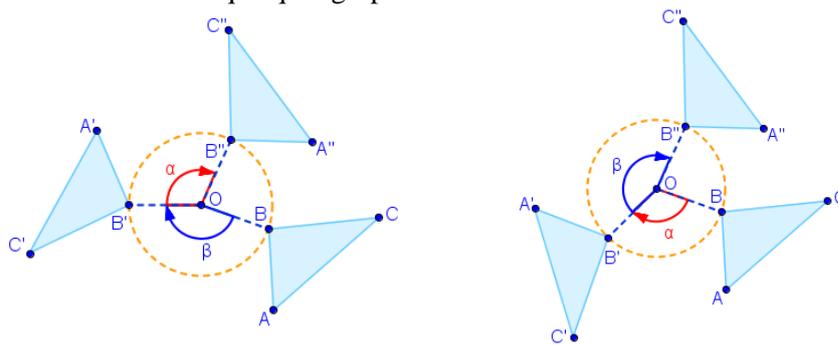


Figura 12. O transformado do triângulo ΔABC pelas rotações $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ e $R_O^\alpha \circ R_O^\beta$.

- vi) A composição de duas rotações de centros distintos não é comutativa (Greenberg, 1994; Breda *et al.*, 2011), a não ser que, pelos menos, uma rotação seja a transformação identidade (Greenberg, 1994).

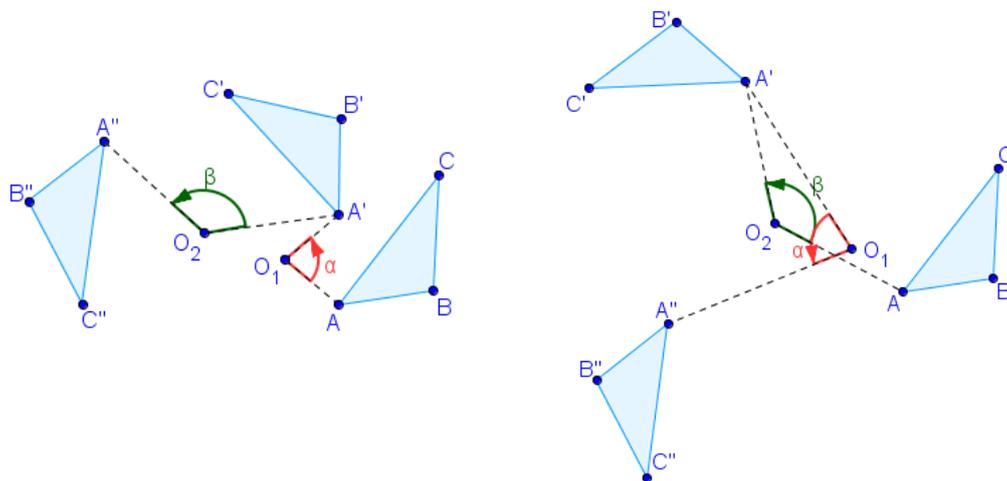


Figura 13. $R_{o_2}^{\beta} \circ R_{o_1}^{\alpha} \neq R_{o_1}^{\alpha} \circ R_{o_2}^{\beta}$

O conjunto das rotações com um mesmo centro tem uma estrutura de subgrupo comutativo (abeliano) do grupo das Isometrias do plano, para a operação composição usual de funções, designado de *grupo das rotações* do plano (Breda *et al.*, 2011).

Veja-se agora a definição e propriedades da Isometria translação.

Uma translação, outro movimento rígido, é uma transformação de qualquer ponto do plano $X \rightarrow X + \vec{u}$ ao longo de uma reta, sendo $\vec{u} \neq 0$ o vetor diretor da reta. Contudo, é possível outra definição de translação sem se referir à reta pela qual se dá a translação (Franco de Oliveira, 1997). Assim, seja \vec{u} um vetor qualquer. A translação definida por \vec{u} é a transformação $T_{\vec{u}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_{\vec{u}}(X) = X + \vec{u} = X'$. O ponto X' denomina-se imagem ou transformado do ponto x pela $T_{\vec{u}}$.

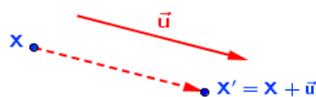


Figura 14. $T_{\vec{u}}(X)$

A composição de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012). A recíproca também é verdadeira, ou seja, “toda a translação é composição de duas reflexões de eixos paralelos” (Breda *et al.*, 2011, p 88). A translação associada ao vetor nulo designa-se por

Isometria identidade – $T_0(X)$. Esta Isometria pode ser considerada “como composição de duas reflexões de eixos coincidentes e, portanto, paralelas” (em sentido lato) (id, p 88).

Considere-se agora $\vec{u} \neq 0$. Sejam os pontos A e B do plano, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. $T_{\vec{u}}$ é a composição $R_n \circ R_m$, onde m e n são retas perpendiculares à reta AB e que passam, respetivamente, por A e M (ponto médio do segmento de reta $[AB]$).

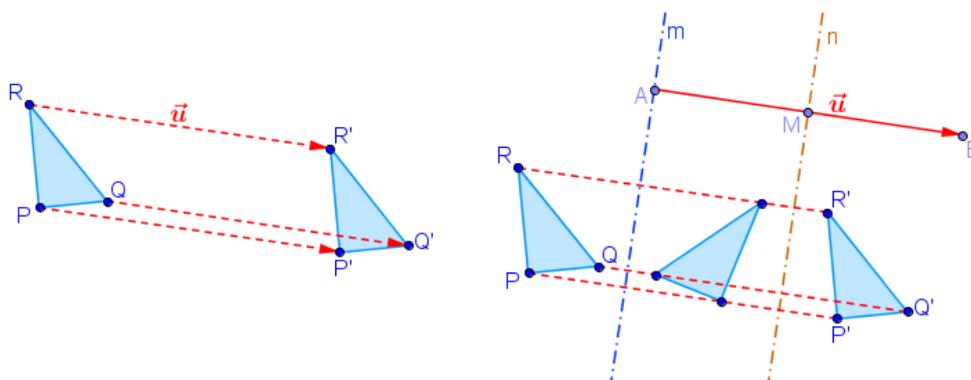


Figura 15. Translação $T_{\vec{u}}$ como composição de duas reflexões

Como propriedades, tem-se que:

- i) Se uma translação fixa um e só um ponto, a Isometria é a transformação identidade (Greenberg, 1994). Qualquer translação, diferente da transformação identidade, não tem pontos fixos (Breda *et al.*, 2011);
- ii) A translação, $T_{\vec{u}}$, $\vec{u} \neq 0$, fixa qualquer reta com a direção de \vec{u} (embora não pontualmente) e preserva as direções (Breda *et al.*, 2011);
- iii) A translação preserva a orientação dos ângulos (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012);

