

針對學習難點的教學設計 – 分數除法

程翠娟、柯志明
香港教育局教育基建分部

引言

若說分數除法是小學數學科比較難教的課題，相信老師們都不會反對吧。回憶我們小時候是如何學習此課呢？記得老師沒有講說什麼，只是計算一次就拋下一句口訣「除號變乘號，分數要顛倒」，著我們牢牢記住，然後就依樣葫蘆地照做而已。翻閱坊間的教科書，發現對分數除法的處理一般都比較散亂及欠缺條理，未能有系統地幫助學生建立分數的除法概念及理解相關的運算。本文介紹我們設計的一套課業，利用工作紙及動態圖形把概念、圖像及算式緊密地聯繫起來，幫助學生在均分及包含兩種情境中，循序漸進地建立分數除法的概念，並理解相關的運算。

本文的動態圖形均以免費的 Java-based 軟件 GeoGebra 製作，電腦只需安裝了 Java 即可執行。所有工作紙及動態圖形檔可在教育局的「網上學與教支援」網頁 <http://wlts.edb.hkedcity.net> 裡「熱門推介」中的「分數除法（小五數學）」下載。

學習難點

我們認為學生一旦建立了錯誤的數學概念，教師要撥亂反正就事倍功半。要幫助學生建構好知識，必須明瞭學習難點所在，方能對症下藥。

綜合了 Kerslake (1986) 等學者對分數除法的研究，我們歸納出以下幾個分數除法的主要學習難點：

1. 學生並不認識除法概念和分數的關係，例如不知道 $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ ；
2. 學生不明白分數除法為何要「顛倒相乘」；
3. 學生認為除法得出的結果應該較小，並不理解為何兩個分數相除後得出的商比被除數大。

針對上述難點，我們設計了以下四個課業，讓老師協助學生克服困難，

建立對分數除法的概念和理解相關的算式。

課業一：以均分情境理解整數÷整數

在學生低年級學習的整數除法中，若被除數不能被除數整除，答案須以商和餘數表示，這種除法稱為**帶餘數除法**。可是分數除法的答案卻不會有餘數，而是以一個分數表示的商。所以教授分數除法的第一步是和學生建立**不帶餘數除法**的概念。

我們先透過均分的情境和學生作討論。我們選擇以分薄餅作為均分的情境，因為數人均分薄餅是他們日常生活會遇到的情境，學生容易從中理解不帶餘數除法的意義，而圓形的薄餅的均分和合併也容易理解。我們集中以這個情境講解均分概念，避免學生因為每次都要理解不同的情境而未能專注於概念的理解。此外，為了使學生有更多的思考機會，在工作紙的設計上，我們預留了足夠的空間，讓學生先透過討論和圖解嘗試解決問題，然後教師才利用簡報或動態檔案和學生再作講解。

在工作紙中，我們以 6 個薄餅均分給 3 個人、每人可分得多少個薄餅作為引子，讓學生先溫習以除法處理均分問題的方法，然後再讓他們探究 7 個薄餅均分給 3 個人的問題。我們預期學生會直觀地先將 2 個薄餅分給各人，然後把剩下的 1 個薄餅平均切開 3 等份，每人再分得 $\frac{1}{3}$ 個薄餅，然後得出每人分得 $2\frac{1}{3}$ 個薄餅的結論（圖一）。透過這個操作，學生就能認識不帶餘數的除法算式 $7 \div 3 = 2\frac{1}{3}$ 的意義。

