Abschlussprüfung an Fachoberschulen 2003 – Analysis A I
Mathematik (Nichttechnische Ausbildungsrichtung)

1 Die reelle Funktion

$f'': x \mapsto f''(x);\quad D_{f''} = \mathbb{R}\quad$ mit $f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$

ist die zweite Ableitung der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f wird mir G_f bezeichnet.
Gegeben ist außerdem die reelle Funktion $p: x \mapsto p(x);\ D_p = \mathbb{R}$ mit

$p(x) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{25}{6}$.

Der Graph dieser Funktion ist die Parabel G_p.

1.1 Der Graph G_f schneidet die Parabel G_p im Punkt $A(2; y_A)$. Die Steigung der Tangente an G_f im Punkt A wird m_f genannt, die Steigung der Tangente an G_p im selben Punkt m_p. Es gilt nun: $m_f \cdot m_p = -1$.
Berechnen Sie den Funktionsterm der Funktion f. (8 BE)

$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8\right]$

1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie. (2 BE)

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (4 BE)

1.4 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f und geben Sie mit deren Hilfe die maximalen Intervalle an, in denen die Funktion f echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. (8 BE)

1.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph rechts- bzw. linksgekrümmt ist, sowie die Koordinaten der Wendepunkte. (7 BE)

1.6 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte die Graphen G_f und G_p für $-6 \le x \le 6$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwenden Sie eine eigene Seite.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (8 BE)

1.7 G_f und G_p schließen miteinander 3 Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Inhalt desjenigen Flächenstücks, das symmetrisch zur y-Achse liegt. (5 BE)

2 Eine Schnecke kriecht auf einer flachen Straße vom Startpunkt aus geradlinig immer in dieselbe Richtung. Modellhaft wird angenommen:

Die Funktion s mit $s: t \mapsto s(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2;\quad 0 \le t \le 3$

gibt den zurückgelegten Weg s (gemessen in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Minuten) wieder.
Die 1. Ableitung der Funktion s nach der Variablen t ist die Geschwindigkeit der Schnecke zum entsprechenden Zeitpunkt t.
(Auf Benennungen wird bei den folgenden Rechnungen verzichtet!)

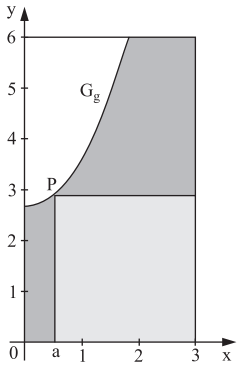
2.1 Berechnen Sie den zurückgelegten Weg und die jeweilige Geschwindigkeit der Schnecke zu den Zeitpunkten t = 1 und t = 2. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Schnecke ihre größte Geschwindigkeit erreicht hat. Wie groß ist diese maximale Geschwindigkeit? (4 BE)

3 Die dunkel gefärbte Fläche in der nebenstehenden Skizze stellt den Rest einer längs eines Parabelstücks G_g zersprungenen ehemals rechteckigen Glasplatte dar. Der zu diesem Parabelstück gehörende Funktionsterm lautet:

$$g(x) = x^2 + \frac{8}{3} \text{ mit } D_g = \left[0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right].$$

Aus dem Rest der Glasplatte soll eine achsenparallele Scheibe (hellgrau) so geschnitten werden, dass der Punkt $P(a; g(a))$ auf G_g liegt.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der „neuen“ Rechtecksfläche in Abhängigkeit von der Abszisse a des Punktes P dar. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an. (Lage von P siehe Skizze!) (4 BE)

$$\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } A(a) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8\right]$$

3.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den größten Wert A_{max} annimmt. Berechnen Sie auch A_{max}. (7 BE)

(60 BE)

Lösung

1.1 f' ergibt sich durch Integration:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int\left(\frac{3}{8}x^2 - 2\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}x^3 - 2x + C$$

f ergibt sich durch nochmalige Integration:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(\frac{1}{8}x^3 - 2x + C\right)dx$$

$$= \frac{1}{32}x^4 - x^2 + Cx + D$$

Bestimmung von C und D:

I) $p(2) = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - 4 + 2C + D = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2C + D = 8$

