

三維空間的投影與交角： 學習難點、教具使用與教學設計

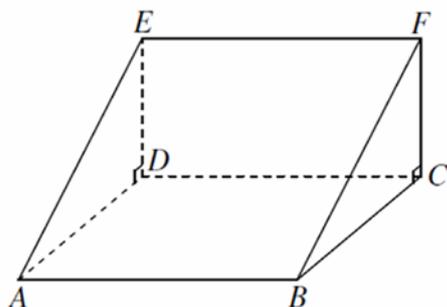
柯志明
香港教育局

引言

2001 年實施的初中數學課程加入了認識投影、線與平面的交角及兩平面的交角等三維空間的概念（不需進行計算），重點是讓學生及早建立這些三維空間的概念，幫助他們日後在高中處理三角公式在三維空間的應用題。經過十多年的實踐，我們的學生對這些概念掌握得如何？從歷年全港性系統評估（Territory-wide System Assessment, TSA）的數據看來，學生對這些概念的掌握實在未如理想。以下是一些相關的 TSA 題目及其全港答對率舉隅。

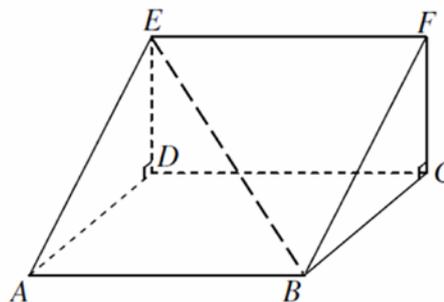
2008 9MC4 Q39 (39.0%)

圖示一個三角柱。 $ABCD$ 及 $DCFE$ 都是長方形， $ABCD$ 是水平平面，而 $DCFE$ 是鉛垂平面。寫出斜面 $ABFE$ 與鉛垂平面 $DCFE$ 的交角。



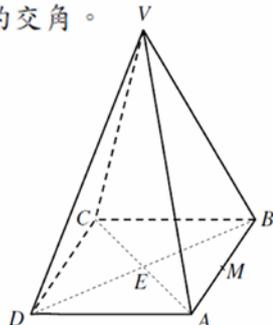
2010 9MC3 Q36 (56.4%)

圖示一個三角柱。 $ABCD$ 及 $DCFE$ 都是長方形， $ABCD$ 是水平平面，而 $DCFE$ 是鉛垂平面。寫出線 BE 在平面 $ABCD$ 上的投影。



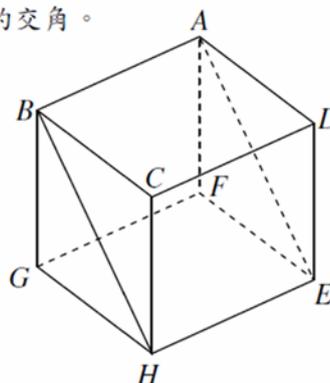
2010 9MC1&4 Q32 (27.5%)

$VABCD$ 是一個直立稜錐，它的底 $ABCD$ 是正方形，且是水平平面。 E 是 AC 和 BD 的交點， M 是 AB 的中點。寫出平面 VAB 與平面 $ABCD$ 的交角。



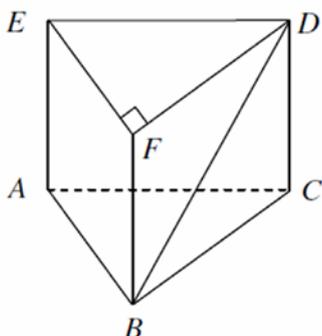
2011 9MC3 Q37 (44.6%)

$ABCDEFGH$ 是一個長方體，寫出斜面 $ABHE$ 與水平平面 $ABCD$ 的交角。



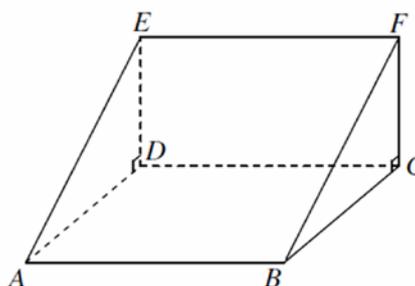
2011 9MC1 Q37 (22.0%)

圖中所示為一個直立稜柱 $ABCDEF$ ，它的底 ABC 是直角三角形，且是水平平面。寫出直線 BD 與平面 $ABFE$ 的交角。



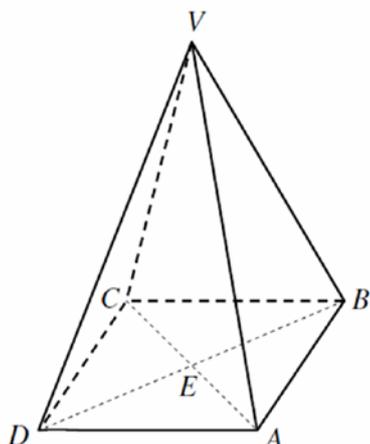
2012 9MC2 Q38 (41.8%)

圖示一個三稜柱。 $ABCD$ 及 $CFED$ 都是長方形， $ABCD$ 是水平平面，而 $CFED$ 是鉛垂平面。寫出 AE 在平面 $CFED$ 上的投影。