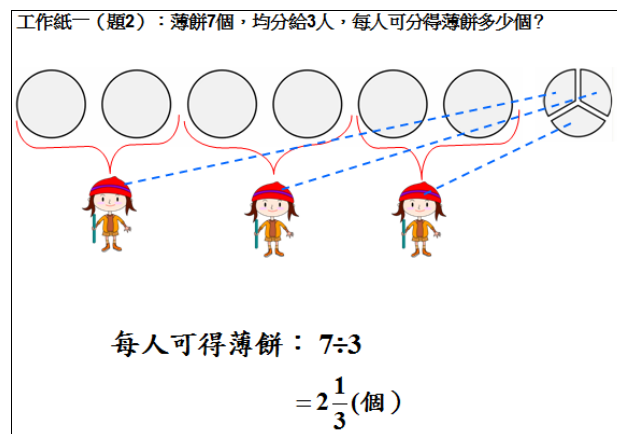


圖 一

留意在這個階段我們**不應**教導學生將 $7 \div 3$ 寫成 $\frac{7}{3}$ ，因為對學生來說， $\frac{7}{3}$ 個薄餅是將一個薄餅均分為 3 份後再取 7 份的數目，這個數目和 7 個薄餅均分給 3 人、每人分得的薄餅數目並無必然關係。事實上，認識這個關係是 Kerslake (1986) 的研究指出的一個重要學習難點（學習難點 1），亦是我們下一步的教學重點。

為了讓學生認識這個關係，我們先著學生思考 1 個薄餅分別均分給 2 人、3 人和 4 人時每人分得的薄餅數目（分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 個薄餅），從而讓學生明白 1 個薄餅均分給任何人數，每人可分得薄餅都是這個人數分之一（即 $1 \div n = \frac{1}{n}$ ）。這點學生應不難理解。

以 $1 \div n = \frac{1}{n}$ 為基礎，我們就可以和學生討論為何 $a \div b = \frac{a}{b}$ 。我們製作了動態檔案 [fraction-1a.html](#) 協助老師和學生作出互動的討論。老師開啟這個檔案後，先透過滑桿設定薄餅的數目和均分的人數（圖二 a）。以 3 個薄餅均分給 4 個人為例，我們先把每個薄餅均分為 4 等份（圖二 b），然後每人於每個薄餅取 1 份（圖二 c），這樣 3 個薄餅就平均地分給了 4 個人，而每人分得薄餅 $\frac{3}{4}$ 個。這個情境所對應的算式就是 $3 \div 4 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ （圖二 d）。

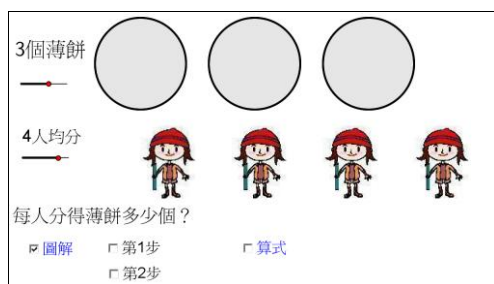


圖 二 (a)

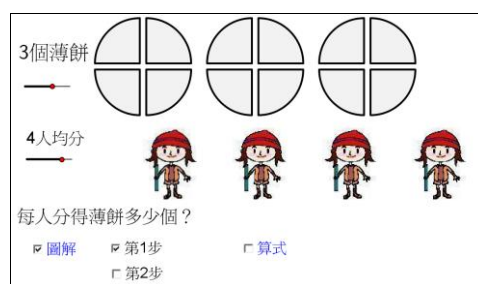


圖 二 (b)

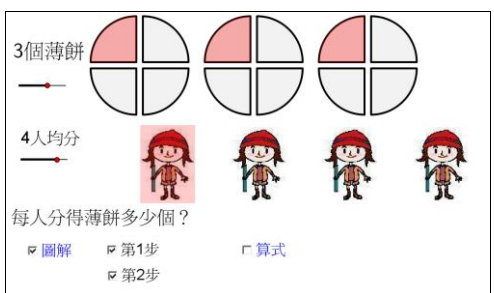


圖 二 (c)

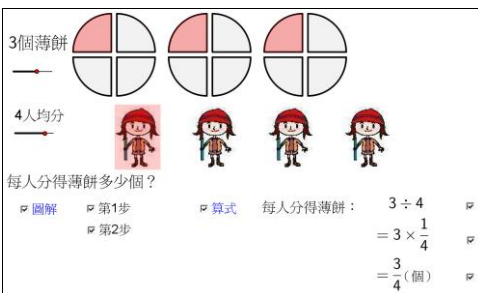


圖 二 (d)