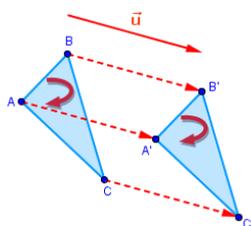


Figura 16. O transformado do triângulo $\triangle ABC$ pela $T_{\vec{u}}$

- iv) A translação $T_{-\vec{u}}$ associada ao vetor simétrico $-\vec{u}$ é a transformação inversa da translação $T_{\vec{u}}$ associada ao vetor \vec{u} (Breda *et al.*, 2011);

v) A composição de duas translações associadas aos vetores \vec{u} e \vec{v} , respetivamente, é comutativa e o resultado é a translação associada ao vector $\vec{u} + \vec{v}$ (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Breda *et al.*, 2011);

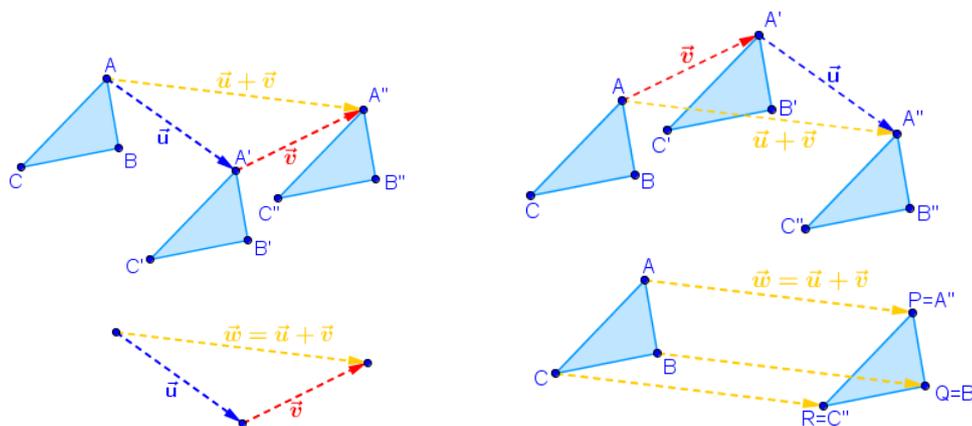


Figura 17. $T_u^- \circ T_v^- = T_v^- \circ T_u^- = T_w^-$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Por fim, aborda-se o conceito da reflexão deslizante.

Reflexão deslizante de eixo n é a transformação do plano, $D_{(n,\vec{u})}$, obtida pela composição de uma reflexão de eixo n e uma translação não trivial T_u^- , cujo vector \vec{u} tem a direção paralela ao eixo n (Breda, 2006; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012). Tendo em conta que R_n fixa a reta n , $T_u^- \circ R_n$ transforma a reta n numa reta t que lhe é paralela. As retas t e n coincidem se e somente se \vec{u} tem a direção de n . Então, para $\vec{u} \neq 0$, $T_u^- \circ R_n = R_n \circ T_u^-$ se e somente se n e \vec{u} têm a mesma direção (Breda *et al.*, 2011).

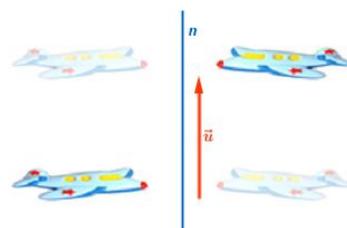


Figura 18. $T_u^- \circ R_n = R_n \circ T_u^-$

Sendo assim, apresentam-se as propriedades:

- i) A reflexão deslizante não tem pontos fixos (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Breda *et al.*, 2011) e tem como uma única reta fixa – o eixo da reflexão (Greenberg, 1994; Veloso, 1998, 2012), embora não pontualmente (Breda *et al.*, 2011);

- ii) Se P, Q, R são pontos do plano e P', Q', R' são os seus transformados por uma reflexão deslizante, então os pontos médios dos segmentos de reta $[P, P']$, $[Q, Q']$ e $[R, R']$ são colineares e pertencem à reta n (Greenberg, 1994; Schattschneider, 2003);

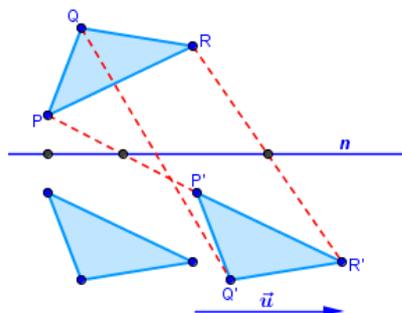


Figura 19. Ilustração gráfica da propriedade ii

- iii) A reflexão deslizante não preserva a orientação dos ângulos (Greenberg, 1994; Franco de Oliveira, 1997; Cabrita *et al.*, 2008; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012);
- iv) “A composição de duas reflexões deslizantes não é uma reflexão deslizante, pelo que a operação composição usual de funções não confere ao conjunto das reflexões deslizantes uma estrutura de grupo” (Breda *et al.*, 2011, p. 92).

Agora, apresentam-se as propriedades das Isometrias do plano, quanto à preservação ou inversão de ângulos orientados, aos pontos fixos e às retas fixas.

Isometrias	Pontos fixos	Retas fixas	Orientação dos ângulos
Identidade	Infinitos	Infinitos	Preserva
Translação	Nenhum	Infinitas (retas paralelas ao segmento orientado que define a translação)	Preserva
Rotação	Um (o ponto central)	Nenhuma	Preserva
Reflexão	Infinitos (os pontos pertencentes ao eixo de reflexão)	Infinitas (o eixo de reflexão e as retas ortogonais ao eixo de reflexão)	Inverte
Reflexão deslizante	Nenhum	Uma (o eixo da reflexão)	Inverte

Quadro 1. Propriedades das Isometrias do plano quanto à preservação de ângulos orientados, aos pontos fixos e às retas fixas (Greenberg, 1994; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012)

Seja o triângulo $T = [ABC]$ congruente ao triângulo $T_1 = [A_1B_1C_1]$. A partir das propriedades vistas anteriormente, descreve-se, na figura seguinte, um algoritmo para a identificação da Isometria que transforma T em T_1 .