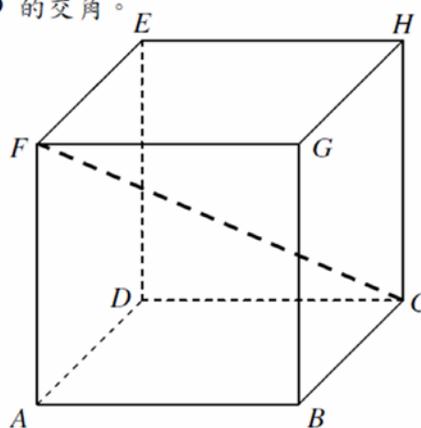
2012 9MC1 Q38 (57.5%)

$VABCD$ 是一個直立稜錐，它的底 $ABCD$ 是正方形，且是水平平面。 E 是 AC 和 BD 的交點。寫出線 VA 與平面 $ABCD$ 的交角。



2013 9MC4 Q37 (54.0%)

在圖中， $ABCDEFGH$ 是正方體， CF 是正方體的對角線。寫出 CF 與水平平面 $ABCD$ 的交角。



整體而言，TSA 歷年涉及三角柱或長方體的投影和交角等題目的答對率介乎 40% 至 60% 之間。一般來說，學生在投影或線與平面交角的題目的表現比兩平面交角的題目好，而學生找出線段與水平平面的交角或投影的表現亦比找出線段與鉛垂平面的交角或投影為佳。表現特別差的兩題分別是 2010 年的辨認直立稜錐的斜面和水平面的交角，及 2011 年的辨認直立三角柱的直線及鉛垂平面交角，兩條題目的答對率都低於 30%。

這些題目只要求學生直觀辨認立體圖形的投影及交角，並不涉及計算，可是學生的表現持續欠佳，反映學生於這個課題上有學習困難。為了解學生在這個課題上的學習難點，我們於不同的學校進行研究，了解學生對這些概念的認知情況，並探討有效的教學策略及開發相關的學習資源。

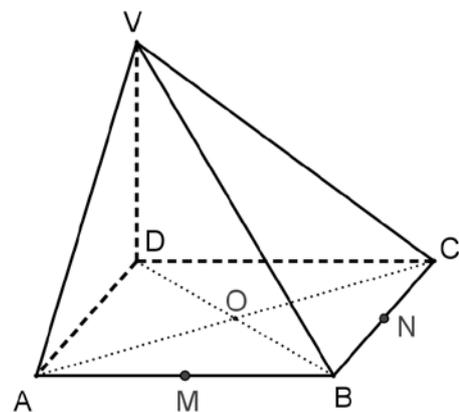
學習難點

我們先後在幾間不同學校透過一些診斷課業進行學生訪談，得出以下較普遍的學生學習難點：

- (一) 學生能直觀地找出投影，卻不認識投影和垂直概念的關係；
- (二) 學生不知道線和平面的交角是線和其投影的夾角；
- (三) 學生不認識三維空間角度的大小或變化，甚至認為直線和平面上任何和它相交的直線的夾角都是一樣大小；
- (四) 學生不知道如何定義兩平面的交角；
- (五) 學生未能從立體圖形的平面圖像中辨認直角。

有關最後的一點，其實不單是對學生，即使對數學老師來說可能都存在困難。先和各位讀者做一個測試：圖一顯示一個四稜錐 $VABCD$ ，它的底 $ABCD$ 是長方形。 VD 是錐體的高， M 和 N 分別是 AB 和 BC 的中點， O 是 AC 和 BD 的交點。問平面 VBC 和平面 $ABCD$ 的交角是甚麼？

大家能否憑直觀立刻得出答案？若



圖一

否，你有甚麼方法幫助你得出正確答案？筆者曾於一些現職數學教師的培訓活動中讓老師試做這條問題，發覺大部份老師都未能憑直觀即時找到答案，需要思考一番，而最終有部份的老師未能得出正確答案。在錯誤答案中，有幾位老師認為平面 VBC 和平面 $ABCD$ 的交角是 $\angle VNO$ ，有幾位老師認為是 $\angle VND$ ，也有兩位老師認為是 $\angle VBA$ ，而正確的答案是 $\angle VCD$ 。

從以上的例子看到，要從立體圖形的平面圖像中辨認直角未必是一件容易的事。為甚麼圖一中的 $\angle VCB$ 是直角而 $\angle VNB$ 和 $\angle VBC$ 都不是？這是否只能靠我們的「直觀」得知？若「直觀」不夠強，是否就束手無策？

我們在訪問學生的時候，發現空間感強的學生往往能夠單憑「直觀」就快而準地從立體圖形的平面圖像中辨認出直角、投影及交角等，但他們往往只是知其然而不知其所以然，未能解釋答案為何正確。另一方面，空間感稍遜的學生卻沒有這些「直觀」，於是索盡枯腸，甚至自創一些方法幫助自己辨認直角、投影及交角。可惜這些自創的方法往往似是而非，未能幫助他們找出正確答案。

有見及此，我們設計了一套包括實物模型、動態幾何軟件及配套工作紙的教材，透過構作 (construction) 及建立學生的論證 (reasoning) 能力，加強他們對立體圖形的平面圖像的視覺能力 (visualization)，並幫助他們建立找出投影及交角的客觀方法。

教學設計一：垂直和投影

這套教材的中心思想，是以「線和平面垂直」的概念為中心，將「投影」、「線和平面的交角」及「兩平面的交角」三個概念聯繫起來。由於「線和平面垂直」的概念至關重要，必須要花時間和學生好好地建立。

