Piani in $\mathbb{R}^3$

DiCoMat Lab - Università di Trento

Nell'applet Geogebra del paragrafo 7.2 con la vista 2D attiva inserisci l'equazione $y = x$. Otterrai la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Ripeti ora l'inserimento di $y = x$ con la vista 3D attiva. Vedrai un piano π verticale (cioè parallelo all'asse z) che interseca il piano coordinato $\mathbb{R}^2_{xy}$ nella retta $y = x$. Disegna ora un punto P sul piano π ottenuto. Osservando le sue coordinate noterai che sono del tipo (t, t, s) ovunque sia P su π (in particolare se P è sulla retta $y = x$ avremo: $P = (t, t, 0)$)

Quale equazione descriverà il piano

- contenente gli assi x e z
- contenente gli assi x e y
- contenente una retta parallela all'asse x e parallelo all'asse z

In generale:

Esercizio 1. Determina l'equazione del piano π contenente l'origine e perpendicolare alla retta r passante per i punti A(3,4,-1) e B (2,2,3).

Soluzione:

La retta r ha direzione identificata dal vettore $\mathbf{v} = B - A = (-1, -2, 4)$. Indichiamo con $P(x, y, z)$ un punto generico di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathbf{p}$ il vettore identificato dal punto P.

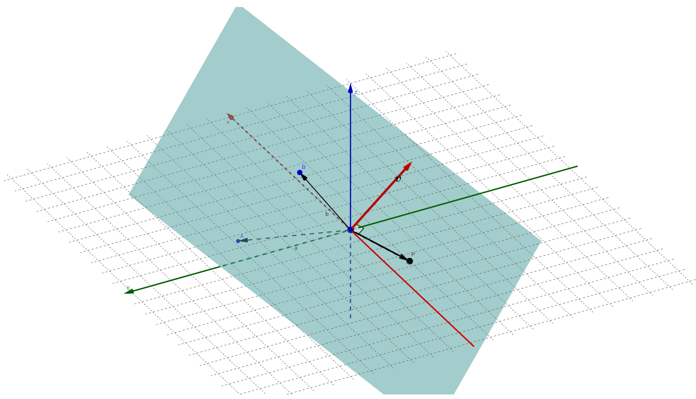
Per trovare il piano π passante per l'origine e perpendicolare alla retta r ci basta trovare tutti vettori $\mathbf{p} = (x, y, z)$ ortogonali a $\mathbf{v}$. Sappiamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{p}$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è zero. Quindi il generico vettore $\mathbf{p} = (x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale a $\mathbf{v}$ se e solo se

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = -x - 2y + 4z = 0$$

e il piano π passante per l'origine e perpendicolare alla retta r di direzione $\mathbf{v} = (-1, -2, 4)$ ha equazione

$$\pi : \ -x - 2y + 4z = 0.$$

Notiamo che le componenti del vettore perpendicolare al piano rappresentano i coefficienti della sua equazione.



□

Esercizio 2. Vogliamo ora trovare l'equazione del piano π' sempre perpendicolare alla retta r dell'esercizio precedente (ovvero parallelo al piano π appena trovato) e contenente il punto $P_0(2, 3, 1)$.

Soluzione:

Consideriamo il generico punto P del piano π' cercato e il vettore $\mathbf{w} = P - P_0 = (x - 2, y - 3, z - 1)$. Tale vettore è parallelo a π' e π, quindi è un vettore ortogonale a $\mathbf{v} = (-1, -2, 4)$. Di conseguenza:

$$-(x - 2) - 2(y - 3) + 4(z - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -x - 2y + 4z = 4$$

Anche in questo caso le componenti del vettore perpendicolare al piano rappresentano i coefficienti della sua equazione.

In generale l'**equazione vettoriale di un piano** passante per un punto P_0 e perpendicolare al vettore $\mathbf{v}$ è data da

$$\boxed{(P - P_0) \cdot \mathbf{v} = 0}$$

Notiamo che la condizione $(P - P_0) \cdot \mathbf{v} = 0$ è equivalente a $P \cdot \mathbf{v} = P_0 \cdot \mathbf{v}$.