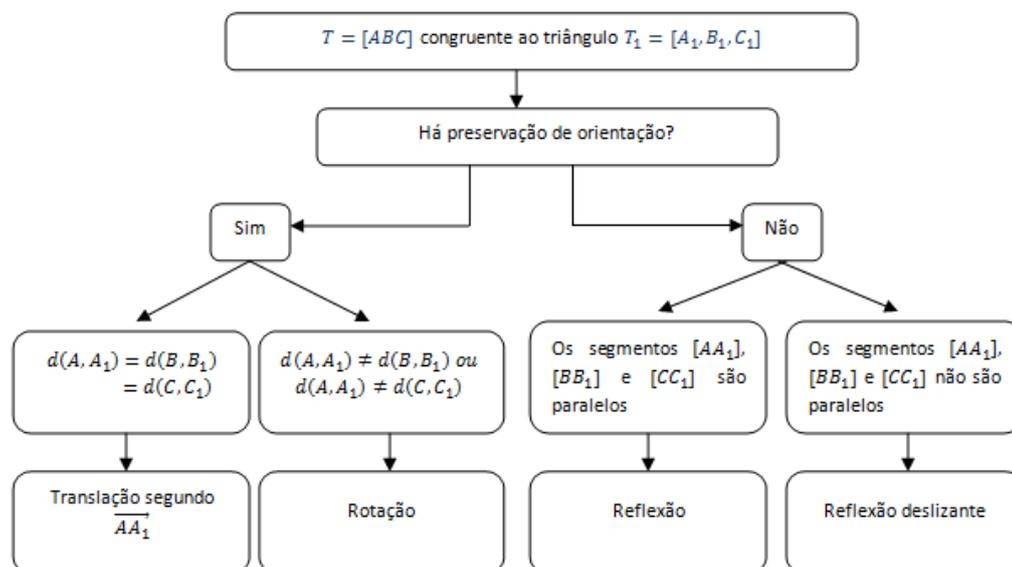


Figura 20. Algoritmo para a identificação da Isometria que transforma T em T_1 (Breda *et al.*, 2011, p. 92)

Segundo Schattschneider (2003) e Breda *et al.* (2011), é possível identificar as Isometrias do plano em pares de triângulos congruentes dados através da união dos vértices do triângulo original com as suas imagens finais. A identificação completa da transformação é determinada pelas posições destes segmentos de ligação, conforme se ilustra nas figuras seguintes:

- i) A Isometria que transforma $T = [ABC]$ em $T' = [A'B'C']$ preserva a orientação dos ângulos. Atendendo a que todos os segmentos que ligam os pontos às suas imagens são paralelos e têm o mesmo comprimento, $d(A, A') = d(B, B') = d(C, C')$, conclui-se que T é transformado em T' pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{AA'}$.

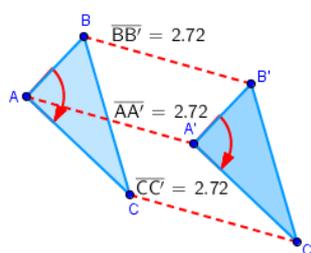


Figura 21. Translação que transforma T em T'

- ii) A Isometria que transforma $T = [ABC]$ em $T' = [A'B'C']$ preserva a orientação dos ângulos. Como os segmentos que ligam os pontos às suas imagens não são paralelos, os seus pontos médios não são colineares, $d(A, A') \neq d(B, B') \neq d(C, C')$, conclui-se que T é transformado em T' pela rotação cujo centro é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos. O ângulo de rotação é o ângulo com sentido definido

(nesta ordem) por um ponto da figura, pelo centro de rotação e pela imagem do primeiro ponto.

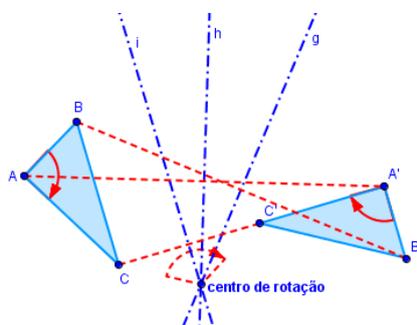


Figura 22. Rotação que transforma T em T'

iii) A Isometria que transforma $T = [ABC]$ em $T' = [A'B'C']$ não preserva a orientação dos ângulos. Todos os segmentos que ligam os pontos às suas imagens são paralelos, mas não têm o mesmo comprimento. Conclui-se que T é transformado em T' pela reflexão associada ao eixo que corresponde à mediatriz de cada segmento.

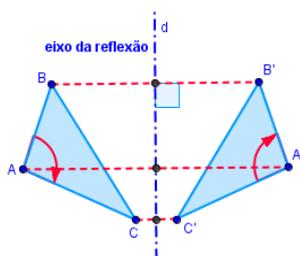


Figura 23. Reflexão que transforma T em T'

iv) A Isometria que transforma $T = [ABC]$ em $T' = [A'B'C']$ não preserva a orientação dos ângulos. Os segmentos que ligam os pontos às suas imagens não são paralelos, mas os seus pontos médios são colineares. Conclui-se que T é transformado em T' pela reflexão deslizante. O eixo da reflexão deslizante é a reta que contém os pontos médios dos segmentos. O vetor da reflexão deslizante é paralelo ao eixo da reflexão deslizante e é um cateto do triângulo retângulo, cuja hipotenusa liga um ponto à sua imagem.

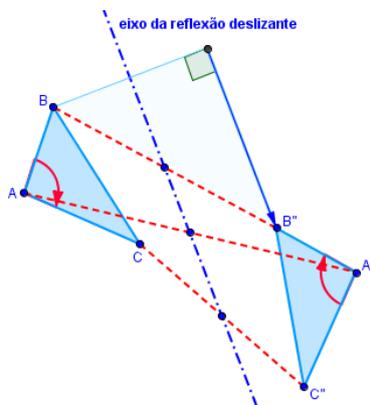


Figura 24. Reflexão deslizante que transforma T em T'

A seguir à explicação dos conceitos e propriedades das Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano, importa clarificar e aprofundar o conceito de Simetria tomando, como exemplo, uma figura plana F (um subconjunto do plano).

Designa-se Simetria de uma figura F toda a Isometria S do plano que deixa a figura F globalmente invariante, isto é, tal que $S(F) = F$ (Franco de Oliveira, 1997; Cabrita *et al.*, 2008; Veloso 2012). Procurar as simetrias de uma figura F qualquer significa descobrir as Isometrias do plano (translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante) que deixam F invariante:

- se T é uma translação, então T é uma simetria de translação de F ;
- se R é uma rotação, então R é uma simetria de rotação de F ;
- se E é uma reflexão, então E é uma simetria de reflexão de F ;
- se Rd é uma reflexão deslizante, então Rd é uma simetria de reflexão deslizante de F (Veloso, 2012).

O grupo $Sim(F)$ de uma figura F qualquer tem as seguintes propriedades:

- contém a identidade I ;
- se contém a Isometria S , contém a sua inversa S^{-1} ;
- se contém as Isometrias S_1 e S_2 , então contém as Isometrias $S_1 \bullet S_2$ (e $S_2 \bullet S_1$) (id, p. 57).

Destas propriedades, nota-se que o grupo $Sim(F)$ de uma figura qualquer admite uma estrutura de grupo relativamente à composição de transformações geométricas (id:ib).

Seguem-se alguns exemplos de figuras adaptadas de Cabrita *et al.* (2008), cujos grupos simétricos se analisam de seguida.