我們可以用這個方法再次和學生討論 7 個薄餅均分給 3 個人的問題，讓他們將這個方法（圖三(a) – (d)）和他們之前的直觀方法（圖一）作一比較，討論一下兩個方法的優點和缺點。學生可能暫時仍未能領略這種一般方法的好處，但當被除數為真分數或帶分數的時候，一般方法的優點就更加明顯了。

7個薄餅

3人均分

每人分得薄餅多少個？

圖解 第1步 算式

第2步

圖 三 (a)

7個薄餅

3人均分

每人分得薄餅多少個？

圖解 第1步 算式

第2步

圖 三 (b)

7個薄餅

3人均分

每人分得薄餅多少個？

圖解 第1步 算式

第2步

圖 三 (c)

7個薄餅

3人均分

每人分得薄餅多少個？

圖解 第1步 算式

第2步

每人分得薄餅：

$$7 \div 3$$

$$= 7 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

$$= 2\frac{1}{3} \text{ (個)}$$

圖 三 (d)

課業二：以均分情境理解分數÷整數

當被除數是真分數或帶分數時，我們設計了另一個動態檔案 [fraction-1b.html](#)，協助學生理解分數除以整數的運算。以 $4\frac{3}{4}$ 個薄餅均分給 3 人為例（圖四(a)），由於薄餅的大小不一，我們先把薄餅以 $\frac{1}{4}$ 個為單位切成 19 等份，即先把帶分數 $4\frac{3}{4}$ 化為假分數 $\frac{19}{4}$ （圖四(b)），然後和之前一樣把每等份均分給 3 人，每人分得每等份的 $\frac{1}{3}$ （ $\frac{19}{4} \div 3 = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3}$ ，圖四(c)），再以分數乘法進行計算，化簡後得出答案為 $1\frac{7}{12}$ （圖四(d)）。

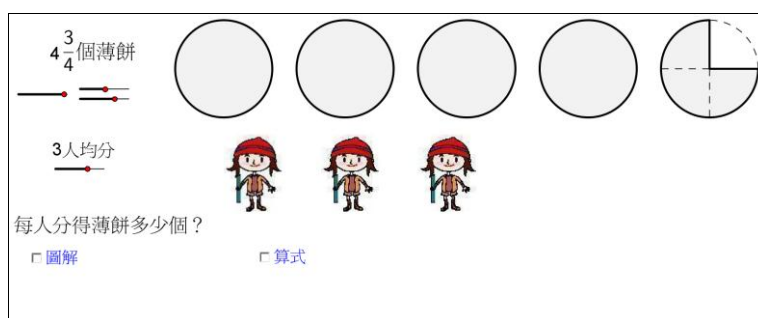


圖 四 (a)

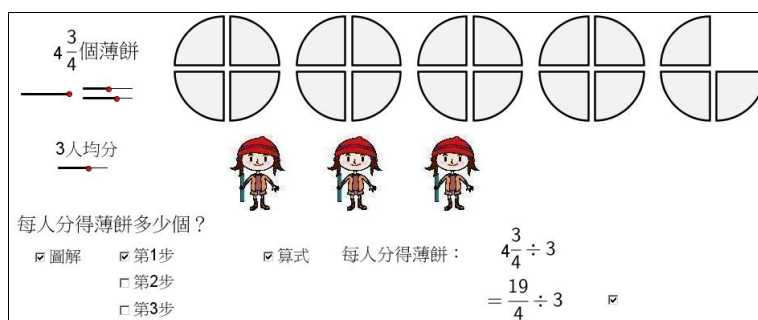


圖 四 (b)

