Darstellungsmatrizen

Sei zunächst $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Wir haben die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis wie folgt definiert:

$$M(f) = [f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)], \quad e_1, \dots, e_n \text{ Basis des } \mathbb{R}^n.$$

ZIEL: Wir wollen einer linearen Abbdildung $f : V \longrightarrow W$, $dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, $dim_{\mathbb{R}}(W) = m$ eine Darstellungmatrix, die von den Basen abhängt, zu ordnen.

Sei B eine Basis von V und C eine Basis von W. Dann gibt es die Isomorphismen

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \mapsto b_i (1 \le i \le n) \text{ und } \psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow W, e_j \mapsto b_j (1 \le j \le m).$$

Hieraus erhalten wir die Abbildung $\overline{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, deren Definitionsbereich der $\mathbb{R}^n$ ist und deren Wertebereich der $\mathbb{R}^m$ ist. Wir können nun $\overline{f}$ wie oben eine Darstellunsmatrix zuordnen, ferner definieren wir $M_{B,C} := M(\overline{f})$ als die **Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen B und C.**

Was beinhaltet die Darstellunsmatrix $M_{B,C}(f)$? Die Spalten von $M_{B,C}(f)$ sind gerade per Definition die Spalten von $M(\overline{f})$. Hier wissen wir, woraus die Spalten bestehen, nämlich:

$$\begin{aligned} M(\overline{f}) &= [\overline{f}(e_1), \overline{f}(e_2), \dots, \overline{f}(e_n)] \\ &= [(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(e_1), (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(e_2) \dots, (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(e_n)] \\ &= [\psi^{-1}(f(b_1)), \psi^{-1}(f(b_2)), \dots, \psi^{-1}(f(b_n))] \end{aligned}$$

Wegen $f(b_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}\, c_j$ mit $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\psi^{-1}(f(b_i)) = \psi^{-1}(\sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}\, c_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} \psi^{-1}(c_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}\, e_j.$$

FAZIT: *Die Einträge der Matrix $M_{B,C}(f)$ sind also die Koeffizienten, die entstehen, wenn $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ durch die Basis C dargestellt werden!*

Spezielle Darstellungsmatrizen: Für $V = W$ und $f = id_V$ heisst die Matrix $M_{B,C}(id_V)$ die **Matrix zum Basiswechsel**. Nach obigem Gesagten bestehen ihren Spalten aus Koeffizienten, die entstehen, wenn die Basiselemente von B mittels der Basis C dargestellt werden.

Beispiel: Gegeben sei die folgende lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ b1, b2, b3 I(1,2,3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ c1, c2 I(Agf) eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimme $M_{B,C}(f)$.

Dazu berechnen wir die Bilder der Basisvektoren von B unter f und stellen diese mit der Basis C dar. Also:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

cAb I(11)

(ii) Sei $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ und

b1', b2', b3' II()

$C' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimme $M_{B',C'}(f)$.

c1', c2' II()

Dazu berechnen wir die Bilder der Basisvektoren von B' unter f und stellen diese mit der Basis C' dar. Also:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$M_{B',C'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

c'Ab':={{1 / 2, 3 / 4, 1 / 2}, {0, 1 / 2, 1}}
II (11)

(iii) Bestimme Matrizen P und Q, so das $M_{B',C'}(f) = P \cdot M_{B,C}(f) \cdot Q^{-1}$ gilt.

Bestimme die Basiswechsel-Matrizen $M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3})$ und $M_{C,C'}(id_{\mathbb{R}^2})$. Dann gilt nach der Zentralübung

bTb' II(15)   c'Tc II(18)

$$M_{B',C'}(f) = M_{C,C'}(id_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{B,C}(f) \cdot M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3}).$$

c'Ab' = c'Tc   cAb   bTb'

Bestimmung von $M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3})$: Wir stellen Elemente der Basis B' durch die Basis B dar, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\tfrac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\tfrac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung von $M_{C,C'}(id_{\mathbb{R}^2})$: Wir stellen Elemente der Basis C durch die Basis C' dar, also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Basiswechsel-Matrizen lauten also:

$$M_{C,C'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(iv) Setzen wir $P = M_{C,C'}(id_{\mathbb{R}^2})$ und $Q^{-1} = M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^3})$ so, gilt $M_{B',C'}(f) = P \cdot M_{B,C}(f) \cdot Q^{-1}$. Schliesslich erhalten wir

c'Tc cAb bTb'

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$