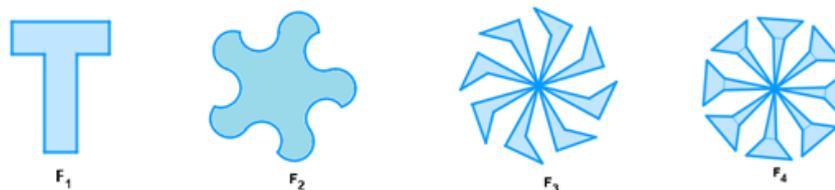
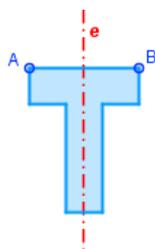


Figura 25. Exemplos de figuras com simetrias

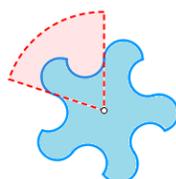
Da análise dos exemplos acima, quanto à simetria, verifica-se que a figura F_1 :

- Não possui simetrias de translação nem de reflexão deslizante.
- Possui uma simetria de reflexão, de eixo e .
- Possui uma simetria de rotação, a identidade.



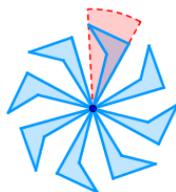
A figura F_2 :

- Não tem simetrias de translação, nem de reflexão, nem de reflexão deslizante.
- Tem 5 simetrias de rotação associada ao centro da figura e amplitudes 72° , 144° , 216° , 288° e 360° (identidade).



A figura F_3 :

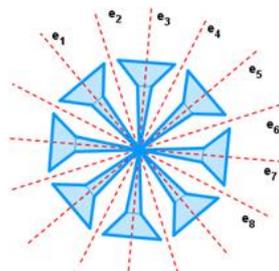
- Não tem simetrias de translação, nem de reflexão, nem de reflexão deslizante.
- Tem 8 simetrias de rotação associada ao centro da figura e amplitudes 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° e 360° (identidade).



A figura F_4 :

- Não possui simetrias de translação, nem de reflexão deslizante.

- Possui 8 simetrias de rotação associada ao centro da figura e amplitudes 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° e 360° (identidade).
- Tem 8 simetrias de reflexão, de eixos e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7 e e_8 .



Segue-se um exemplo de uma figura que não tem simetria, ou seja, em que não é possível encontrar uma transformação geométrica, diferente da transformação identidade, que a deixe invariante.



Figura 26. Exemplo de figura que sem simetria

A simetria de uma figura plana é um conceito matemático utilizado para organizar e classificar as figuras da arte decorativa ou ornamental ou outras figuras com características semelhantes. Veloso (2012), na observação e estudo das figuras da arte decorativa, identificou três grupos de simetrias – as rosáceas, os frisos e os padrões ou papéis de parede. No âmbito deste trabalho, proceder-se-á à definição e apresentação das características das rosáceas e dos frisos.

As rosáceas e os frisos constituem exemplos de figuras ricas para o aprofundamento do tema transformações geométricas e simetrias e possibilitam conexões entre temas matemáticos e entre a Matemática e a vida real. São muito utilizadas na arquitetura, em peças de decoração para confecção de bordados, calçadas, tecidos, painéis de azulejos, mosaicos, tapeçarias, etc.

Rosácea é toda a figura plana cujo grupo de simetrias tem um número finito de elementos (Veloso, 2012). O número dos seus elementos chama-se a ordem do grupo (Franco de Oliveira, 1997). Como consequências desta definição:

- i) “uma rosácea não tem simetrias de translação nem de reflexão deslizante, podendo ter apenas simetrias de rotação e de reflexão;
- ii) todas as simetrias de rotação de uma rosácea têm o mesmo centro;
- iii) os ângulos das simetrias de rotação de uma rosácea são todos múltiplos de um deles;

- iv) o grupo de simetrias de uma rosácea é um C_n ou um D_n de ordem n ” (Velo, 2012, p. 77-78).

Se uma rosácea F tem apenas simetrias de rotação (n rotações), que não se reduzem à identidade, então o grupo $Sim(F)$ é designado de grupo cíclico, C_n , $n \in \mathbb{N}$, sendo constituído pelos elementos $R, R^2, R^3, R^4, \dots, R^n = I$ associadas ao centro da rosácea, onde R é a simetria de rotação de menor ângulo positivo. Se uma rosácea F apresenta simetrias por rotação e reflexão (n rotações e n reflexões), então o grupo $Sim(F)$ chama-se grupo diedral, D_n , $n \in \mathbb{N}$ e é constituído por n simetrias de rotação $R, R^2, R^3, R^4, \dots, R^n = I$ associadas ao centro da rosácea e n simetrias de reflexão de eixos que passam pelo centro da rosácea (Breda, 2006; Velo, 2012).

Nas figuras 27 e 28, ilustram-se exemplos de rosáceas com grupos de simetrias cíclico e diedral.



Figura 27. Rosáceas com grupo de simetrias cíclico



Figura 28. Rosáceas com grupo de simetrias diedral

Pode-se construir uma rosácea com um grupo de simetrias cíclico C_n partindo da divisão do círculo em n setores congruentes. Coloca-se num dos setores uma figura (que, para além da identidade, não contém qualquer outra simetria) e consideram-se as imagens desta figura pelas rotações de centro no centro do círculo e de amplitudes $\frac{360^\circ}{n}k, k=1,2,\dots,n$, para a sua obtenção, conforme a Figura 29 (Breda *et al.*, 2011).

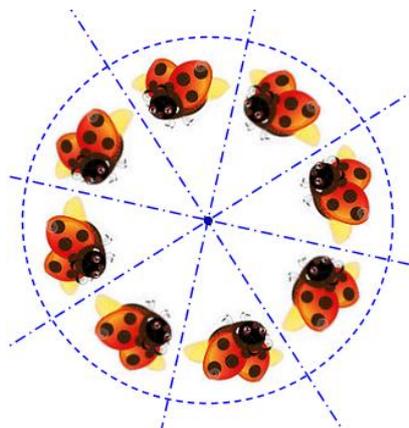


Figura 29. Rosácea com grupo de simetria C_8

Uma das formas de construção de uma rosácea com um grupo de simetrias diedral D_n é partir da divisão de um círculo em $2n$ setores congruentes. Rotulando, “de forma circular (consecutiva), as $2n$ semi-rectas fronteira destes n setores, por s_1, s_2, \dots, s_{2n} ”, e nomeando a reta que contém a semi-reta s_i por l_i , pode-se obter a rosácea pretendida, com os seguintes passos:

1. Colocar uma figura F (que, para além da identidade, não contém qualquer outra simetria) num dos setores, por exemplo, s_1 e s_2 ;
2. Efetuar a reflexão de F associada à recta l_1 ;
3. Efetuar a reflexão da imagem de F obtida e refleti-la segundo a reta l_2 ;
4. Repetir este processo usando todas as retas (id, p. 100). (Ver Figura 30, para $n = 4$).

