CAPITOLO

G4

La circonferenza, i poligoni inscritti e circoscritti

Bulloni!

La torre Eiffel, un gigante di ferro: 50 ingegneri, 221 operai, 5300 disegni preparatori, 320 metri d'altezza, 10 000 tonnellate di peso, 18 038 travi in acciaio e ben due milioni e mezzo di bulloni…

…perché le teste dei bulloni sono quasi sempre esagonali?

➡ La risposta a pag. G199

1. La circonferenza e il cerchio

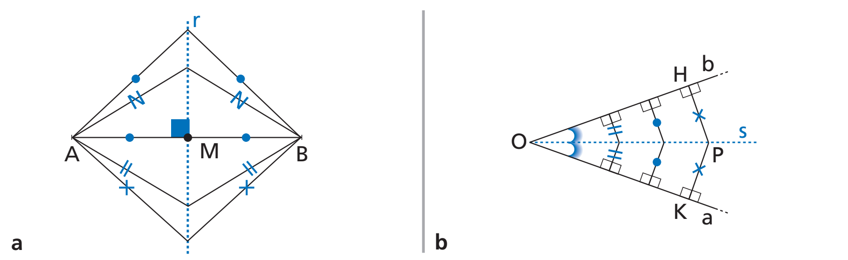
I luoghi geometrici

Un **luogo geometrico** è l'insieme di *tutti e soli* i punti del piano che godono di una certa proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo.

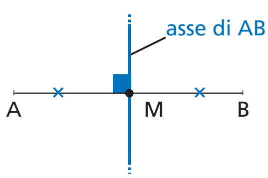
Consideriamo due esempi.

L'**asse di un segmento** è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento (figura 1*a*).

La **bisettrice di un angolo** è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo (figura 1*b*).



◗ L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento, passante per il suo punto medio.

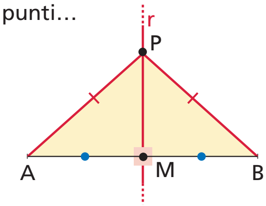


◂ **Figura 1**

▶ Per poter affermare che una figura è un luogo geometrico occorre dimostrare che:
1. tutti i punti godono della stessa proprietà caratteristica;
2. solo i punti della figura godono di quella proprietà.

- *Tutti* e *soli* i punti dell'asse hanno uguale distanza dagli estremi A e B del segmento.

Tutti i punti…

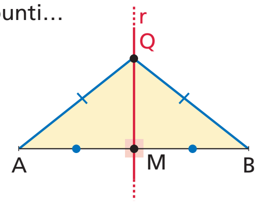


Ipotesi 1. r è asse di AB;
2. $P \in r$.

Tesi $PA \cong PB$.

a. Un punto P dell'asse è equidistante da A e da B poiché i triangoli AMP e PMB sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Solo i punti…



Ipotesi 1. r è asse di AB;
2. $QA \cong QB$.

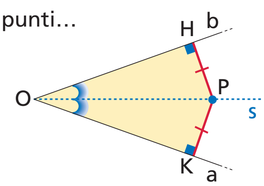
Tesi $Q \in r$.

b. Un punto Q equidistante da A e da B appartiene all'asse di AB poiché, essendo il triangolo AQB isoscele, la mediana QM è anche altezza.

▶ **Figura 2**

- *Tutti* e *soli* i punti della bisettrice hanno uguale distanza dai lati Oa e Ob dell'angolo.

Tutti i punti…

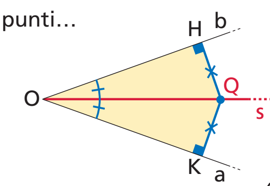


Ipotesi 1. Os è bisettrice di $a\hat{O}b$;
2. $P \in Os$;
3. $PH \perp b$;
4. $PK \perp a$.

Tesi $PH \cong PK$.

a. Un punto P della bisettrice è equidistante da a e da b poiché i triangoli OHP e OKP sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Solo i punti…



Ipotesi 1. Os è bisettrice di $a\hat{O}b$;
2. $QH \cong QK$;
3. $QH \perp b$;
4. $QK \perp a$.

