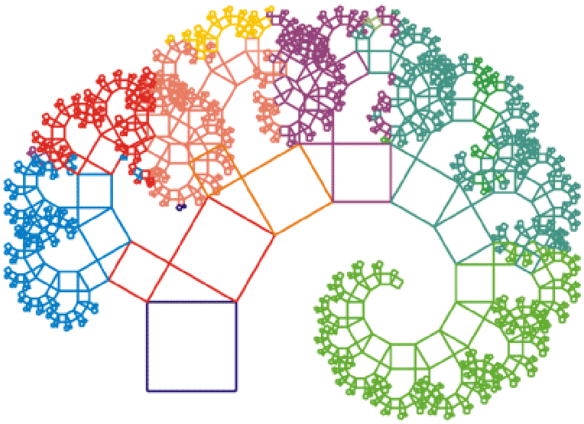
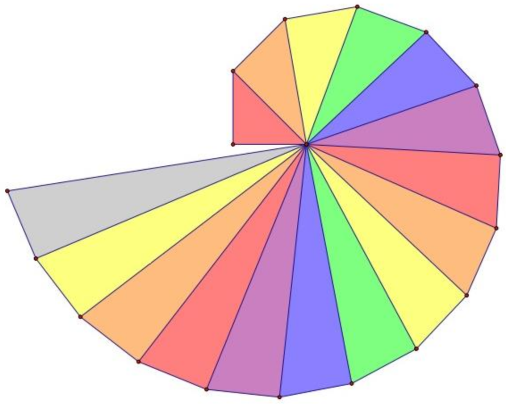
2. Aufgabe zu 31.05.2017

1. Unterrichtsplanung für eine Klasse der Unterstufe

Thema: Pythagoräischer Baum und Wurzelschnecke





Unterrichtsablauf

Zu Beginn der Einheit wird der kürzlich gelernte Pythagoräische Lehrsatz an einem rechtwinkeligen Dreieck von der Lehrkraft oder einer Schülerin/einem Schüler an der Tafel mit Hilfe einer Skizze wiederholt.

Anschließend bekommen die Schülerinnen und Schüler jeweils zu zweit einen Stoß foliierter, farbiger Quadrate und rechtwinkelige Dreiecke ausgeteilt. Die Figuren sollen nun so angeordnet werden, dass die Seitenlänge eines Dreiecks jeweils mit den Seitenlängen eines Quadrates zusammenpasst.

Das nun entstandene Gebilde, der so genannte „Pythagorasbaum", wird nach einiger Zeit gemeinsam besprochen, und noch einmal erwähnt, wo genau sich der Satz des Pythagoras dabei „versteckt".

Zur besseren Anschauung könnte nun auch ein Applet vorgezeigt werden, welches die unterschiedlichen „Bäume" bei verschiedenen Winkeln zwischen den Katheten und der Hypotenuse, veranschaulicht.

Link zu einer bereits fertigen Geogebra Simulation: https://www.geogebra.org/m/UqzJwsKp

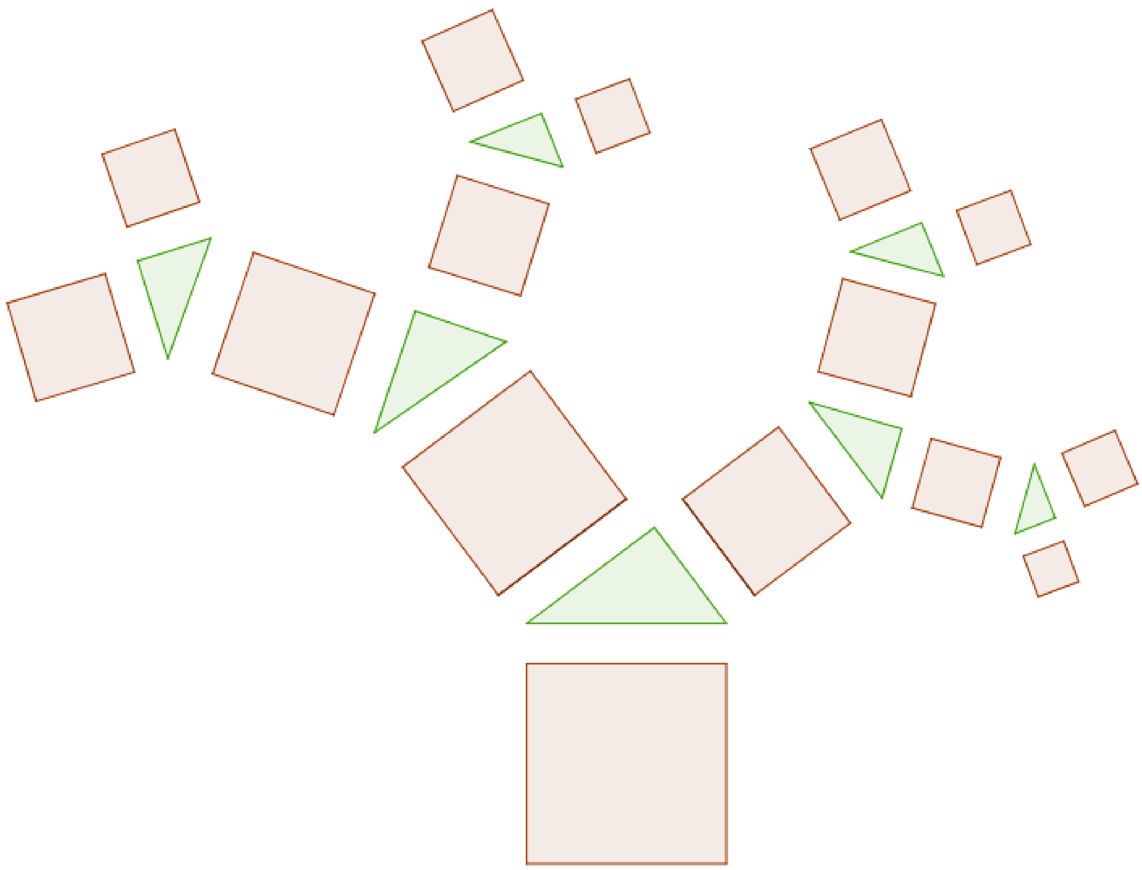
Als nächstes wird eine weitere Anwendung vorgestellt, und zwar die sogenannte „Wurzelschnecke“.