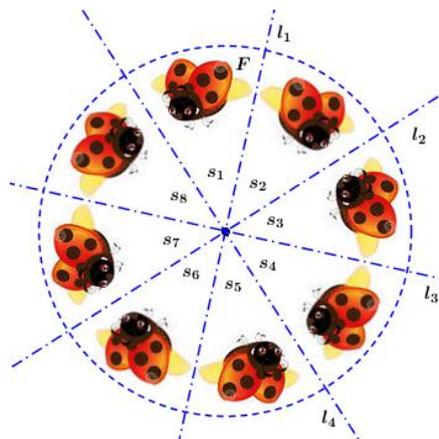


Figura 30. Rosácea com grupo de simetria D_4

Os polígonos regulares constituem exemplos de rosáceas com grupo de simetria diedral e, de acordo com Veloso (1998), apresentam um elevado grau de simetria. Segundo Franco de Oliveira (1997), um polígono é regular quando tem todos os lados e os ângulos congruentes.

Na Figura 32, ilustram-se os tipos de simetria que alguns polígonos regulares possuem, nomeadamente, um quadrado, um triângulo equilátero e um pentágono regular.

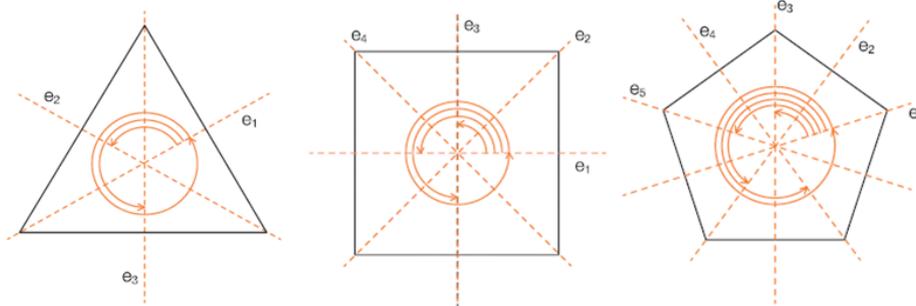


Figura 31. Visualização gráfica de simetrias de um triângulo equilátero, de um quadrado e de um pentágono regular (Cabrita *et al.*, 2008, p. 106-107)

Constata-se que:

- O triângulo equilátero possui 3 *simetrias de reflexão* - retas que passam pelos vértices e pelos pontos médios dos lados opostos; 3 *simetrias de rotação* associadas ao centro da figura e de amplitudes 120° , 240° e 360° . Portanto, o grupo de simetrias do triângulo equilátero é de ordem 6 e designa-se por D_3 ;
- O quadrado possui 4 *simetrias de reflexão* - retas que passam por cada par de vértices opostos e pelos pontos médios de lados opostos; 4 *simetrias de rotação* associadas ao centro da figura e de amplitudes 90° , 180° , 270° e 360° . Assim, o grupo de simetrias do quadrado é de ordem 8, e designa-se por D_4 ;
- O pentágono regular possui 5 *simetrias de reflexão* - retas que passam pelos vértices e pelos pontos médios dos lados opostos; 5 *simetrias de rotação* associadas ao centro da figura e de amplitudes 72° , 144° , 216° , 288° e 360° . Logo, o grupo de simetrias do pentágono regular é de ordem 10, e denota-se por D_5 .

Generalizando, o polígono regular de n lados possui:

- n simetrias de reflexão: i) caso o número de lados seja ímpar, os eixos passam pelos vértices e pelos pontos médios dos lados opostos; ii) caso o número de lados seja par, os eixos passam por pares de vértices opostos e pelos pontos médios de pares de lados opostos,
- n simetrias de rotação: amplitudes $(360/n)^\circ$, $2 \times (360/n)^\circ$, $3 \times (360/n)^\circ$, $4 \times (360/n)^\circ$, ... e $n \times (360/n)^\circ$ (id, p. 107)

Veja-se de seguida a definição e tipos de frisos.

Friso é uma figura plana qualquer, constituída por um conjunto de simetrias que cumpre a seguinte condição: “existe uma simetria de translação T de módulo mínimo $\neq 0$, tal que as simetrias de translação da figura são todas as potências de expoente inteiro de T ” (Veloso, 2012, p. 75). O conjunto $Sim(F)$ é constituído por uma infinidade de simetrias de translação. As translações do conjunto de simetrias de friso formam um grupo cíclico infinito gerado por T . A característica principal dos frisos consiste em permanecerem fixos ou invariantes para uma translação mínima (Franco de Oliveira, 1997). Todas as simetrias de translação de um friso seguem uma única direção (Breda *et al.*, 2011), conforme alguns dos exemplos a seguir:



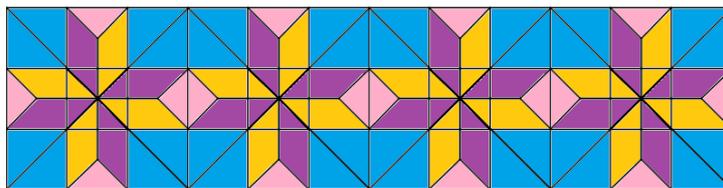


Figura 32. Exemplos de frisos

Para além das infinitas simetrias de translação que estão sempre presentes nos frisos, podem existir ainda as seguintes:

- *simetrias de meia-volta;*
- *simetrias de reflexão* de eixo horizontal e/ou eixo vertical;
- *simetrias de reflexão deslizante* não triviais (Veloso, 2012).

Existem 7 tipos distintos de simetria de frisos que apresentam estas características (Franco de Oliveira, 1997; Breda *et al.*, 2011; Veloso, 2012). Com base em Washburn e Crown, Breda *et al.* (2011) e Veloso (2012) apresentam um conjunto de quatro letras $pxyz$ atribuído a cada tipo de friso:

- a primeira letra é sempre p ;
- $x = m$ ou $x = 1$
 - $x = m$, se o grupo de simetrias de friso contiver simetrias de reflexão de eixo vertical
 - $x = 1$, se não se verificar o caso anterior;
- $y = m$ ou $y = a$ ou $y = 1$
 - $y = m$, se o grupo de simetrias do friso tiver uma simetria de reflexão de eixo horizontal,
 - $y = a$, se o grupo de simetrias do friso contiver simetrias de reflexão deslizante não triviais,
 - $y = 1$, nos restantes casos;
- $z = 2$ ou $z = 1$
 - $z = 2$ se o grupo de simetrias do friso tiver simetrias de meia-volta e,
 - $z = 1$ nos outros casos.

Desta forma, os sete tipos de frisos são $p111$, $p112$, $p1a1$, $p1m1$, $pm11$, $pma2$, $pmm2$.

Ilustram-se, de seguida, exemplos de construção dos 7 tipos de frisos adaptados de Veloso (2012) e Breda *et al.* (2011), a partir de uma figura que não possui outro tipo de simetria para além da identidade, a Figura 33.

Analogamente a Veloso (2012), apresentam-se dois retângulos cinzentos à direita e à esquerda do friso para mostrar que ele se estende indefinidamente.



Figura 33. Modelo k

Friso do tipo $p111$

Para se obter um exemplo de friso deste tipo, considera-se um vetor \overline{PQ} (não nulo) e a figura que contém as imagens de K pelas translações $T_{\overline{PQ}}$, $T_{\overline{QP}}$ e por todas as translações obtidas por composição destas (Breda *et al.*, 2011).