Tesi $Q \in Os$.

b. Un punto Q equidistante da a e da b appartiene alla bisettrice di $a\hat{O}b$ poiché i triangoli OHQ e OKQ sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

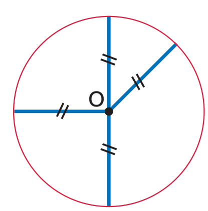
▶ **Figura 3**

La circonferenza e il cerchio

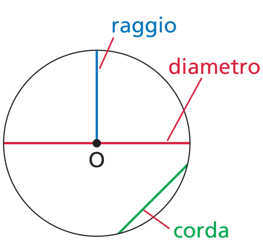
DEFINIZIONE

Circonferenza

Una circonferenza è il luogo dei punti di un piano che hanno distanza assegnata da un punto, detto centro.



▶ Il concetto di luogo geometrico ci permette di riscrivere la definizione di circonferenza data nel paragrafo 3 del capitolo G1.



Si chiama **raggio** della circonferenza ogni segmento che ha come estremi il centro e un punto della circonferenza stessa.

Ogni segmento che ha per estremi due punti di una circonferenza si chiama **corda**.

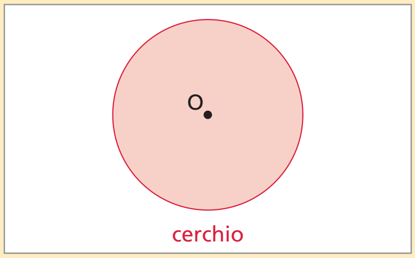
Ogni corda passante per il centro della circonferenza è detta **diametro**.

I punti interni a una circonferenza sono i punti che hanno distanza dal centro minore del raggio; i punti esterni hanno distanza dal centro maggiore del raggio.

DEFINIZIONE

Cerchio

Un cerchio è una figura piana formata dai punti di una circonferenza e da quelli interni alla circonferenza.

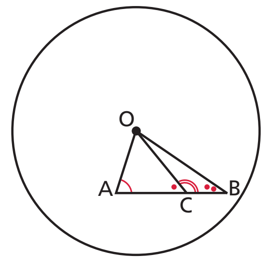


Il cerchio è il luogo dei punti che hanno distanza dal centro minore o uguale al raggio.

Se congiungiamo due punti qualunque A e B di un cerchio, il segmento AB risulta completamente interno al cerchio.

Infatti, se A e B appartengono a un diametro, anche ogni punto di AB appartiene allo stesso diametro e quindi è interno al cerchio.

Se A e B non appartengono a uno stesso diametro, consideriamo il triangolo OAB (figura a lato). Scelto C su AB, il segmento OC, interno al triangolo, è minore di OA o di OB (o di entrambi se $OC \perp AB$).
Infatti, se OC non è perpendicolare ad AB, congiungendo O con C, si formano un angolo ottuso e uno acuto. Per esempio, nella figura, l'angolo ottuso è $O\hat{C}B$. Considerato il triangolo OCB, poiché ad angolo maggiore ($O\hat{C}B$) sta opposto il lato maggiore, abbiamo che $OC < OB$. Se OC è minore di un lato è anche minore del raggio.
Pertanto il cerchio è una forma **convessa**.



La circonferenza per tre punti non allineati

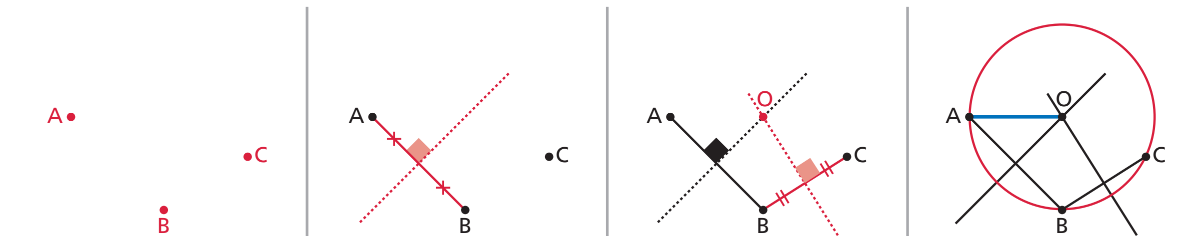
TEOREMA

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

Ipotesi A, B, C sono punti non appartenenti a una stessa retta.

Tesi 1. Esiste una circonferenza passante per A, B e C;
2. la circonferenza per A, B e C è unica.

▼ **Figura 4 Costruzione.** Se i tre punti fossero allineati, potresti ottenere il punto O?



a. Disegniamo tre punti A, B e C non allineati.

b. Congiungiamo A con B e tracciamo l'asse del segmento AB.

c. Congiungiamo B con C e tracciamo l'asse del segmento BC. Poiché A, B e C non sono allineati, i due assi si incontrano in un punto, che chiamiamo O.

d. Puntiamo il compasso in O con apertura OA e tracciamo la circonferenza.