Da quest'ultima equazione ricaviamo l'**equazione cartesiana di un piano** passante per un punto P_0 e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$

$$\pi : \ ax + by + cz = d \quad \text{con } d = P_0 \cdot \mathbf{v}$$

Esercizio 3. Determinare un'equazione del luogo geometrico dei punti P equidistanti da $A(1, 2, 3)$ e $B(3, 4, -1)$.

Soluzione:

I punti $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sono equidistanti da A e da B se $\overline{PA} = \overline{PB}$ o meglio $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + z^2 + 2z + 1$$
$$4x + 4y - 8z = 12$$
$$x + y - 2z = 3$$

Quindi i punti $P \in \mathbb{R}^3$ equidistanti da A e da B descrivono un piano π di equazione $x + y - 2z = 3$.

L'esercizio può essere risolto anche ricordando che il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B è un piano π perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio $M_{AB} = (2, 3, 1)$.
L'equazione vettoriale di tale piano è:

$$(P - M_{AB}) \cdot (B - A) = 0$$

dove $P(x, y, z)$ è un generico punto di π e $(B - A)$ rappresenta la direzione del segmento AB.
Sviluppando otteniamo:

$$x + y - 2z = 3$$

□

Ricordiamo che due piani in $\mathbb{R}^3$ possono essere:

- **Paralleli**. In questo caso sono entrambi ortogonali allo stesso vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$, quindi possono essere scritti nella forma $\pi_1 : \ ax + by + cz = d_1$ e $\pi_2 : \ ax + by + cz = d_2$ per opportuni $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.
- **Incidenti**. In questo caso la loro intersezione è una retta. Per esempio il sistema di equazioni

$$r : \ \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$$

descrive la retta r, intersezione dei due piani $\pi_1 : \ x + 2y - z = 1$ e $\pi_2 : \ 3x + y + z = 5$. Un tale sistema è anche detto **equazione cartesiana** della retta r.

Possiamo però anche ragionare da un punto di vista completamente diverso. Lavorando in $\mathbb{R}^2$ abbiamo visto che le combinazioni lineari $P = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ con direzioni diverse descrivono tutto il piano $\mathbb{R}^2$ al variare di $s, t \in \mathbb{R}$.

Con un file GeoGebra (v. Esercizi 11 e 12) ci si convince facilmente che dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ con direzioni diverse, le loro combinazioni lineari $P = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ descrivono, al variare di $s, t \in \mathbb{R}$, un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e contenente in particolare le rette $s\mathbf{u}$ e $t\mathbf{v}$.

Analogamente, dato un ulteriore punto o vettore P_0, le combinazioni lineari $P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ descrivono, al variare di $s, t \in \mathbb{R}$, un piano π di $\mathbb{R}^3$ passante per P_0 e parallelo al piano $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Il piano π contiene in particolare le rette $P_0 + t\mathbf{u}$ e $P_0 + s\mathbf{v}$.

Di conseguenza l'**equazione parametrica di un piano** di $\mathbb{R}^3$ è del tipo

$$\pi : \ P = P_o + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \ \Rightarrow \ (x, y, z) = (x_0 + tu_x + sv_x, \ y_0 + tu_y + sv_y, \ z_0 + u_z + sv_z) \ \Rightarrow$$

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + tu_x + sv_xt \\ y = y_0 + tu_y + sv_y \qquad \forall s, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + u_z + sv_z \end{cases}$$

dove P_0 è un punto di π e $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sono due vettori paralleli a π.

Esercizio 4. Determinare un'equazione parametrica del piano π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$.

Soluzione:

Determiniamo due direzioni parallele al piano π cercato:

$$\mathbf{u} = B - A = (1, -3, -1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 0)$$

Di conseguenza π è dato per esempio dai punti $P = B + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$:

$$\pi: \ (x, y, z) = (2, 0, 0) + t(1, -3, -1) + s(-1, -2, 0) \ \Rightarrow \ \pi: \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = -3t - 2s \\ z = -t \end{cases} \qquad \forall\ t,\ s \ \in \ \mathbb{R}$$

$\square$