為引入「線和平面垂直」概念，我們先向每個學生派發一支能屈曲的飲管，然後著學生把飲管屈成直角，接著我們叫學生二人一組，討論如何令到飲管較長的部份垂直於桌面。從課堂觀察，我們發現絕大部份的學生都能夠令飲管的較長部份大致垂直於桌面。老師接著可以利用內含 Cabri 3D 動態圖片的簡報 (圖二)，和學生討論如何運用清晰的數學語言描述令飲管較長部份垂直於桌面的條件 (圖三)。和學生討論完直線垂直於平面的條件後，老師可拖拉綠點，展示若一直線垂直於平面，它亦必然垂直於在

平面上的所有直線（圖四）。

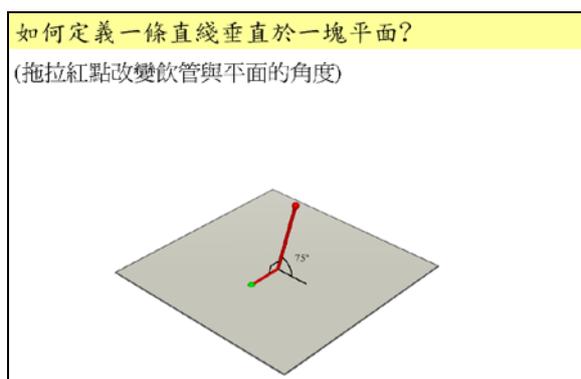


圖 二

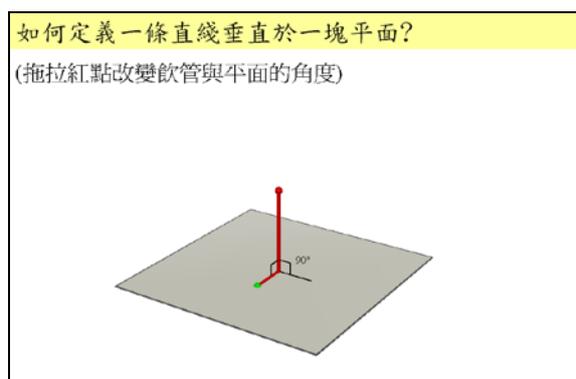


圖 三

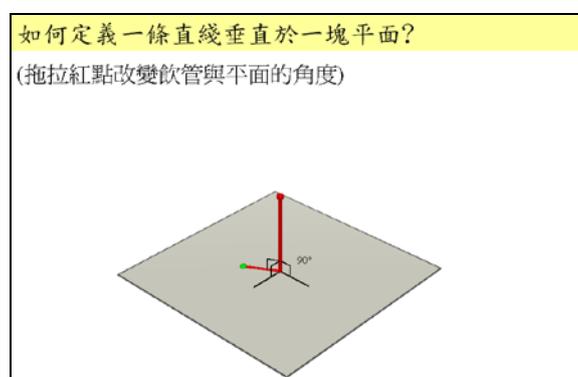
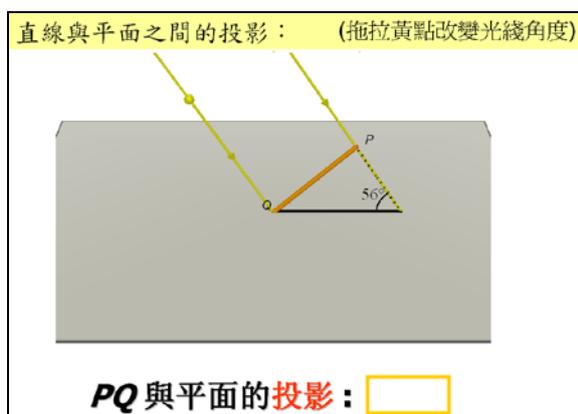
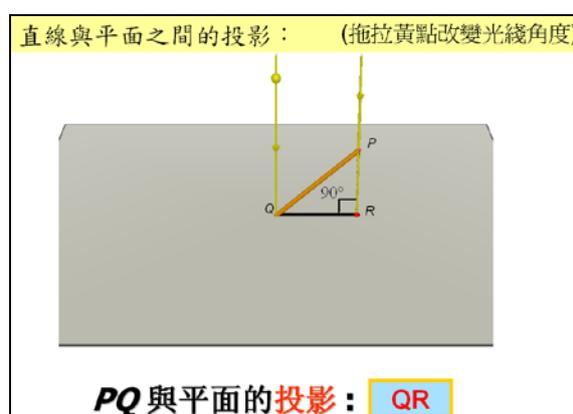


圖 四

有了線和平面垂直的觀念後，老師就可以利用另一片的簡報，透過展示光線從不同的角度射向地面所產生的影子（圖五(a)），引入投影是光線垂直於地面時所產生的影子這個概念（圖五(b)）。



(a)



(b)

圖 五

建立了垂直及投影這兩個重要的概念後，我們接著就要培養學生透過簡單的論證 (reasoning) 去判斷直角和投影的能力。我們設計了一份工作紙，要求學生辨認長方體內的空間對角線 (space diagonal) 於長方體的不同平面上的投影。我們先於課堂前每人派發一張印有長方體摺紙圖樣的透明膠片及一條用來製作對角線的手工鐵線，著他們在家中製作一個透明的長方體。這個長方體的每個面都畫出了它的對角線，用以展示對角線在每個平面上可能出現的投影。完成長方體後，學生把手工鐵線插進長方體，並帶回課堂使用 (圖六)。