Kurz wird die Konstruktion der Schnecke erklärt: Man beginnt mit einem rechtwinkeligen Dreieck der Seitenlängen 1, $\sqrt{1}$ und $\sqrt{2}$. Als nächstes wird ein zweites rechtwinkeliges Dreieck daran gezeichnet, wobei die Hypotenuse des ersten Dreiecks zu der Kathete des nächsten wird, und die zweite Kathete soll wieder 1 lang sein. Die Länge der Hypotenuse des zweiten Dreiecks beträgt also nun $\sqrt{3}$. So wird weiter vorgegangen, bis man eine Schnecke bestehend aus n Dreiecke erhält, welche stets eine Kathete der Länge 1 und eine zweite Kathete der Länge $\sqrt{n}$ besitzen.

Die Schülerinnen und Schüler berechnen nun die Seitenlänge der Dreiecke und konstruieren die Schnecke in ihr Heft. Nach einigen Minuten wird abschließend über einen Beamer ein Applet vorgezeigt, welches mehrere Konstruktionsschritte simuliert.

Link zu einer bereits fertigen GeoGebrasimulation: https://www.geogebra.org/m/wZcBDEYh

Vorlage zu den Quadraten und Dreiecken (mit Geogebra konstruiert):



Methoden

Zu Beginn findet eine kurze Wiederholung in Form eines Fragen-entwickelnden LehrerInnenvortrages des zuvor gelernten Stoffes statt. Im Anschluss daran werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, in Partnerarbeit mit den vorgefertigten Kärtchen den „Baum des Pythagoras“ zu legen. Anschließend lernen sie die „Wurzelschnecke“ kennen und sollen diese in Einzelarbeit berechnen und konstruieren. Beide Anwendungen des pythagoräischen Lehrsatzes werden zusätzlich mit einem dynamischen Applet veranschaulicht.

Didaktisch-Methodischer Kommentar

Mit diesen beiden Modellen bekommen die Schülerinnen und Schüler eine Ahnung davon, welche „Ästhetik“ die Mathematik auch zu bieten hat. Man erkennt, dass hinter solchen anfänglich komplex wirkenden Strukturen, oft nur einfache Regeln stecken, welche ohne mühsame Rechenarbeit einfach nachzuvollziehen sind.

Außerdem wird nach dieser Unterrichtseinheit die geometrische „Grundfigur“ des Pythagoras gut im Gedächtnis der Schülerinnen und Schüler verankert sein.

2. Unterrichtsplanung für eine Klasse der Oberstufe

Thema: Goldener Schnitt in der Kunst

Unterrichtsablauf

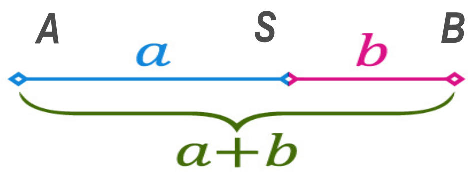
Die Einheit zum Thema „Goldener Schnitt" könnte beispielsweise über die sogenannte Fibonacci-Reihe eingeleitet werden. Wurden in den vergangenen Einheiten „Folgen und Reihen" behandelt, so lohnt es sich, wenn noch genügend Zeit vorhanden ist, auf ein besonderes Verhältnis, nämlich das des „Goldenen Schnittes" hinzuweisen.

