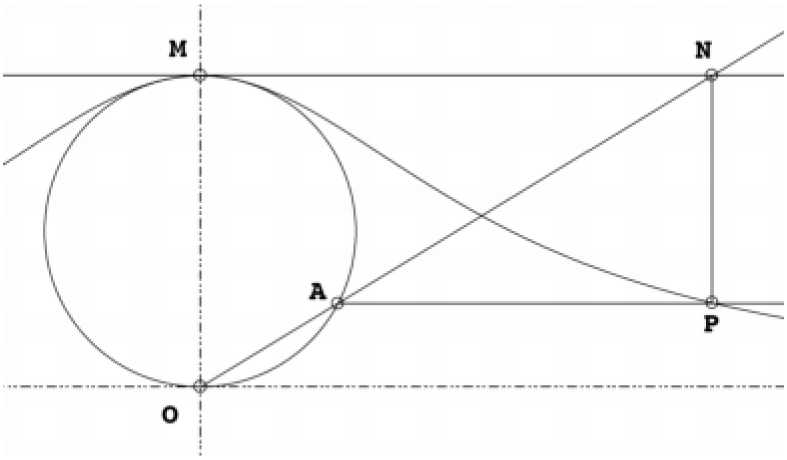
L'AKELARRE D'AGNESI

El problema parteix de la "Bruixa d'Agensi":



En el cas que $O=(0,0)$ i $M=(0,2a)$, el punt P defineix una corba $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

En el cas $a=\dfrac{1}{2}$, obtenim la corba $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ (que és un cas particular del problema 3 de les PAU 2017 – SÈRIE 1).

Anem a generalitzar el problema!

Considerem la família de còniques que passen pel punt $O=(0,0)$ i $M=(0,2a)$ i són simètriques respecte a l'eix OY. Aquestes còniques són de la forma:

$$\frac{x^2}{c}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1$$

Amb c i a nombres reals no nuls. [1]

Sigui r, la recta horitzontal que passa pel punt M. Els punts de la recta r són de la forma $N=(k,2a)$.

Definim la recta s, com la recta que passa pel punt $O=(0,0)$ i el punt $N=(k,2a)$

[1] Els punts $O=(0,0)$ i $M=(0,2a)$ pertanyen a la família de còniques definides.

$$s \equiv \frac{x}{k} = \frac{y}{2a} \Rightarrow 2ax = ky \Rightarrow x = \frac{k}{2a}y$$

Ara, cerquem el punt A com a intersecció de la recta s amb la cònica definida inicialment:

$$\frac{\left(\frac{k}{2a}y\right)^2}{c} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a^2\left(\frac{k}{2a}y\right)^2}{a^2c} + \frac{c(y-a)^2}{a^2c} = \frac{a^2c}{a^2c} \Rightarrow$$

$$a^2\left(\frac{k}{2a}y\right)^2 + c(y-a)^2 = a^2c \Rightarrow$$

$$a^2\frac{k^2}{4a^2}y^2 + c\left(y^2 - 2ay + a^2\right) = a^2c \Rightarrow$$

$$\frac{k^2}{4}y^2 + cy^2 - 2acy + a^2c = a^2c \Rightarrow$$

$$\frac{k^2}{4}y^2 + cy^2 - 2acy = 0 \Rightarrow$$

$$y \cdot \left(\frac{k^2}{4}y + cy - 2ac\right) = 0 \Rightarrow \text{(cas y = 0, ens dóna el punt O)}$$

$$\frac{k^2}{4}y + cy - 2ac = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{k^2}{4} + c\right) \cdot y = 2ac \Rightarrow y = \frac{2ac}{\frac{k^2}{4} + c} \Rightarrow y = \frac{8ac}{k^2 + 4c}$$

Per tant, ens defineixen funcions de la forma $f(x) = \dfrac{8ac}{x^2 + 4c}$

<u>Estudi de casos particulars:</u>

- Cas $c = a^2$ **(una circumferència).**

  $f(x) = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ → **La bruixa d'Agnesi**

- Cas $c > 0$ **i** $c \neq a^2$ **(una el·lipse de semieixos** $\sqrt{c}$ **i** $|a|$ **i centre de l'el·lipse** $(0, a)$ **).**

  $f(x) = \dfrac{8ac}{x^2 + 4c}$

  Donat que $c > 0$**, la funció no té asímptotes verticals i té un màxim relatiu en el punt M.**

- Cas $c < 0$ **(un hipèrbola semieix imaginari** $\sqrt{-c}$ **i semieix real** $|a|$ **i centre de la hipèrbola** $(0, a)$ **).**

  $f(x) = \dfrac{8ac}{x^2 + 4c}$

  Donat que $c < 0$**, la funció té asímptotes verticals en** $x = \pm\sqrt{-2c}$ **i té un màxim relatiu en el punt M.**

<u>Exemple.-</u>

Trobeu la cònica que defineix la funció $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 9}$

N'hi ha prou en igualar numerador i denominador de la funció amb l'expressió general abans trobada:

$$\frac{-3}{x^2 + 9} = \frac{8ac}{x^2 + 4c}$$

Observem que $c = \dfrac{9}{4}$.

Aleshores, $-3 = 8 \cdot a \cdot \dfrac{9}{4} \Rightarrow -3 = 18 \cdot a \Rightarrow a = \dfrac{-1}{6}$.

Si anem al següent enllaç podrem comprovar el resultat obtingut:

https://www.geogebra.org/m/CzgwA4P9