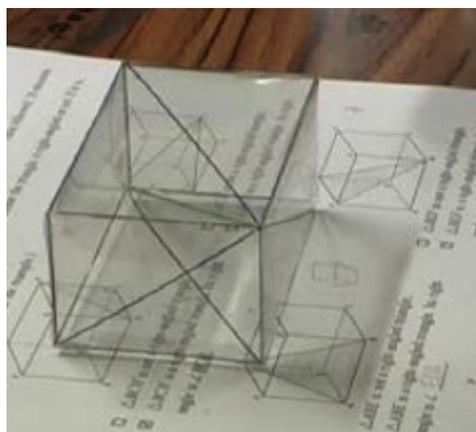
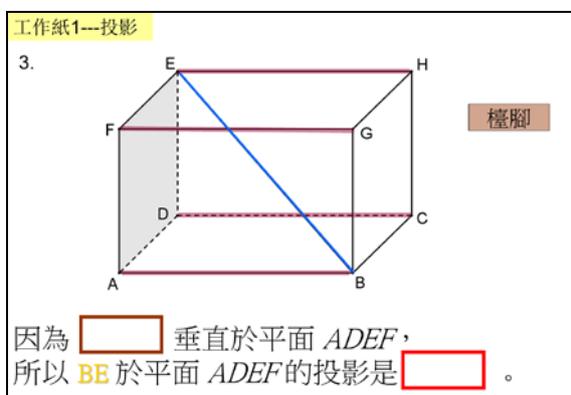
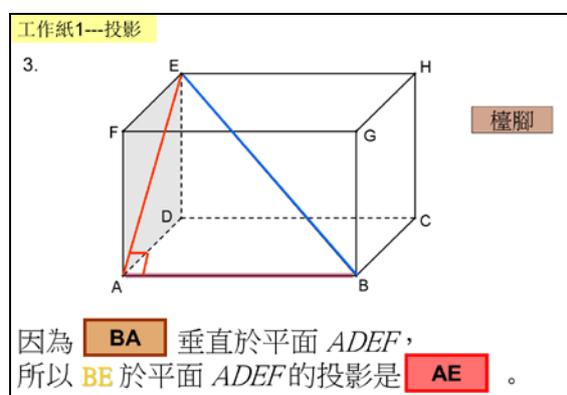


圖 六

長方體模型的目的，是讓空間感稍遜的學生能較易了解工作紙中的平面圖像所代表的立體圖形的真實模樣，並且透過模型看到直角及投影在平面圖像中的位置。可是我們並不希望學生要倚賴模型才可以找到直角和投影。我們在工作紙中，讓學生們重覆地以「因為...垂直於平面...，所以...於平面...的投影是...」這套論證語言，判斷投影的位置。我們亦以「枱面」和「枱腳」的垂直關係作比喻，幫助學生找出垂直於平面的線段。例如在圖七(a)中，要找出 BE 在鉛垂平面 ADEF 的投影，學生先想像 ADEF 是「枱面」，它有四條垂直於「枱面」的「枱腳」AB、DC、EH 及 FG，而和對角線 BE 有關的是 AB。接著教師要學生說出「因為 BA 垂直於平面 ADEF，所以 BE 於平面 ADEF 的投影是 AE」(圖七(b))，解釋投影是 AE 的理據。



(a)



(b)

圖 七

我們發現，這個以論證判斷投影的方法，對空間感強和空間感稍遜的學生同樣有幫助。對空間感強的學生而言，這個論證方法讓他們能夠清楚地解釋自己從直觀得來的結論，令他們不再知其然而不知其所以然，增強了他們的信心。對空間感弱的學生來說，這套論證語言除了為他們提供了一個清晰的方法去找出答案，透過重覆使用，亦令到他們的視覺能力（visualization）得以加強。筆者親眼目睹一位學生，由最初對著長方體模型茫無頭緒，到後來透過論證語言的反覆使用，開始慢慢明白過來，最後豁然開朗，能夠自信地使用這套論證語言找出對角線在不同平面的投影。這一切都在一節的時間內發生¹，實在令人鼓舞。

教學設計二：線和平面的交角

當學生認識了投影的概念及掌握了找出投影的方法，引入線和平面的交角這個概念就變得較為容易了。不過由於我們在學生訪談中，發現不少學生都未能認識三維空間角度的大小或變化，甚至認為直線和平面上任何和它相交的直線的夾角都是一樣大小（學習難點三），所以我們引入線和平面的交角前，先以一片 Cabri 3D 簡報，和學生討論如何定義一條直線與一塊平面的交角（圖八）。

在圖八中，教師可拖拉紅點，顯示線段 PQ 和平面上不同直線所產生的不同大小夾角。然後教師可提問學生：「你認為 PQ 與哪一條直線的夾角能代表 PQ 和平面之間的交角？」從試教中發現，不少學生都認為應以 PQ 和其投影之間的夾角作為 PQ 與平面之間的交角。教師接著就可以正式引入線與平面的交角的定義了。為加強學生對線和平面交角與投影之間的關係的認識，我們設計了另一片 Cabri 3D 簡報，再次向學生呈現光線從不同的角度射向地面會產生的不同影子，而 PQ 與其影子的角度亦有變化（圖九(a)）。最後向學生展示 PQ 與平面的交角就是 PQ 與其投影的交角（圖九(b)）。