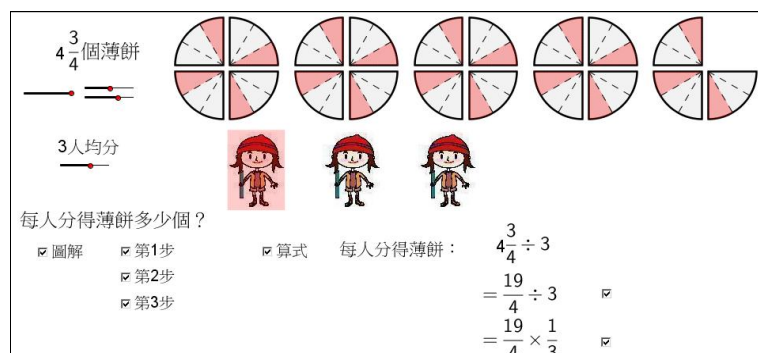




圖 四 (c)

$4\frac{3}{4}$ 個薄餅


3人均分


每人分得薄餅多少個？
 圖解 第1步 第2步 第3步 算式

每人分得薄餅：

$$4\frac{3}{4} \div 3$$

$$= \frac{19}{4} \div 3$$

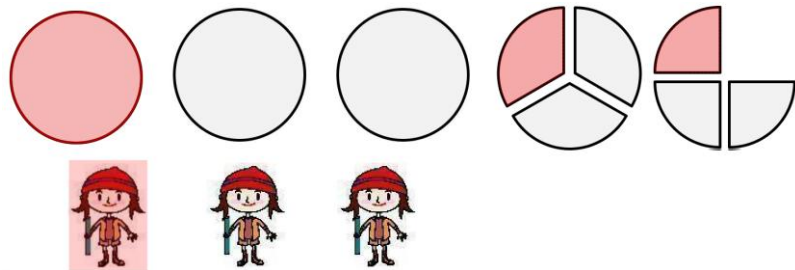
$$= \frac{19}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{19}{12}$$

$$= 1\frac{7}{12} \text{ (個)}$$

圖 四 (d)

教師亦可和學生討論有沒有其他較直觀的方法將 $4\frac{3}{4}$ 個薄餅均分給 3 人，及其對應的算式（例如圖五），然後和課業的一般解法作一比較。比較兩種方法後，學生不難發現一般解法能統一地把除數以分數乘法進行計算，不需要處理異分母的加法。有了圖像的配合，學生亦容易理解及接受為何在計算帶分數除以整數時，需要先把帶分數化為假分數，這比死記硬背來得自然和合理得多，亦令學生更能體會到表面上是機械化運算的算式，其實代表了一種系統化的數學思考方法。



$$4\frac{3}{4} \div 3$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= 1 + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$

$$= \frac{19}{12}$$

$$= 1\frac{7}{12}$$

圖 五

課業三：以包含情境理解整數÷整數

和低年級時學習整數的除法一樣，學生亦需要從包含的情境中理解分數除法的意義。我們選擇以鋪紙條的情境講解包含的概念，因為它含有數綫的意味，而且可以實際操作，對學生來說較實在。

在工作紙中，我們首先由以下兩條問題開始（圖六），和學生溫習一下整除情況下的包含概念。除了列出算式，老師亦可教導學生把 12 個方格以 3 個一組（圖六(a)）或 4 個一組（圖六(b)）的方法圈出，讓他們透過操作加深了解除法算式中的包含意義。

1. 12 個方格需要多少張 3 格長的紙條才能鋪滿？

需要紙： $12 \div 3$
 $= 4$ (張)

2. 12 個方格需要多少張 4 格長的紙條才能鋪滿？

需要紙： $12 \div 4$
 $= 3$ (張)

(a)
(b)

圖 六

接著我們和學生討論「12 個方格需要多少張 5 格長的紙條才能鋪滿？」這條問題。老師可利用動態檔案 fraction-2a.html 和學生一起討論。在檔案中，老師透過拖拉紙條右下角的紅點，和學生一起討論需要多少張紙才能鋪滿 12 格（圖七(a)–(c)）。老師接著別選「紙張數目」及「格線」框顯示所需紙張數目及格線（圖七(d)），然後再顯示如何透過數格寫出算式，然後得出答案（圖七(e)）。