Es gilt $p'(x) = \frac{1}{6}x$

somit $p'(2) = \frac{1}{3} = m_p \neq 0$

$$m_f \cdot m_p = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m_f = -\frac{1}{m_p}$$

$$\Rightarrow \quad m_f = -3$$

II) $m_f = f'(2) = -3 \;\; \Rightarrow \;\; 1 - 4 + C = -3$

$\Leftrightarrow \;\; C = 0$ eingesetzt in I) ergibt

I') $2 \cdot 0 + D = 8 \;\; \Leftrightarrow \;\; D = 8$

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8$

1.2 Untersuchung in Bezug auf **Symmetrie zur y-Achse**:

Bedingung: $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in D_f$

Es gilt: $f(-x) = \frac{1}{32}(-x)^4 - (-x)^2 + 8$

$$f(-x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8 = f(x)$$

Ergebnis: G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

1.3 **Nullstellen:** $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 16)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[(x+4)(x-4)]^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+4)^2(x-4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+4)^2 = 0 \;\vee\; (x-4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -4 \;\vee\; x_2 = 4$$

doppelte Nullstelle doppelte Nullstelle

1.4 $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x$

$f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$

$f'''(x) = \frac{3}{4}x$

Relative Extrempunkte:

Notwendige Bedingung:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{8}x^3 - 2x &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{8}x(x^2 - 16) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
x_1 = 0 \ \vee \ x^2 - 16 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
x_1 = 0 \ \vee \ x_2 &= 4 \ \vee \ x_3 = -4
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{f hat bei } x_1 = 0 \text{ ein relatives Maximum} \\ H(0;8) \text{ relativer Hochpunkt} \end{cases}$$

$$f''(4) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{f hat bei } x_2 = 4 \text{ ein relatives Minimum} \\ T_1(4;0) \text{ relativer Tiefpunkt} \end{cases}$$

$$f''(-4) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{f hat bei } x_3 = -4 \text{ ein relatives Minimum} \\ T_2(-4;0) \text{ relativer Tiefpunkt} \end{cases}$$

f ist im gesamten Definitionsbereich stetig, somit folgt:
f ist streng monoton zunehmend im Intervall $[-4; 0]$ und im Intervall $[4; \infty[$.
f ist streng monoton abnehmend im Intervall $]-\infty; -4]$ und im Intervall $[0; 4]$.

1.5 Das **Krümmungsverhalten** wird mit der 2. Ableitung ermittelt:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{3}{8}x^2 - 2 \quad \text{(siehe Teilaufgabe 1.4)} \\
&= \frac{3}{8}\left(x^2 - \frac{16}{3}\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

$f''(x) > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{8}\left(x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\left(x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\left(x - \frac{4}{3}\sqrt{3} > 0 \ \wedge \ x + \frac{4}{3}\sqrt{3} > 0\right) \ \vee \ \left(x - \frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \ \wedge \ x + \frac{4}{3}\sqrt{3} < 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\left(x > \frac{4}{3}\sqrt{3} \ \wedge \ x > -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \ \vee \ \left(x < \frac{4}{3}\sqrt{3} \ \wedge \ x < -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\left(x > \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \ \vee \ \left(x < -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

f' ist im gesamten Definitionsbereich stetig, somit folgt:

G_f ist linksgekrümmt im Intervall $\left]-\infty; -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$ und im Intervall $\left[\frac{4}{3}\sqrt{3}; \infty\right[$.

f''(x) < 0:

$$\frac{3}{8}\left(x-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)<0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)<0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\sqrt{3}>0 \;\wedge\; x+\frac{4}{3}\sqrt{3}<0\right) \;\vee\; \left(x-\frac{4}{3}\sqrt{3}<0 \;\wedge\; x+\frac{4}{3}\sqrt{3}>0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x>\frac{4}{3}\sqrt{3} \;\wedge\; x<-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \;\vee\; \left(x<\frac{4}{3}\sqrt{3} \;\wedge\; x>-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\{\} \;\vee\; \left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}<x<\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$

f' ist im gesamten Definitionsbereich stetig, somit folgt:

G_f ist rechtsgekrümmt im Intervall $\left[-\frac{4}{3}\sqrt{3};\frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$.

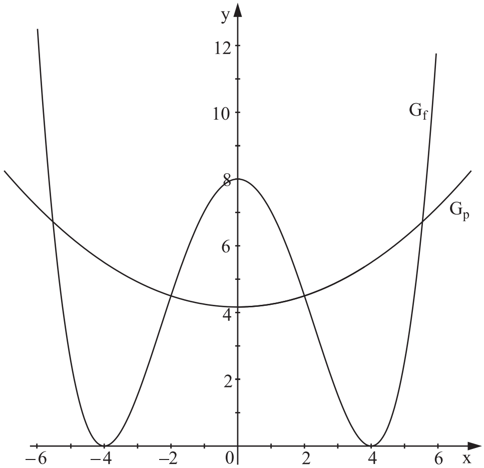
Aus dem Krümmungswechsel folgt die Existenz der Wendepunkte:

$W_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{3};\frac{32}{9}\right)$ und $W_2\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3};\frac{32}{9}\right)$.