A simetria de translação T de módulo $\neq 0$, definida pelo vetor \overline{PQ} transforma o desenho 0 no desenho 1 (o 1 no 2 , o 2 no 3 , o 3 no 4 , e assim sucessivamente). As simetrias de friso do tipo $p111$ são as potências de expoente inteiro de T (Veloso, 2012).

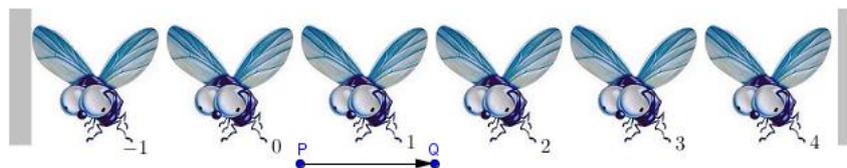


Figura 34. Friso do tipo $p111$

Friso do tipo $p112$

Para construir um exemplo de friso deste tipo, considera-se o exemplo de friso F construído na Figura 35. Seja O , um ponto qualquer, o centro de uma meia-volta do plano. Obtém-se a imagem F' por meio de uma meia-volta de centro em O . Pelo processo atrás descrito, o friso do tipo $p112$ (Figura 35) é obtido pela união de F com F' (Veloso, 2012).

Ao friso F foi adicionada apenas a simetria de meia-volta de centro em O . Contudo, aparecem outras infinitas simetrias de meia volta com centros nos pontos à esquerda e à direita de O , todos sobre a reta c que é o eixo central do friso. A distância entre dois centros consecutivos das simetrias de meia-volta é igual à metade do comprimento do vetor \overline{PQ} . Este tipo de friso contém as simetrias de translação e simetrias de meia-volta em número infinito, com centros sobre c (id).

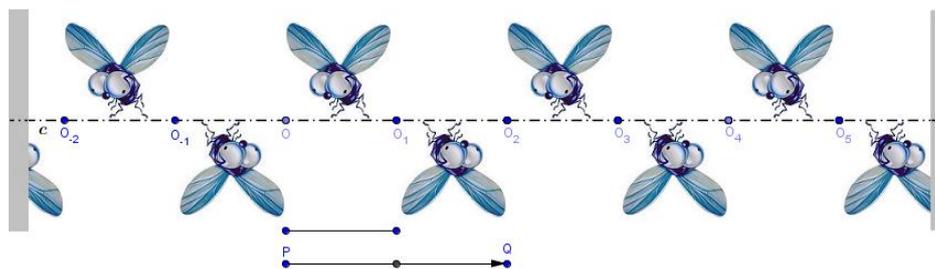


Figura 35. Friso da classe $p112$.

Friso do tipo $p1a1$

Para obter um exemplo de friso deste tipo, fixa-se uma reta c (centro do friso) e considera-se arbitrariamente um vetor \overrightarrow{PQ} (não nulo), com a direção de c . A partir do modelo K , tomam-se os seus transformados pelas reflexões deslizantes de eixo c e segundo os vetores \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{QP} , respetivamente. De seguida, repete-se o mesmo procedimento para as imagens de K obtidas. Obtém-se o friso da classe $p1a1$ pela repetição sucessiva deste processo (Breda *et al.*, 2011).

A reta c , eixo das simetrias de reflexão deslizante, é o eixo central do friso. Os vetores que “definem as translações destas reflexões deslizantes têm por comprimentos metade dos módulos das translações do friso que são potências ímpares da translação de módulo mínimo” (Veloso, 2012, p. 104). Este tipo de friso contém as simetrias de translação e as simetrias de reflexão deslizante não triviais em número infinito (id).

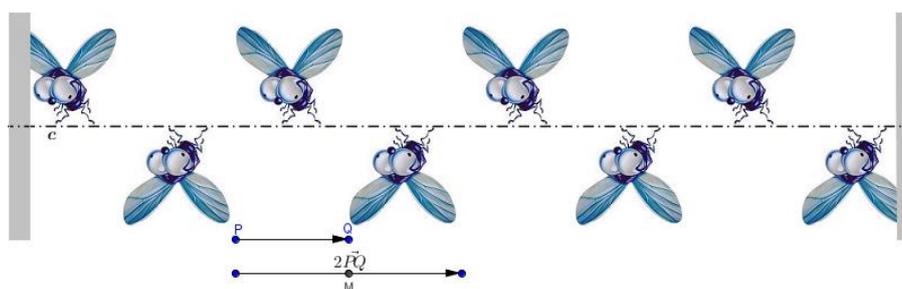


Figura 36. Friso da classe $p1a1$.

Friso do tipo $p1m1$

Para construir um exemplo de friso deste tipo, fixa-se uma reta c (centro do friso) e considera-se arbitrariamente um vetor \overrightarrow{PQ} (não nulo), com a direção de c . A partir do modelo K , considera-se o motivo (Figura 37) constituído por K e o seu transformado K' pela reflexão de eixo c (Breda *et al.*, 2011).

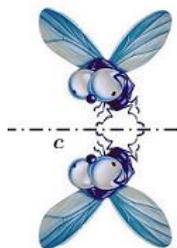


Figura 37. Motivo de um friso da classe $p1m1$.

Obtém-se um friso do tipo $p1m1$ considerando, para além deste motivo, os seus transformados pelas translações $T_{\overline{PQ}}$, $T_{\overline{QP}}$ e por todas as translações que são composição destas (id). Este tipo de friso contém as simetrias de translação e apenas uma simetria de reflexão horizontal de eixo c , eixo central do friso (Veloso, 2012).

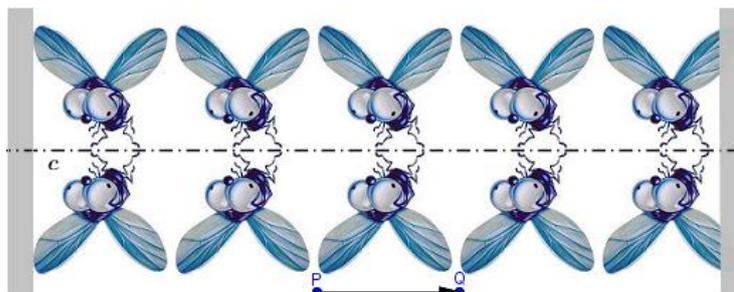


Figura 38. Friso da classe $p1m1$.

Friso do tipo $pmm2$

Para obter um exemplo de friso deste tipo, fixa-se uma reta c (centro do friso), uma reta l perpendicular a c e um vetor \overline{PQ} (não nulo), com a direção de c . Seja J o ponto de interseção das retas c e l . Considera-se o bloco B_l constituído pelo modelo K e sua imagem pela reflexão de eixo c (Figura 39) e o bloco B constituído por B_l e sua imagem pela reflexão de eixo l (Breda *et al.*, 2011).

