Funktionsfamilier

Vi har i det foregående set, at graferne for funktioner af typen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ , } a \neq 0 \text{ ,}$$

alle er parabler. Deres udseende og beliggenhed afhænger af *parametrene* a, b og c. For at markere slægtskabet siger man, at disse funktioner udgør en *funktionsfamilie*. Normalt arbejder man dog kun med en eller to parametre.

Som et andet eksempel på en funktionsfamilie ser vi på

$$f_a(x) = ax^2 - 2x + 1 \text{ .}$$

Der er ikke noget krav til a, så for a = 0 er der tale om en lineær funktion; i alle andre tilfælde er det andengradspolymier. På fig. 13 ses graferne for a-værdierne −4,−3, ... 3 og 4. Dette eksempel viser, at grafer, der hører til en funktionsfamilie, ikke behøver være af samme type.

I dette tilfælde kan det se ud som om, alle familiens grafer går gennem punktet (0,1). Det forholder sig faktisk også sådan fordi

$$f_a(0) = a \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

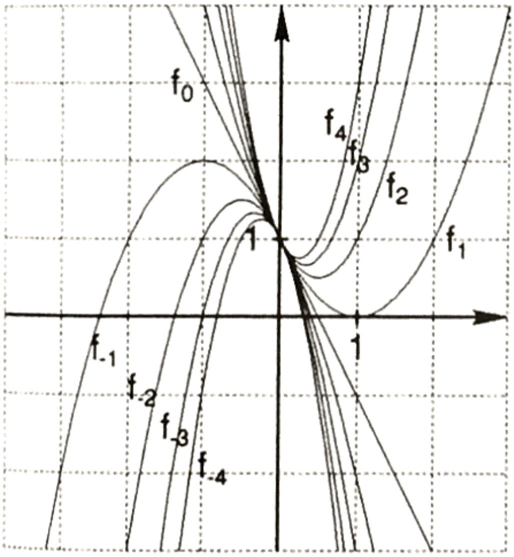

Fig. 13

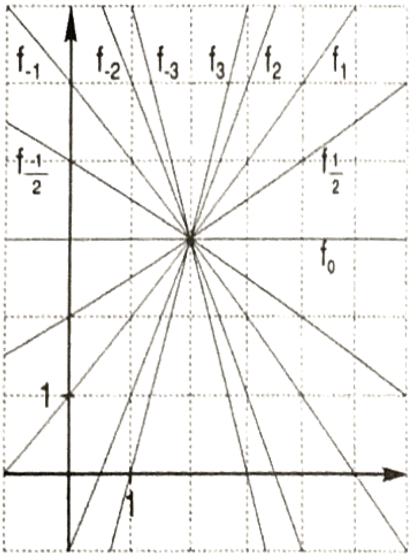

Fig. 14

På fig. 14 ses nogle grafer for funktionsfamilien

$$f_t(x) = tx - 2t + 3 \text{ .}$$

Da $f_t(2) = 2t - 2t + 3 = 3$, går alle graferne gennem (2,3), men det er ikke alle linjer gennem dette punkt, der er grafer for et medlem af familien. Dette skyldes, at grafen for f_t har hældningskoefficienten t, og da den lodrette linje med ligningen x = 2 ikke har nogen hældning, er den ikke graf for et medlem af familien.