12 個方格需要多少張 5 格長紙條才能鋪滿？

12 個方格 →

5 格長紙條 →

紙條數目
 格線

需要紙：

圖 七 (a)

12 個方格需要多少張 5 格長紙條才能鋪滿？

12 個方格 →

5 格長紙條 →

紙條數目
 格線

需要紙：

圖 七 (b)

12 個方格需要多少張 5 格長紙條才能鋪滿？

12 個方格 →

5 格長紙條 →

紙條數目
 格線

需要紙：

圖 七 (c)

12 個方格需要多少張 5 格長紙條才能鋪滿？

12 個方格 →

5 格長紙條 →

紙條數目
 格線

需要紙：

圖 七 (d)

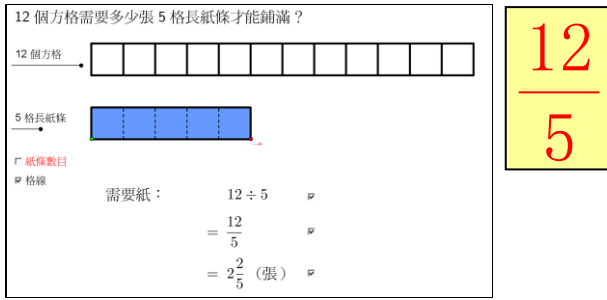


圖 七 (e)

留意在這個包含的情境中，我們是直接向學生呈現 $a \div b = \frac{a}{b}$ ，這和均分情景所呈現的 $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ 有所不同。這點在被除數小於除數的情況就更加明顯了。例如在「3 個方格需要多少張 5 格長紙條才能鋪滿」這條問題中，由於所需的紙條不足 1 張，學生就要將問題轉化為「3 個方格佔 5 格長紙條的幾分之幾？」，而動態檔案提供的圖像（圖八）能夠讓學生直接透過數格去理解 $3 \div 5 = \frac{3}{5}$ 。這個情境亦為學生提供了一個學習以分數表示「比和率」(Ratios and Rates representation, 見 Lamon (2001)) 的機會。

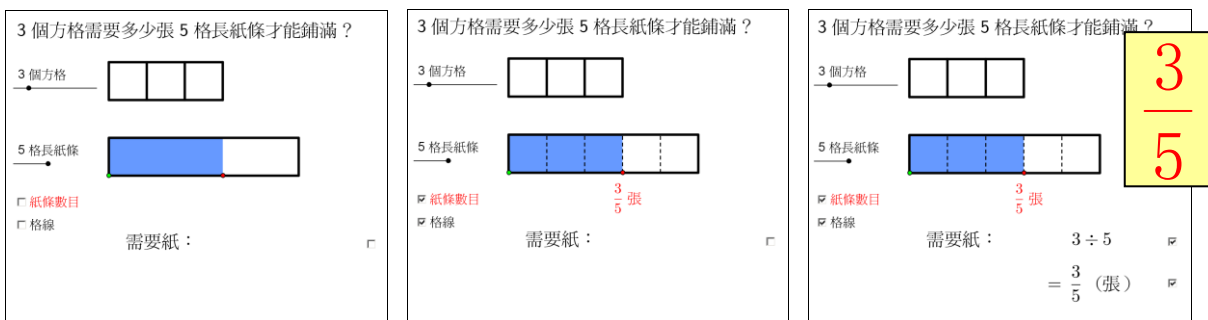


圖 八

課業四：以包含情境理解 $1 \div$ 分數及 $x \div$ 分數

當除數是一個分數時，要讓學生理解所謂的「顛倒相乘」，必須從包含的情境入手，因為要從均分情境中理解如 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ 等算式是十分困難的（對此高畑勳導演的卡通片「歲月的童話」中有一段生動的描述，有興趣的讀者可找 DVD 一看）。我們繼續利用鋪紙條的情境，先和學生討論下列問題：