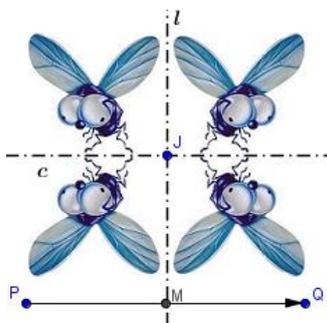


Figura 39. Motivo de um friso do tipo $pmm2$.

Obtém-se o friso do tipo $pmm2$ considerando as imagens do motivo pelas translações $T_{\overline{PQ}}$, $T_{\overline{QP}}$ e por todas as translações que são composição destas (id).

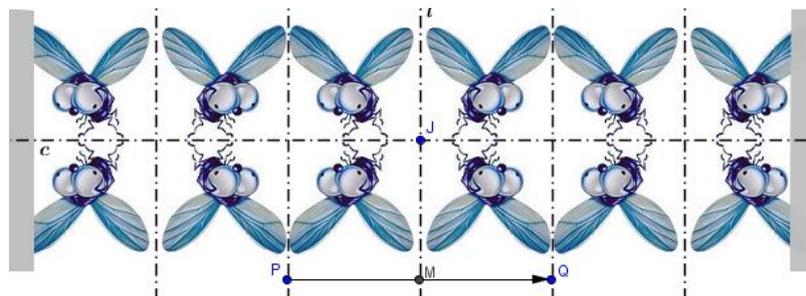


Figura 40. Friso da classe $pmm2$.

Este tipo de friso contém as simetrias de translação, as simetrias de reflexão de eixos verticais, uma simetria de reflexão de eixo horizontal e infinitas simetrias de meia-volta (Veloso, 2012).

Friso do tipo $pm11$

Para a construção de um friso deste tipo, fixa-se um vetor \overline{PQ} (não nulo) e uma reta l com direção perpendicular a \overline{PQ} . A partir do modelo K , considera-se o motivo (Figura 41) constituído por K e o seu transformado K' pela reflexão de eixo l (Breda *et al.*, 2011).

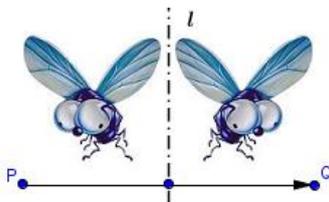


Figura 41. Motivo de um friso do tipo $pm11$.

Obtém-se um friso do tipo $pm11$, considerando as imagens do motivo pelas translações $T_{\overline{PQ}}$, $T_{\overline{QP}}$ e pelas translações que são composição destas (id).

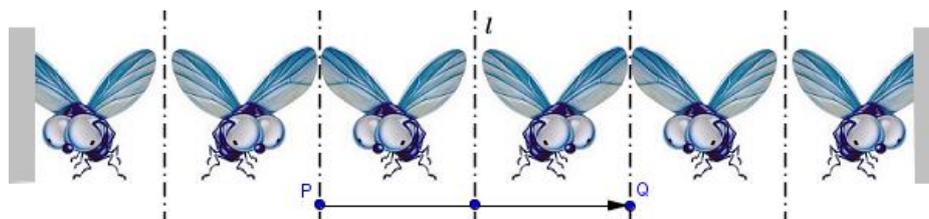


Figura 42. Friso do tipo $pm11$.

Este tipo de friso contém as simetrias de translação e simetrias de reflexão de eixos verticais, em número infinito. A distância de dois eixos consecutivos é igual à metade da medida de comprimento do vetor que define a translação de módulo mínimo do friso (Velo, 2012).

Friso do tipo $pma2$

Para a construção de um friso deste tipo, fixa-se uma reta c (centro do friso) e dois pontos distintos P e Q de c . Seja M o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$. Considera-se o bloco B (Figura 43) constituído por K e o seu transformado K' pela rotação de centro em M e medida de amplitude 180° (Breda *et al.*, 2011).

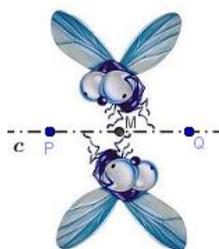


Figura 43. Bloco B de um friso da classe $pma2$.

Considera-se a reta l , que passa por Q e é perpendicular a c . Seja o motivo constituído por B e o seu transformado pela reflexão de eixo l (id).

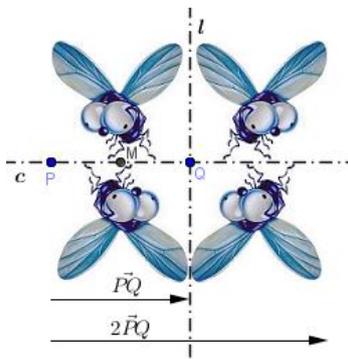


Figura 44. Motivo de um friso da classe $pma2$.

Obtém-se o tipo de friso $pma2$, considerando-se as imagens do motivo pelas translações $T_{2\overline{PQ}}$, $T_{2\overline{QP}}$ e pelas translações que são composições destas ($id:ib$).

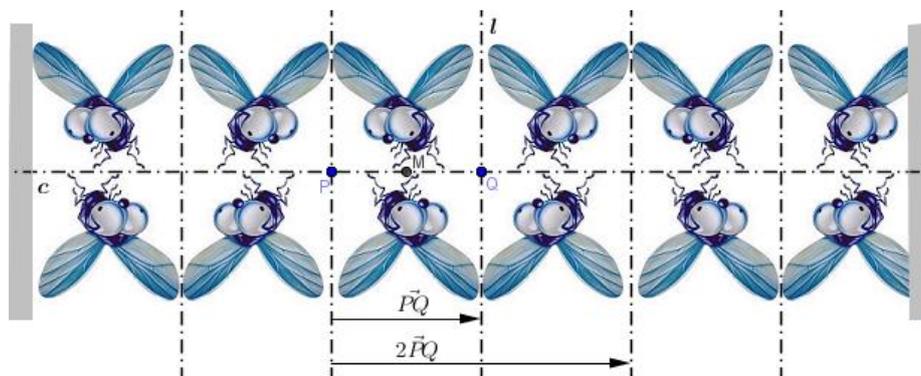


Figura 45. Friso da classe $pma2$.

Este tipo de friso contém as simetrias de translações, simetrias de reflexões de eixo vertical, infinitas simetrias de reflexão deslizante não triviais e infinitas simetrias de meia-volta (Veloso, 2012).

De seguida, apresenta-se o fluxograma de Washburn e Crown para classificação de frisos.