Betrachtet man das Verhältnis zwischen zweier benachbarten Folgenglieder der Fibonacci-Reihe, so bemerkt man, dass sie sich dem Goldenen Schnitt Φ = 1,6180339887… annähert.

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$
1	2	1,5	≈ 1,666	1,6	1,625	≈ 1,615	≈ 1,619	≈ 1,618

Eine weitere Definition des Goldenen Schnittes lautet außerdem:

Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Ein Punkt S von $\overline{AB}$ teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, falls sich die größere Teilstrecke zur kleineren so verhält, wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil.



Es kann zwei Punkte geben, die eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilen, je nachdem, ob die größere Strecke bei A oder bei B liegt.

Üblicherweise wird der Teilungspunkt S so gewählt, dass er „näher bei“ B liegt, dann ist die größere Strecke bei A.

Mit dieser Vereinbarung kann man folgendermaßen umformulieren: Der Punkt S $t$eilt $\overline{\mathrm{AB}}$ im goldenen Schnitt, falls gilt:

$$|\overline{AS}|/|\overline{SB}| = |\overline{AB}|/|\overline{AS}|$$

Die Länge der größeren Strecke $\overline{\mathrm{AS}}$ wird mit M bezeichnet und Major genannt; entsprechend heißt die Länge m der kleineren Strecke $\overline{\mathrm{SB}}$ der Minor. Damit kann man den goldenen Schnitt auch wie folgt beschreiben:

Sei $\overline{\mathrm{AB}}$ eine Strecke der Länge a. Ein Punkt S von $\overline{\mathrm{AB}}$ teilt diese Strecke im goldenen Schnitt, falls

$$a/M = M/m$$

also genau dann wenn

$$am = M^2$$

$$(M + m)m = M^2$$

$$M/m + 1 = (M/m)^2$$

$$(M/m)^2 - M/m - 1 = 0$$ gilt.

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung (in der Unbekannten M/m) erhält man die Lösung:

$$M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398887\ldots$$

Nach dieser Einführung sollen vier Gruppen gebildet werden. Jede Gruppe kann sich eines der folgenden Themen aussuchen und hat etwa zwanzig Minuten Zeit, um nach ausgiebiger Recherche im Internet oder in von der Lehrperson zur Verfügung gestellten Büchern, eine PowerPoint-Präsentation zu ihrem Thema zu erstellen:

- *Konstruktionsmöglichkeiten des Goldenen Schnittes:*
  Versuche, mindestens drei verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten zu finden
- *Der Goldene Schnitt in der Kunst:*
  Beschäftige dich mit Malern und Bildhauern, wie beispielsweise Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Michelangelo, Phidias und weiteren, und finde heraus, wo sich der Goldene Schnitt in ihren Kunstwerken verbirgt
- *Der Goldene Schnitt in der Architektur*:
  Suche nach einigen Bauwerken, wie beispielsweise die Akropolis, dem Parthenon oder der Kathedrale Notre Dame in Paris und finde heraus, wo sich der Goldene Schnitt in den Bauwerken verbirgt
- *Der Goldene Schnitt in der Natur:*
  Suche einige verschiedene Naturphänomene und finde heraus, wo sich der Goldene Schnitt verbirgt

Am Ende der Einheit soll nun jede Gruppe ihr Thema vorstellen. Alle Präsentationen werden gesammelt und in einen Online-Ordner für alle Schülerinnen und Schüler zur Verfügung gestellt.

Methoden

Zu Beginn der Einheit wird der Goldene Schnitt in einem geleiteten Unterrichtsgespräch an der Tafel gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet. Anschließend daran arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Gruppenarbeit ein Thema aus, welches sie am Ende der Einheit vor der Klasse präsentieren sollen.

Didaktisch-Methodischer Kommentar

Die Schülerinnen und Schüler erkennen mit der Erarbeitung des Goldenen Schnittes, dass die Mathematik vielfältiger in ihrem Alltagsleben auftritt, als sie bisher vielleicht vermutet hatten. Außerdem wird klar, dass viele berühmte Künstlerinnen und Künstler auf die Regeln der Mathematik zurückgreifen, um möglichst „schöne“ Figuren zu erzeugen *(„Geometrie ist die richtige Grundlage aller Malerei“ – Albrecht Dürer*).

Natürlich ist es nicht möglich, jede Schülerin und jeden Schüler gleichermaßen mit diesem Thema für die Mathematik zu motivieren, allerdings ist es meiner Meinung nach wichtig, Mathematik auch in einem „anderen Blickwinkel“ kennenzulernen.