問題	圖像	算式及答案
1 個方格需要多少張 $\frac{1}{2}$ 格長的紙條才能鋪滿？		$1 \div \frac{1}{2} = 2$
1 個方格需要多少張 $\frac{1}{3}$ 格長的紙條才能鋪滿？		$1 \div \frac{1}{3} = 3$
1 個方格需要多少張 $\frac{1}{4}$ 格長的紙條才能鋪滿？		$1 \div \frac{1}{4} = 4$
1 個方格需要多少張 $\frac{1}{5}$ 格長的紙條才能鋪滿？		$1 \div \frac{1}{5} = 5$

從上述討論中，學生應該不難觀察到 $1 \div \frac{1}{n} = n$ 。接著我們利用 fraction-2b.html 檔和學生進行更深入的討論。例如教師可提問學生：「為甚麼 1 包含了 4 個 $\frac{1}{4}$ ？」然後利用動態檔的圖像向學生展示當 1 格分為 4 等份的時候， $\frac{1}{4}$ 就是 1 等份，所以透過數算等份的數目，我們就知道 $1 \div \frac{1}{4} = \frac{4}{1} = 4$ 了（圖九）。

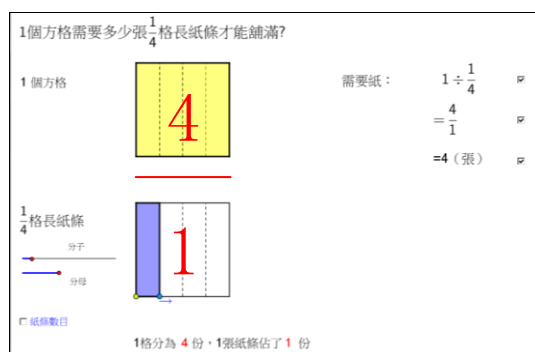


圖 九

當除數不是單位分數時，我們也可以類似的方法處理。例如討論 1

個方格需要多少個 $\frac{2}{5}$ 格長紙條才能鋪滿時，教師先引導學生將 1 格分為 5 等份（圖十(a)），那麼 $\frac{2}{5}$ 就佔了 2 等份，而 1 包含了多少個 $\frac{2}{5}$ 的問題就可等於之前課業的 5 包含了多少個 2 的問題了（圖十(b)）。於是我們得出 $1 \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$ ，而這正是「顛倒相乘」的關鍵所在。

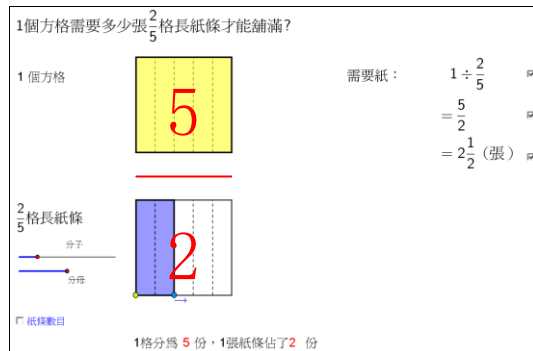


圖 十 (a)

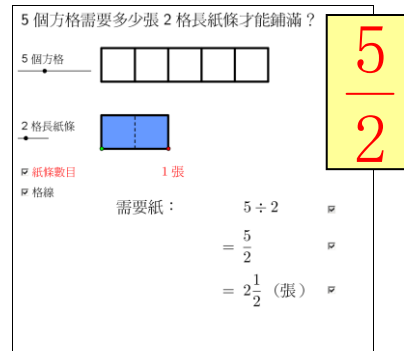


圖 十 (b)

接著教師可和學生討論當除數為帶分數時的情況。以 $1 \div 1\frac{3}{5}$ 為例（圖十一(a)），學生應不難想到先將除數 $1\frac{3}{5}$ 化為假分數 $\frac{8}{5}$ ，然後再將 1 格分為 5 等份，就可得出 $1 \div 1\frac{3}{5} = 1 \div \frac{8}{5} = \frac{5}{8}$ 了（圖十(b)）。經過除數為單位分數、真分數和假分數的討論，學生就更能明白 $1 \div \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$ 這「顛倒」的結果了。