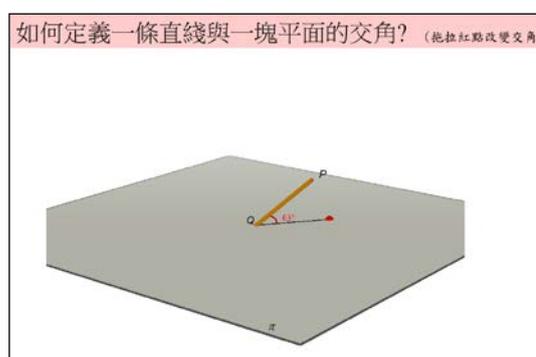
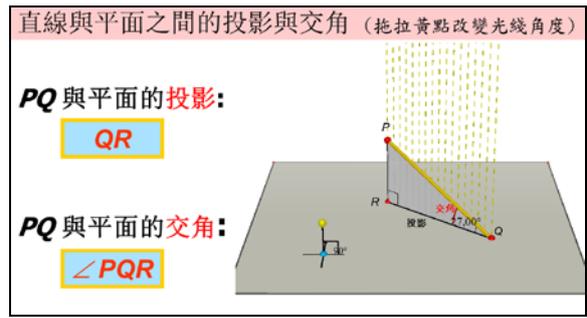
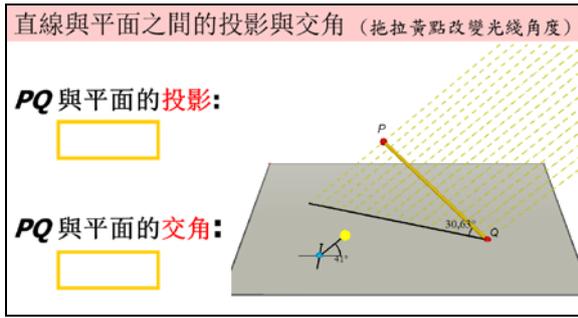


圖 八

¹ 「垂直和投影」這部份教了兩節，第一節引入垂直和投影概念，第二節集中討論如何找出長方體對角線在不同平面的投影。

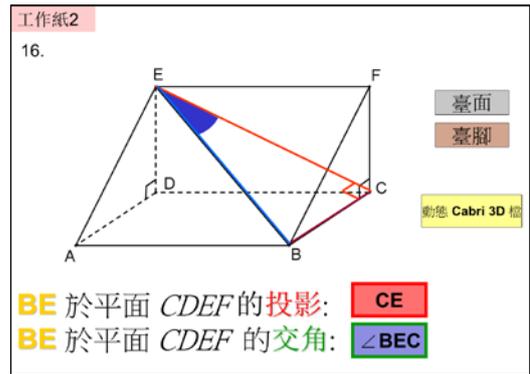


(a)

(b)

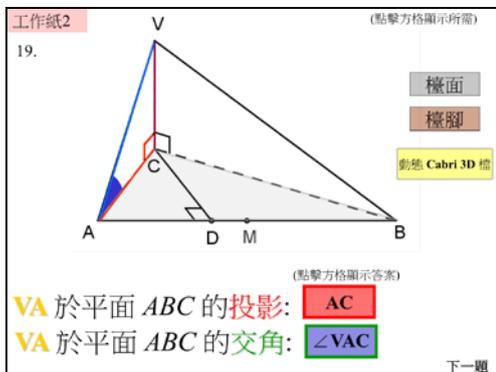
圖九

引入了線與平面交角的概念後，我們繼續和學生以論證的方法找出長方體對角線與不同平面之間的投影及交角。經過了之前的訓練，同學們都能夠很快地完成這部份的題目。接著我們就和他們討論如何找出直線在三稜柱的水平鉛垂平面的投影和交角（圖十），並且要求他們提供理由（因為...垂直於平面...，所以...在平面...的投影是...，與它的交角是...）。

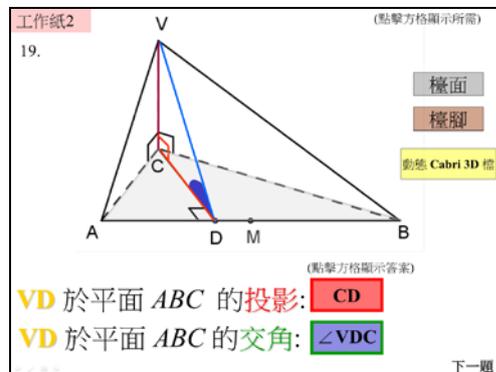


圖十

接著我們和學生討論圖十一中的錐體內的不同線段在水平平面 ABC 的投影及交角（圖十一(a)至(d)），並且在沒有電腦動態圖形的協助下，讓他們討論哪一隻交角最大。這個活動的目的，是希望讓他們透過論證，加強他們對三維空間角度大小變化的認知（學習難點三），並且為他們接著學習兩平面交角概念鋪路。

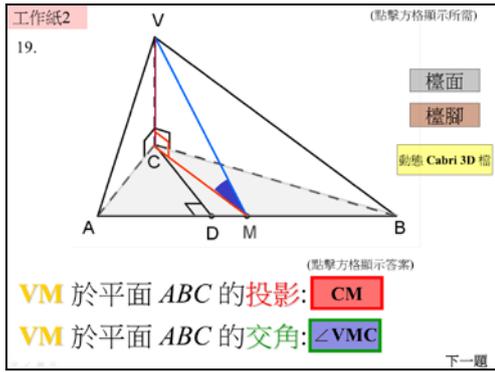


(a)