DIMOSTRAZIONE

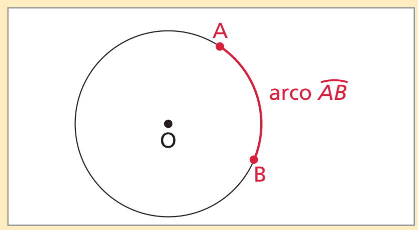
1. Per dimostrare l'esistenza della circonferenza controlliamo la correttezza della costruzione.
   Il punto O appartiene all'asse di AB, *quindi* ha la stessa distanza da A e da B, ossia $OA \cong OB$.
   Il punto O appartiene anche all'asse di BC, *quindi* ha la stessa distanza da B e da C, ossia $OB \cong OC$.
   Per la proprietà transitiva è anche $OA \cong OC$, *pertanto* O è equidistante dai punti A, B e C, *quindi* i punti A, B, C appartengono a una circonferenza di centro O.
2. Per dimostrare l'unicità, basta osservare che è unico il punto di intersezione dei due assi, *quindi* è unico il punto O equidistante da A, B e C.

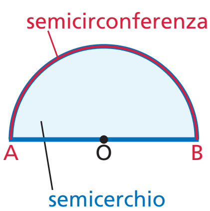
Le parti della circonferenza e del cerchio

DEFINIZIONE

Arco

Un arco è la parte di circonferenza compresa fra due suoi punti.





I due punti della circonferenza che delimitano l'arco sono gli **estremi** dell'arco. L'arco di estremi A e B si indica con $\overset{\frown}{AB}$.

Una **semicirconferenza** è un arco i cui estremi sono distinti e appartengono a un diametro.

La parte di piano *compresa* fra una semicirconferenza e un diametro si chiama **semicerchio**.

Usando il termine «compresa» intendiamo dire, qui e in seguito, che anche le linee del contorno fanno parte della figura.

Gli estremi di una corda suddividono la circonferenza in due archi; diremo che la corda **sottende** i due archi oppure che ogni arco è sotteso dalla corda (figura 5).

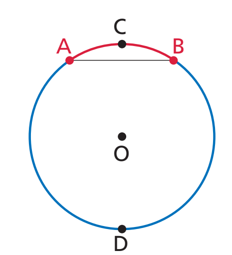
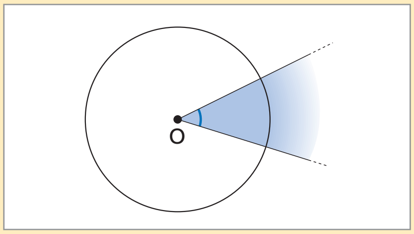


Figura 5 La corda AB sottende due archi, quello disegnato in rosso e quello disegnato in blu. Per evitare ambiguità, l'arco rosso si può indicare con $\overset{\frown}{ACB}$, quello blu con $\overset{\frown}{ADB}$.
Possiamo individuare un arco anche indicando se è il minore o il maggiore fra i due aventi come estremi A e B.

DEFINIZIONE

Angolo al centro

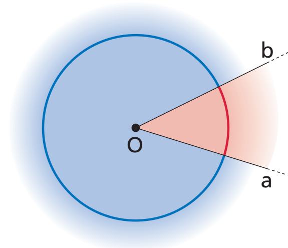
Un angolo al centro è un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.



Poiché la circonferenza è una linea chiusa, se congiungiamo un punto interno con uno esterno a essa, il segmento ottenuto interseca la circonferenza in un punto.

Pertanto i lati di un angolo al centro intersecano la circonferenza in due punti, che sono gli estremi di un arco, intersezione fra l'angolo al centro e la circonferenza. Diremo che l'angolo al centro **insiste** su tale arco.

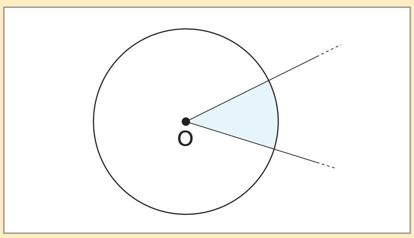
Se tracciamo due semirette con origine nel centro di una circonferenza, individuiamo due angoli al centro, di cui, in genere, uno è convesso e l'altro concavo. L'angolo convesso insiste sull'arco minore della circonferenza, mentre l'angolo concavo insiste sull'arco maggiore della circonferenza.