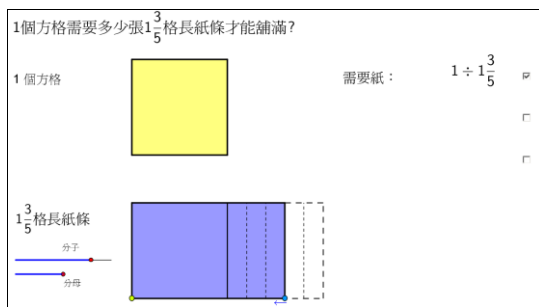


圖 十 一 (a)

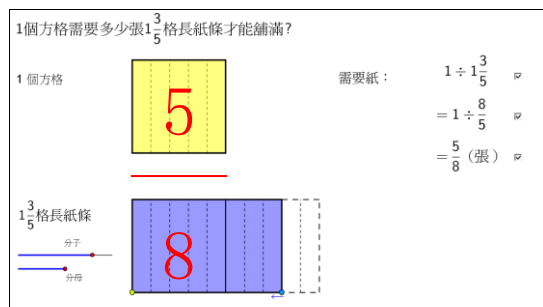


圖 十 一 (b)

以 $1 \div \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$ 為基礎，我們就可以和學生討論何謂「顛倒相乘」了。老師可引導學生利用 1 個方格需要 5 張 $\frac{1}{5}$ 格長的顏色紙條才能鋪滿的結果，

分別思考如何計算出 2 個方格、3 個方格、4 個方格和 5 個方格需要多少張 $\frac{1}{5}$ 格長的顏色紙條才能鋪滿，從而認識對任何整數 x ， $x \div \frac{1}{n} = x \times n$ 。接著老師就可以和學生將被除數 x 推廣至分數的情況。例如若 1 個需要 5 張 $\frac{1}{5}$ 格長的顏色紙條才能鋪滿，那麼 $\frac{2}{3}$ 格就需要 $\frac{2}{3} \times 5$ 張、 $1\frac{2}{3}$ 格就需要 $1\frac{2}{3} \times 5$ 張了。這個推廣應用了在分數乘法中建立的一個數的分數倍概念（見前文），所以對分數除法的「顛倒相乘」的理解是建基於分數乘法的概念之上的。

按照這個脈絡，學生就不難理解 $x \div \frac{p}{q} = x \times \frac{q}{p}$ 這個「顛倒相乘」定理了。例如若 1 個方格需要 $\frac{3}{2}$ 張 $\frac{2}{3}$ 格長的紙條才能鋪滿 ($1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$)，那麼 3 格就需要 $3 \times \frac{3}{2}$ 張 ($3 \div \frac{2}{3} = 3 \times \frac{3}{2}$)、 $\frac{4}{5}$ 格就需要 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$ 張 ($\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$)，及 $2\frac{1}{2}$ 格就需要 $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$ 張 ($2\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = 2\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$) 了。至此，學生就應完全明白「除號變乘號，分數要顛倒」這句「顛倒相乘」的口訣的意義所在。

分數除法的量度意義

以上課業的關鍵部份，是當除數為一個分數 $\frac{p}{q}$ 時，我們先處理了 1 包含了多少個 $\frac{p}{q}$ （即 $1 \div \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$ ），然後再把被除數 x 看作 1 的 x 倍，得出

$$x \div \frac{p}{q} = x \times (1 \div \frac{p}{q}) = x \times \frac{q}{p}。$$

讓我們以量度的角度理解以上算式。當我們以一個數字來描述一個量時，是相對於單位量「1」而言的。例如若說某個量是「 $4\frac{1}{2}$ 」，即是說這個量是單位量「1」的 $4\frac{1}{2}$ 倍（圖十二(a)）。從這個角度看，算式「 $4\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ 」就可以理解為當我們不再以「1」而以「 $\frac{3}{4}$ 」為量度單位來量度「 $4\frac{1}{2}$ 」這