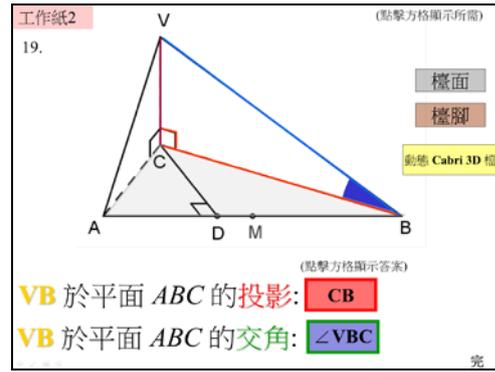


(b)

圖十一



(c)



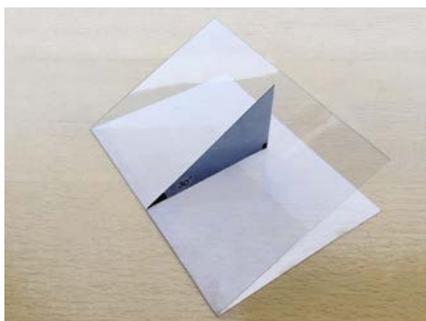
(d)

圖 十 一

教學設計三：兩平面的交角

對學生來說，兩平面的交角是最難掌握的概念。從訪談中我們發現他們往往並不記得兩平面的交角的定義，即使記得，也不能理解為何要如此定義。最大的問題是就算知道定義也未必能夠運用，因為他們往往未能從立體圖形的平面圖像中從辨認出直角（見之前在「學習難點」一節的論述）。

為解決這些問題，我們設計了一套簡單的教具，幫助學生建構兩平面之間的交角的概念。我們著學生分成兩人一組，每組派發一份預先製作好的長方形膠片及梯形膠片，及兩個 30° 的直角三角形紙製「量角器」，然後問他們該如何擺放直角三角形的「量角器」，才能令兩塊長方形平面及梯形平面的交角為 30° （圖十二(a)及(b)）。



(a)



(b)

圖 十 二

為方便教師和學生進行討論，我們設計了圖十三(a) 的 Cabri 3D 簡報，讓教師透過拖拉紅、藍、綠三點，和學生討論如何擺放直角三角形「量角器」，才能令到兩平面的交角為 30° 。在試教過程中，學生最初只能夠以「正」、「中間」等語言作描述，經教師追問如何固定直角三角形「量角器」

的三條邊才能夠令直角三角形「量角器」的位置「正」，有學生指出首先三角形的底（鄰邊）要垂直於兩塊膠片的相交線，接著就有學生指出三角形的高（對邊）要垂直於底下的膠片，最後也有學生提出三角形的斜邊要垂直於兩塊膠片的相交線。至此，教師拖拉紅、藍、綠三點到適當位置，並顯示如何描述直角三角形「量角器」三條邊的位置（圖十三(b)）。

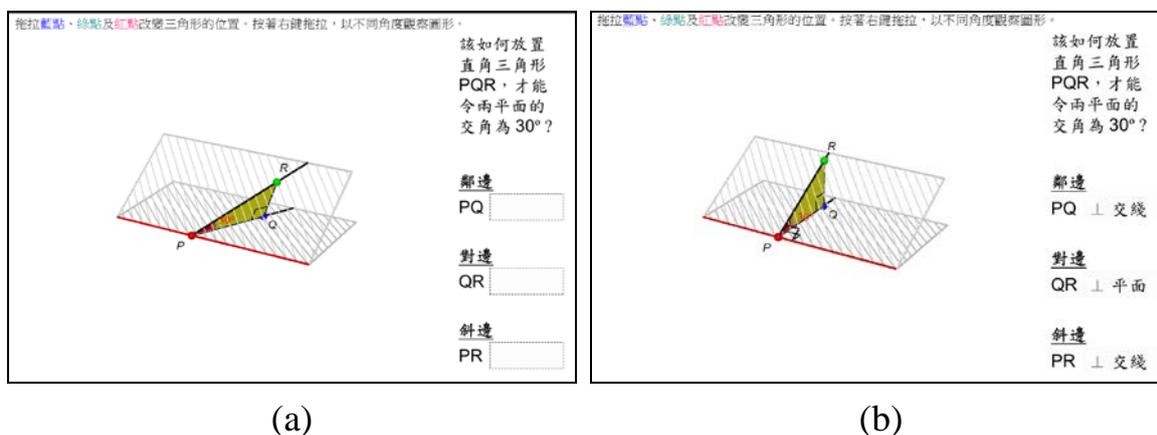


圖 十 三

接著我們以圖十四的簡報和學生討論找出兩平面的交角的步驟：先找出兩平面的交線，再找出一個直角三角形「量角器」，然後判斷直角三角形的位置是否正確。由於直角三角形的位置由兩條邊的位置決定，所以我們只需要問鄰邊是否垂直交線，及對邊是否垂直平面（圖十四(a)），或斜邊是否垂直於交線（圖十四(b)）。圖十四(b)所展示的就是一般教科書的兩平面交角定義，可是這要求學生知道圖中直角三角形的斜邊垂直交線，而這個結果對部份學生來說並不「直觀」。事實上，在試教過程中，筆者發現有不少學生真的「看不到」斜邊垂直交線。相反，圖十四(a)的條件就容易判斷，因為對邊垂直於平面是已知的條件。更有學生指出可以再將圖十四(a)的條件簡化為鄰邊為斜邊的投影，並認為這個條件更加直觀和容易判斷！