1.6 Wertetabelle für G_f und G_p

x	0	±1	±2	±2,31	±3	±4	±5	±6
f(x)	8	7,03	4,50	3,56	1,53	0	2,53	12,5
p(x)	4,17	4,25	4,50		4,92	5,50	6,25	7,17

Grafik zu 1.6



1.7 Wegen der Teilaufgaben 1.1 und 1.6 sind die relevanten Schnittpunkte von G_f und G_p die Punkte $S_1(-2; 4{,}5)$ und $S_2(2; 4{,}5)$.

Es gilt:

$$A = \int_{-2}^{2} (f(x) - p(x))\,dx$$

Aus der Symmetrie zur y-Achse von G_f (siehe Teilaufgabe 1.2) und der Parabel G_p ergibt sich

$$A = 2 \cdot \int_{0}^{2} (f(x) - p(x))\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8 - \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{25}{6} \right) \right) dx$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{32}x^4 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{23}{6} \right) dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{160}x^5 - \frac{13}{36}x^3 + \frac{23}{6}x \right]_0^2$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{32}{160} - \frac{104}{36} + \frac{46}{6} - 0 \right)$$

$$A = 9{,}96$$

2.1 $s(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2, \quad D_s = [0; 3]$

Es gilt für die Momentangeschwindigkeit v(t):

$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}(t)$ (siehe Formelsammlung S. 58)

Somit:

$$\dot{s}(t) = v(t) = -\frac{20}{3}t^2 + 20t$$

Berechnung des Weges:

$s(1) = -\frac{20}{9} \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2$ $\qquad$ $s(2) = -\frac{20}{9} \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2$

$s(1) = \frac{70}{9}$ $\qquad$ $s(2) = \frac{200}{9}$

Berechnung der Geschwindigkeit:

$v(1) = -\frac{20}{3} \cdot 1^2 + 20 \cdot 1$ $\qquad$ $v(2) = -\frac{20}{3} \cdot 2^2 + 20 \cdot 2$

$v(1) = \frac{40}{3}$ $\qquad$ $v(2) = \frac{40}{3}$

2.2 $\dot{v}(t) = -\frac{40}{3}t + 20$

$\ddot{v}(t) = -\frac{40}{3} < 0$

Notwendige Bedingung für Extrema:

$$\dot{v}(t) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{40}{3}t + 20 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 1{,}5$$

Hinreichende Bedingung:

$$\ddot{v}(1{,}5) = -\frac{40}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{v hat bei } t = 1{,}5 \text{ ein relatives Maximum.} \\ H(1{,}5;15) \text{ relativer Hochpunkt} \end{cases}$$

Die Funktion $\dot{v}(t)$ hat im Intervall]0; 3[nur eine Nullstelle. Somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf. Das relative Maximum ist folglich absolutes Maximum der Funktion v(t).

Es gilt: $v_{max} = v(1{,}5) = 15$.

3.1 Es gilt:

$$A(a) = (3-a)\cdot g(a) = (3-a)\left(a^2 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8; \quad D_A = \left[0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right].$$

3.2 $A'(a) = -3a^2 + 6a - \frac{8}{3}; \quad D_{A'} = \left]0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right[$

$A''(a) = -6a + 6$

Notwendige Bedingung für Extrema:

$$A'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3a^2 + 6a - \frac{8}{3} = 0$$

Diskriminante: $D = 6^2 - 4\cdot(-3)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$

$D = 36 - 32 = 4 > 0$

$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2}{-6}$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \vee a_2 = \frac{4}{3}$$

Hinreichende Bedingung:

$$A''\left(\frac{2}{3}\right) = -6\cdot\frac{2}{3} + 6 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{A hat bei } a_1 = \frac{2}{3} \text{ ein relatives Minimum.} \\ T\left(\frac{2}{3}; 7{,}259\right) \text{ relativer Tiefpunkt} \end{cases}$$

$$A''\left(\frac{4}{3}\right) = -6\cdot\frac{4}{3} + 6 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{A hat bei } a_2 = \frac{4}{3} \text{ ein relatives Maximum.} \\ H\left(\frac{4}{3}; 7{,}407\right) \text{ relativer Hochpunkt} \end{cases}$$

Der Vergleich des Ordinatenwertes des relativen Hochpunktes H mit den Randwerten $A(0) = 8$ und $A\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 7{,}046$ ergibt das absolute Maximum der in D_A stetigen Funktion für a = 0.

Es gilt: $A_{max} = A(0) = 8$.