DEFINIZIONE

Settore circolare

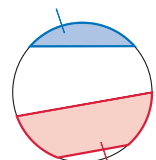
Un settore circolare è la parte di cerchio compresa fra un arco e i raggi che hanno un estremo negli estremi dell'arco.



Possiamo definire il settore circolare anche come intersezione di un cerchio e di un suo angolo al centro.

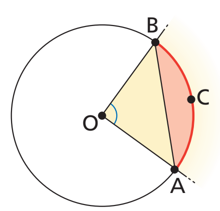
La parte di cerchio compresa fra un arco e la corda che lo sottende viene chiamata **segmento circolare a una base**.

Un **segmento circolare a due basi** è la parte di cerchio compresa fra due corde parallele e i due archi che hanno per estremi gli estremi delle due corde.



Gli angoli al centro e le figure a essi corrispondenti

Dati una circonferenza e un suo arco $\overset{\frown}{ACB}$, come nella figura 6, risultano determinati senza ambiguità anche l'angolo al centro $A\hat{O}B$ che contiene C, il settore circolare $AOBC$ e il segmento circolare ABC di base AB.



◀ Figura 6

Più in generale, ognuna delle figure precedenti determina univocamente le altre. Diciamo che l'arco, l'angolo al centro, il settore circolare e il segmento circolare così individuati sono fra loro **corrispondenti**.

▶ Le corrispondenze considerate sono biunivoche. Per esempio, a ogni angolo al centro corrisponde uno e un solo arco e viceversa.

TEOREMA

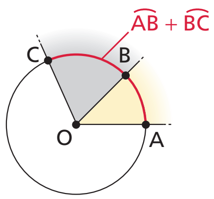
Data una circonferenza, se si verifica una delle seguenti congruenze:

- fra due angoli al centro,
- fra due archi,
- fra due settori circolari,
- fra due segmenti circolari,

allora sono congruenti anche le restanti figure corrispondenti a quelle considerate.

Per esempio, se sono congruenti due archi, allora sono congruenti anche le due corde corrispondenti, gli angoli al centro corrispondenti…

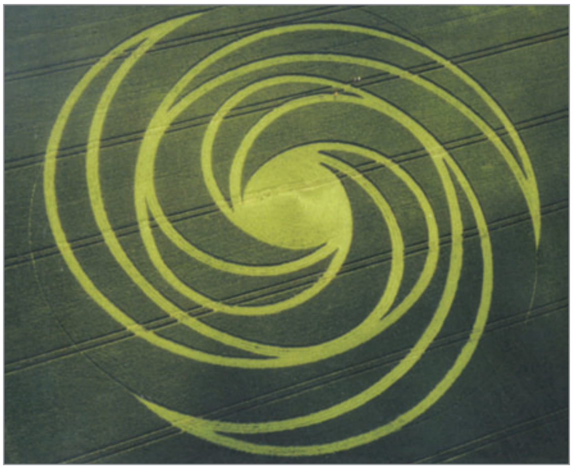
La dimostrazione si basa sul fatto che, prese per ipotesi due figure congruenti, esiste un movimento rigido che porta a far coincidere le due figure e tutti gli elementi a esse corrispondenti.



La corrispondenza fra archi e angoli al centro consente di definire i concetti di minore, maggiore, somma, differenza, multiplo e sottomultiplo relativamente agli archi e agli angoli a essi corrispondenti. Per esempio, diciamo che in una circonferenza la **somma di due archi** è l'arco che ha come angolo al centro la somma degli angoli al centro corrispondenti ai due archi dati.

ESPLORAZIONE: I CERCHI NEL GRANO

I cerchi nel grano (*crop circles*) compaiono in Inghilterra alla fine degli anni Settanta su vasti campi, di notte, durante l'estate. Al loro interno le spighe sono piegate a spirale e non spezzate.
Fino al 1980 i cerchi conosciuti sono solo tre: il più grande di venticinque metri di diametro, il più piccolo delle dimensioni di una ruota. Quando i giornali cominciano a parlarne, i cerchi aumentano progressivamente di numero e presentano forme sempre più complesse. Diventano vere e proprie opere d'arte, poi definite «pittogrammi»: cerchi collegati tra loro con appendici varie, triangoli o rettangoli, in modo da creare composizioni elaborate e spettacolari. Alcune prove portano a concludere che i cerchi sono esclusivamente opera umana, ma c'è anche chi sostiene il contrario. Fra ufologi e non, il dibattito è ancora aperto.