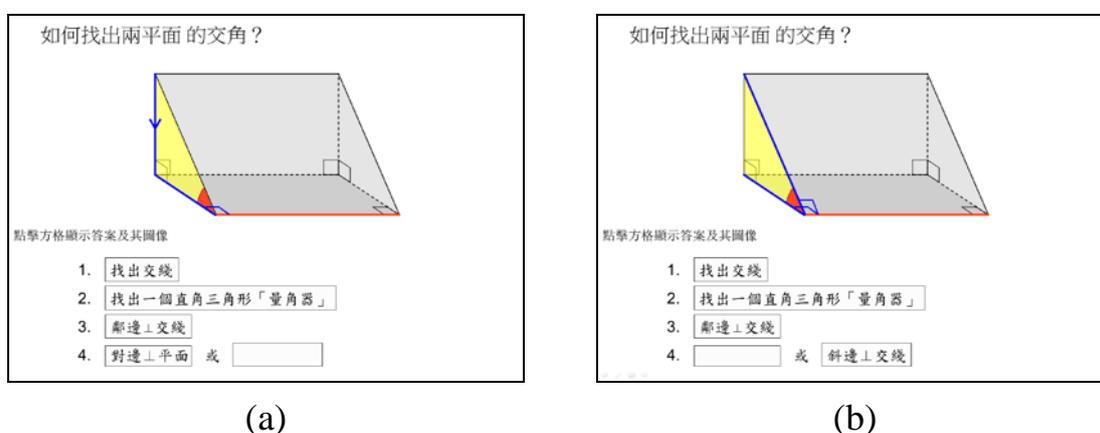


圖 十 四

事實上，圖十四中的直角三角形的斜邊垂直於兩平面的交線，其實是一個叫「三垂線定理」的結果（圖十五）：已知一條斜線 s 穿過一塊平面。如果平面內的一條直線 t 與 s 在這塊平面上的投影 d 垂直，那麼 t 也和 s 垂直。可是「三垂線定理」並不在香港的課程範圍之內，而學生要「直觀」地認識這個「三垂線定理」的結果（ t 垂直於 s ），才可根據一般教科書的兩平面交角定義，找出圖十四中的斜面和水平面的交角。可是這個「三垂線定理」的結果對不少學生來說並不直觀，以致他們對根據定義找出平面的交角感到困難。相反圖十四(a) 的方法對他們來說就容易判斷得多了，因為對邊垂直於平面是已知的條件，而且「鄰邊為斜邊的投影」也比「斜邊垂直於交線」直觀得多！

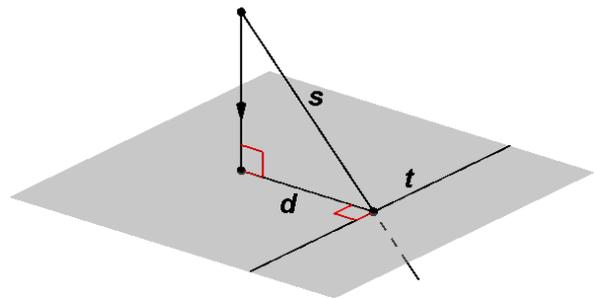


圖 十五

接著我們就利用圖十四(a)或(b)的方法，再配合論證，幫助學生找出不同立體圖形中的兩平面交角，如圖十六 (a) 和 (b) 所示。

工作紙3 點擊方格顯示答案及其圖像

1(e) 平面 ADEF 和 BCEF 的交角是甚麼？

直角三角形「量角器」的位置正確嗎？為甚麼？

還有其他的位置嗎？若有，點擊它的位置。

平面 ABCD 和 BCEF 的交角是 ，因為 及 。

(a)

工作紙3 點擊方格顯示答案及其圖像

3(a) VABCD 是一個直立棱錐，它的底 ABCD 是長方形。O 是 AC 和 BD 的交點，M 和 N 分別是 AB 和 AD 的中點。

交線

動態 Cabri 3D 檔

平面 VAB 和 ABCD 的交角是 。

(b)

圖 十六

在試教的時候，我們發現學生對找出長方體或三稜柱中的兩平面交角大致都沒有太大問題，但到找出圖十五 (b) 的錐體斜面 VAB 和水平平面 ABCD 的交角時，不少的學生都感到困難。有些同學覺得交角應是 $\angle VAO$ ，有人覺得是 $\angle VMO$ ，也有人覺得是 $\angle VAM$ 。直至教師提醒他們要找出直角三角形「量角器」，並要判斷它的位置是否合適時，他們才慢慢明白正確的「量角器」應是 $\triangle VMO$ （因為鄰邊 MO 垂直交線，及對邊 VM 垂直於平面 ABCD），而兩平面的交角應是 $\angle VMO$ 。