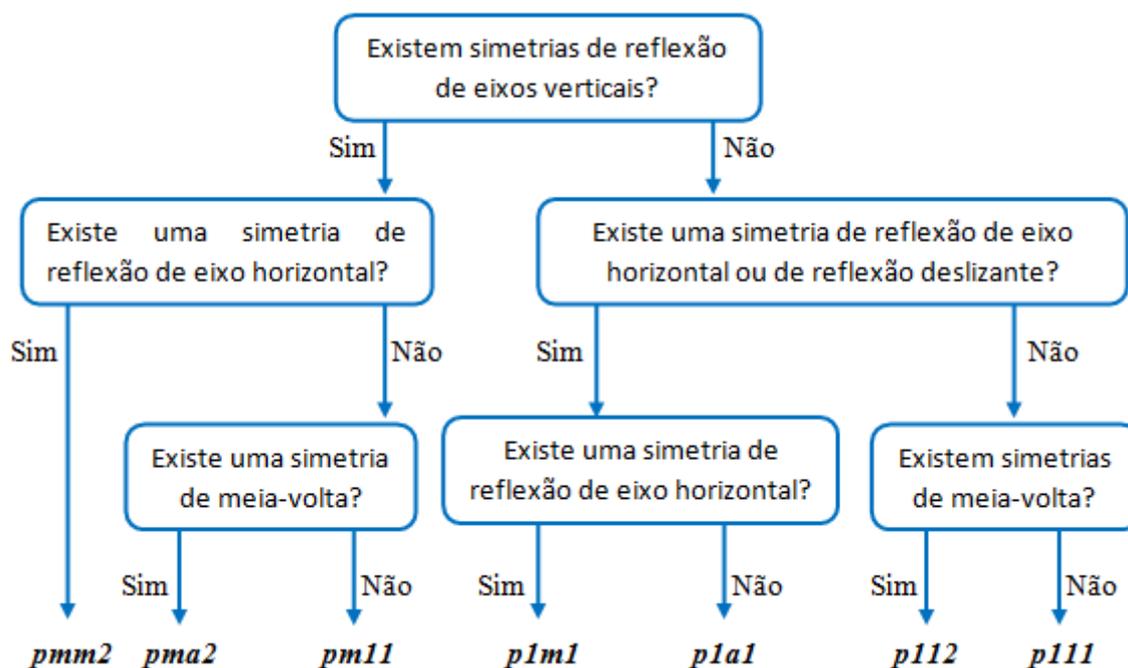


Figura 46. Fluxograma de Washburn e Crown para classificação de frisos (Veloso, 2012, p. 111)

Relativamente a estes aspetos, Veloso (1998) realça que é necessário valorizar o estudo das transformações geométricas pela sua importância no ensino da Geometria, tendo como ponto de partida o desenvolvimento de intuições que os alunos já possuem e gradativamente a sua formalização ao longo de toda a escolaridade. De acordo com Bastos (2007), o estudo das transformações geométricas pode promover a compreensão da riqueza da área da Geometria

SILVEIRA, A. (2015). *O GEOGEBRA NA FORMAÇÃO E APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS NO PLANO EUCLIDIANO*. (TESE DE DOUTORAMENTO). AVEIRO: UNIVERSIDADE DE AVEIRO.

pela diversidade que apresenta, pela possibilidade de se estabelecer conexões entre temas matemáticos e entre estes e o dia-a-dia e/ou outras áreas disciplinares.

SILVEIRA, A. (2015). *O GEOGEBRA NA FORMAÇÃO E APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS NO PLANO EUCLIDIANO*. (TESE DE DOUTORAMENTO). AVEIRO: UNIVERSIDADE DE AVEIRO.

Bibliografia

- APM (2009). Renovação do Currículo de Matemática. *Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988*. Edição comemorativa. Lisboa: APM. ISBN: 978-972-8768-41-6.
- Bastos, R. (2007). Transformações geométricas. Notas sobre o Ensino da Geometria (GTG), *Educação e Matemática*, 94, 23-27. Lisboa: APM.
- Breda, A. (2006). *Seminário de Aprofundamento. Transformações no Plano*. Aveiro: Universidade de Aveiro (doc. Policopiado).
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, L., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Breda, A., Trocado, A., & Santos, J. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, 5(1), 60-84.
- Cabrita, I., Pinheiro, L., Pinheiro, J., & Sousa, O. (2008). *Novas Trajectórias em Matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro. ISBN: 978-972-789-273-0.
- Franco de Oliveira, A. J. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta. ISBN: 972-674-224-2.
- Greenberg, M. J. (1994). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and History* (3.ª Edição). New York: w. H. Freeman and Company. ISBN 0-7167-2446-4.
- Hohenwarter M. & Hohenwarter J. *Ajuda GeoGebra. Manual Oficial da Versão 3.2*. (Tradução e adaptação para português de Portugal. de A. Ribeiro (2009). Disponível em: http://www.GeoGebra.org/help/docupt_PT.pdf (acedido 7 de maio de 2010)
- Hohenwarter, M. (2013). GeoGebra 4.4 – from Desktops to Tablets. *Indagatio Didactica*, 5(1), 8-18.
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). *Dynamic Mathematics With GeoGebra*. Disponível em: <http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html> (acedido 17 de abril de 2012).
- Mariotti, M. A. (1999). *Geometry: dynamic intuition and theory*. Dipartimento di Matematica Università di Pisa. Itália. Disponível em: <http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/mariotti.pdf> (acedido 7 de junho de 2012).
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- NCTM (2000). Executive Summary - *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf (acedido 6 de maio de 2010)
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2.ª Edição). Lisboa: APM. (Texto original publicado em inglês em 2000). ISBN: 978-972-8768-24-9.
- Néri, I. C. (2010). *Geometria Dinâmica*. Disponível em: <http://www.Geometriadinamica.com/> (acedido 7 de maio de 2010)
- Neto, T., Breda, A., & Godino, J. (2011). Desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a Geometrias planas. *Quadrante*, 20 (1), 83-98.

SILVEIRA, A. (2015). *O GEOGEBRA NA FORMAÇÃO E APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS NO PLANO EUCLIDIANO*. (TESE DE DOUTORAMENTO). AVEIRO: UNIVERSIDADE DE AVEIRO.

Ponte J. P., Serrazina, L. Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Schattschneider, D. (2003). Visualização de conceitos da teoria dos grupos com *software* de Geometria dinâmica. In *Geometria Dinâmica. Selecção de textos do livro Geometry Turned On!*, (pp. 137-145). Lisboa: APM. ISBN: 972-8768-06-0.

Sebastião e Silva, J. (1999). *Textos didácticos, Vol. I*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Veloso, E. (1998). *Geometrias: Temas actuais- Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. ISBN: 973-8353-26-X.

Veloso, E. (2004). Educação Matemática dos futuros professores. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro, *A Matemática na Formação do Professor* (pp. 31-68). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade de Ciências de Educação. ISBN: 972-8614-04-7.

Veloso, E. (2012) Simetria e Transformações Geométricas. Textos de Geometria para Professores. Grupo de Trabalho de Geometria, APM. ISBN: 978-972-8768-49-2.

Veloso, E., & Candeias, N. (2003). Prefácio. In J. King & D. Schattschneider (Eds.). *Geometria dinâmica. Selecção de textos do livro Geometry Turned On!* Lisboa: APM. ISBN: 972-8768-06-0.