個數量時，結果是多少的問題(圖十二(b))。這亦即是「 $4\frac{1}{2}$ 包含了多少個 $\frac{3}{4}$ 」的另一個意義，所以「包含除法」 Quotative Division 亦稱為 Measurement Division。由此角度觀之，即使我們未進行計算，我們也知道算式「 $4\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ 」的結果一定大於 $4\frac{1}{2}$ ，因為我們的量度單位少於 1。這亦回應了學生不明白為何兩個分數相除後得出的商比被除數大這個學習難點（學習難點 3）。

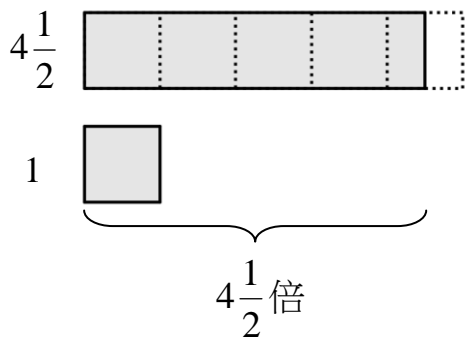


圖 十二 (a)

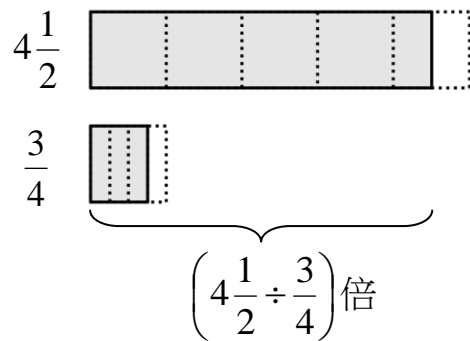


圖 十二 (b)

而所謂的「顛倒相乘」，就是我們先得出 1 是 $\frac{3}{4}$ 的 $\frac{4}{3}$ 倍 ($1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$) 這個結果，然後由 $4\frac{1}{2}$ 是 1 的 $4\frac{1}{2}$ 倍，得出 $4\frac{1}{2}$ 是 $\frac{3}{4}$ 的 $4\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ 倍 (圖十三)，所以 $4\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 4\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} (=6)$ 。「顛倒相乘」其實以分數乘法解決這個量度問題的一個定理。

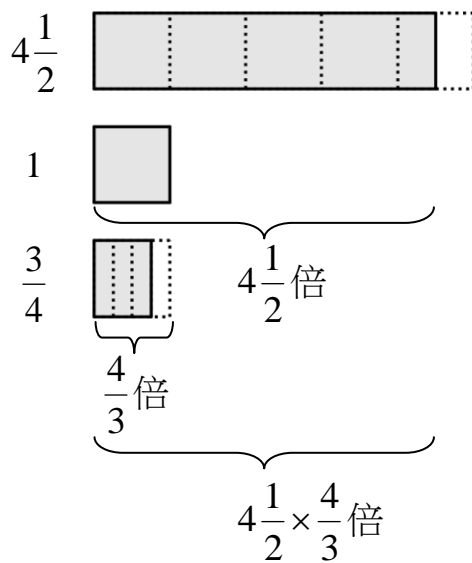


圖 十三

結語

這套課業除了幫助學生建立分數除法的概念和理解，亦涉及分數作為「商」(Quotient)、「比和率」(Ratios and Rates)及「量度」(Measure)等「部份/全體」(Part/Whole)以外的表徵 (representations) (Lamon, 2001)。我們希望透過這套課業的活動，學生對分數概念、意義及應用能有更全面的了解，令他們日後以分數解應用題、甚至在中學學習「率和比」等課題時有更好的基礎。

鳴謝

這套課業得九龍灣聖若翰小學的謝卓衡老師試教，讓我們可以觀察學生的學習情況以改善不足之處，謹此致謝。

參考文獻

- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors*. London: Nfer-Nelson.
- Lamon, S. (2001). Presenting and Representing - From Fractions to Rational Numbers. In A. Cuoco and F. Curcio (Eds.). *The Roles of Representation in School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

作者電郵：程翠娟 cherieching@edb.gov.hk

柯志明 anthonyor@edb.gov.hk