後測與學生訪談

完成試教後，我們進行了一次後測。大致來說學生在後測的表現良好，對一般的立體圖形，大部份學生都能從中辨認出直線的投影、線與平面的交角及兩平面的交角。我們亦和一些學生進行訪談，發現他們當中能力較佳者更能夠靈活運用所學，找出較難題目的答案，並能提供清楚的解釋。例如圖十七(a)中，有學生能很快地找到平面 ABC 和平面 DBC 的交角是 $\angle ABD$ ，並清楚指出原因是因為 AB 是 DB 的投影，而 DA 垂直於平面 ABC 。

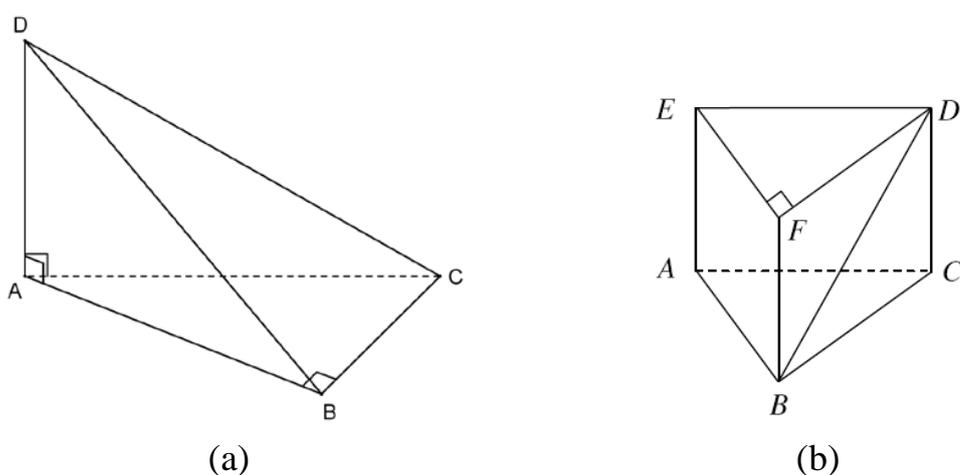


圖 十 七

更有趣的是，一位能力很強的同學，他答對了所有的題目，卻對 2011 年的 TSA 題目（找出圖十七(b) 中 BD 與鉛垂平面 $ABFE$ 的交角）感到困惑，因為他「直觀地」覺得答案應是 $\angle DBE$ ，但根據論證卻應是 $\angle DBF$ （因為 DF 應垂直平面 $ABFE$ ）。經過幾番理智與直觀的交戰後，他選擇相信自己的理智，認為 $\angle DBF$ 是正案答案，最後他答對了。

結語

立體圖形的投影與交角是學習單元「以直觀法學習幾何」（Learning Geometry through an Intuitive Approach）中的一個學習重點。經過這次歷時數載的探討過程，我們發現模型及軟件可以是有用的教具，但單靠模型或軟件本身並不足以令學生產生所需的「直觀」（intuition）。我們認為，要幫助學生建立「直觀」，需如 Duval（1998）的幾何認知及論證理論所言，要有「視覺能力」（visualization）、「構作」（construction）及「論證」（reasoning）三方面的配合（圖十八，其中實線箭號表示有幫助，虛線箭號表示可以有、

亦可以沒有幫助)。從研究中，我們發現以教具作為三維空間的概念構作 (construction) 工具 (例如以可屈曲飲管構作線和平面垂直概念、以紙製直角三角形「量角器」及膠片構作兩平面的交角概念等)，再加上適當的論證 (reasoning) 語言，是加強學生視覺能力 (visualization)、建立他們的「直觀」和空間感的有效方法。

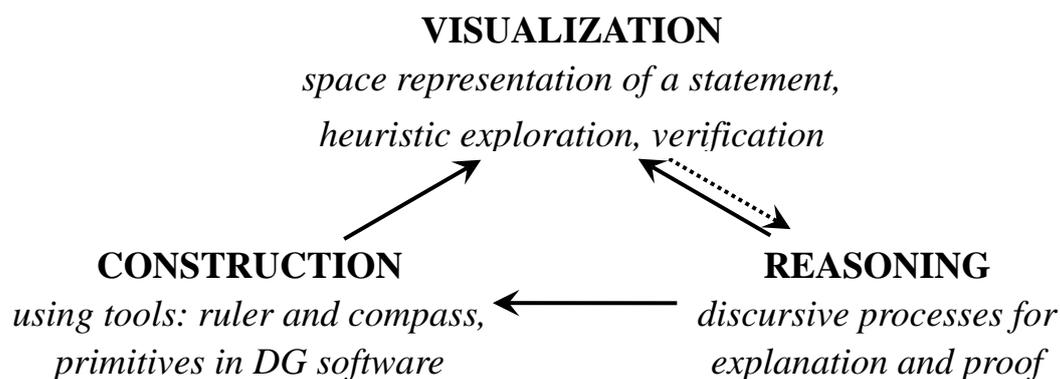


圖 十 八

本文所介紹的教材的中英文版，可於教育局的「網上學與教支援」網頁 (<http://wlts.edb.hkedcity.net>) 下載。

鳴謝

謹此向歷年來協助我們在這個課題進行研究及試教的學校致謝：民生書院 (2008 - 2009)、香港四邑商工總會黃棣珊紀念中學 (2009 - 2010)、香港鄧鏡波書院 (2011 - 2012) 及樂善堂梁銶琚書院 (2012 - 2013)。

參考文獻

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (p.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

作者電郵：anthonyor@edb.gov.hk