Eksempel 9. Vi betragter funktionsfamilien

$$f_t(x) = \tfrac{1}{2}tx^2 + 2t^2x + 2t^3 + t\ ,\ t \neq 0\ .$$

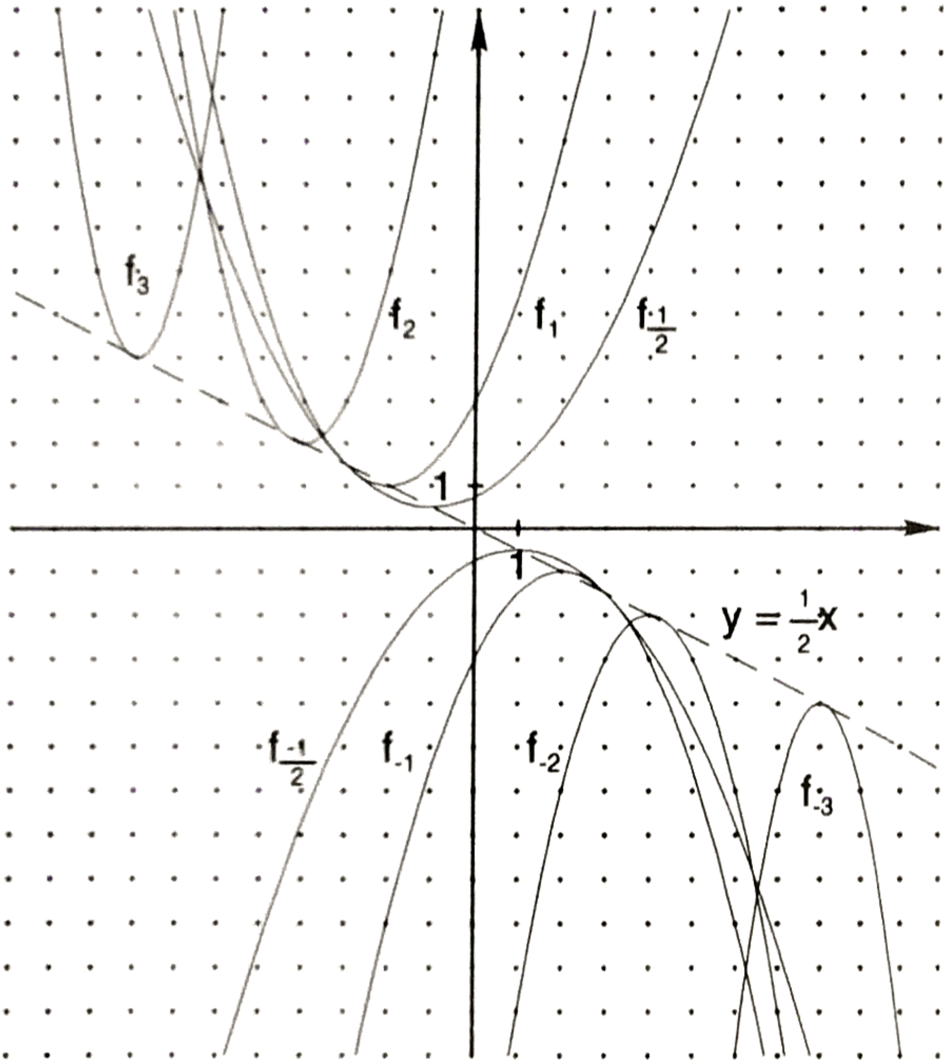

Fig. 15

Funktionsfamiliens grafer er parabler, og vi vil finde ud af, hvordan disse parablers toppunkter ligger. Vi finder toppunktskoordinaterne:

$$(x,y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-2t^2}{t}, -\frac{(2t^2)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}t\cdot(2t^3+t)}{2t}\right) \Leftrightarrow$$

$$(x,y) = \left(-2t, -\frac{4t^4 - 4t^4 - 2t^2}{2t}\right) = (-2t\ ,\ t)\ .$$

Da $x = -2t$ og $y = t$, gælder for toppunktskoordinaterne, at $x = -2y$ eller $y = -\frac{1}{2}x$. Alle toppunkter ligger derfor på linjen med ligningen $y = -\frac{1}{2}x$, se fig 15. Ikke alle punkter på linjen er toppunkt for en af familiens grafer. Da $t \neq 0$, er $(0,0)$ nemlig ikke et toppunkt.

I forbindelse med parallelforskydning af parablen med ligningen $y = ax^2$, fandt vi, at hvis den paralleforskydes så (0,0) føres over i (h,k) får den parallelforskudte parabel ligningen $y = a(x-h)^2+k$. Dette kan også udtrykkes således:

> Hvis grafen for funktionen $f(x) = ax^2$ parallelforskydes, så (0,0) føres over i (h,k), er den parallelforskudte parabel graf for funktionen $f(x-h)+k$.

Dette resultat kan generaliseres til

> grafen for funktionen $f_{h,k}(x) = f(x-h)+k$ fremkommer ved den parallelforskydning af grafen for $y = f(x)$, der fører (0,0) over i (h,k).

Eksempel 10. Funktionen $f_{0,0}(x) = x^3$ er ved parallelforskydning 'ophav' til familien

$$f_{h,k}(x) = (x-h)^3 + k$$

se fig. 16.

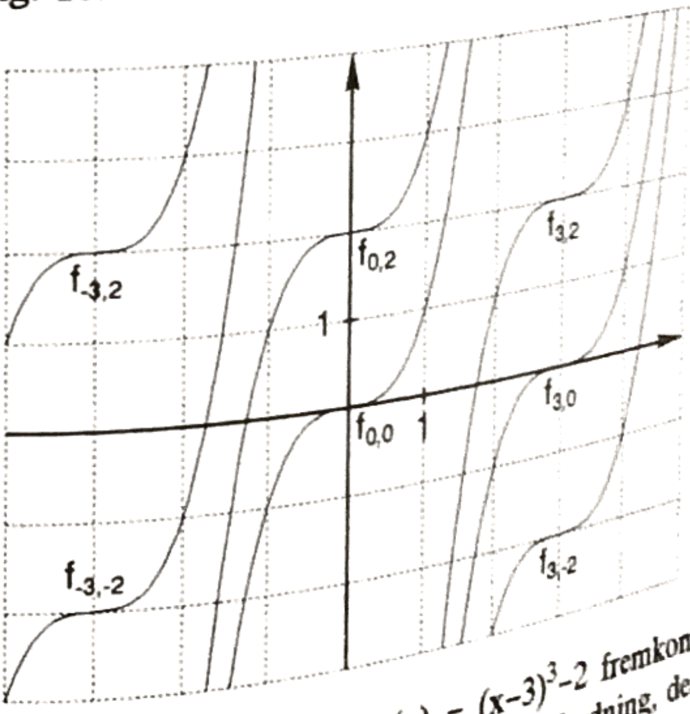

Fig. 16

Grafen for funktionen $f_{3,-2}(x) = (x-3)^3-2$ fremkommer ved at underkaste grafen for $f_{0,0}$ den parallelforskydning, der fører (0,0) over i (3,−2). På figuren ses en række andre tilfælde, bl.a. ses grafen for $f_{0,2}(x) = x^3+2$.