▲ Hackpen Hill, Inghilterra, 4 luglio 1999.

IN CINQUE SLIDE

La testimonianza più celebre riguardante qualcosa di analogo ai *crop circles* nell'antichità è data dall'incisione seicentesca del Mowing Devil, o Diavolo Mietitore (1678). Di che si tratta?
Cerca nel web l'interpretazione fornita dagli esperti e spiega le differenze rispetto ai comuni cerchi nel grano. Prepara una presentazione multimediale sui *crop circles* e sul Diavolo Mietitore.

Cerca nel web: diavolo mietitore, mowing devil, crop circles.

2. I teoremi sulle corde

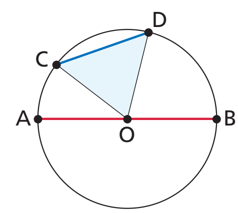
Un diametro è maggiore di ogni corda non passante per il centro

TEOREMA

In una circonferenza, ogni diametro è maggiore di qualunque altra corda che non passa per il centro.

Ipotesi 1. AB diametro;
2. CD corda non passante per il centro.

Tesi $AB > CD$.

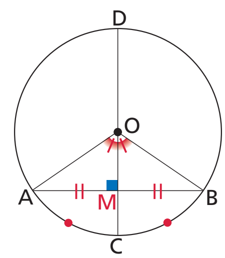


DIMOSTRAZIONE Consideriamo il triangolo COD. La corda CD è lato del triangolo COD, *quindi* è minore della somma degli altri due lati. *Pertanto*, possiamo scrivere $CD < OC + OD$, oppure $OC + OD > CD$. OC e OD sono due raggi, *quindi* la loro somma è un segmento congruente al diametro AB. *Pertanto*, il diametro è maggiore della corda.

Il diametro perpendicolare a una corda

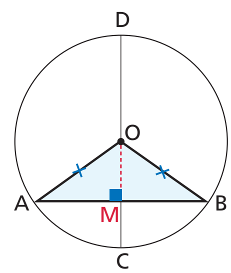
TEOREMA

Se in una circonferenza un diametro è perpendicolare a una corda, allora la corda, l'angolo al centro e l'arco corrispondenti risultano divisi a metà da tale diametro.



Ipotesi 1. AB è una corda;
2. CD è un diametro;
3. $CD \perp AB$.

Tesi 1. $AM \cong MB$;
2. $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$;
3. $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$.



DIMOSTRAZIONE Il triangolo ABO è isoscele, perché i lati OA e OB sono due raggi. Il segmento OM è altezza, in quanto $AB \perp CD$ per l'ipotesi 3. Nel triangolo isoscele l'altezza è:

- mediana, *quindi* $AM \cong MB$;
- bisettrice, *quindi* $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$.

Inoltre, nella circonferenza, ad angoli al centro congruenti corrispondono archi congruenti, *quindi* $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$.

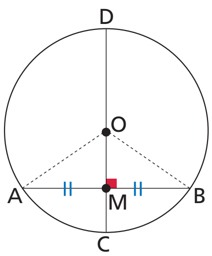
Il diametro per il punto medio di una corda

TEOREMA

Se in una circonferenza un diametro interseca una corda non passante per il centro nel suo punto medio, allora il diametro è perpendicolare alla corda.

Ipotesi 1. AB è una corda non passante per O;
2. CD è un diametro;
3. $AM \cong MB$.

Tesi $CD \perp AB$.



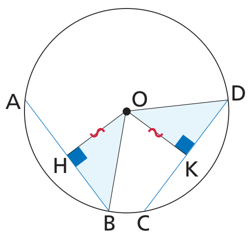
DIMOSTRAZIONE Congiungiamo A e B con il centro O. Otteniamo il triangolo isoscele AOB in cui OM è la mediana relativa alla base AB, in quanto $AM \cong MB$ per l'ipotesi 3. In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza. *Pertanto*, CD è perpendicolare ad AB.

Corollario. In una circonferenza l'asse di una corda passa per il centro della circonferenza.

La relazione tra corde aventi la stessa distanza dal centro

TEOREMA

In una circonferenza, corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro.



Ipotesi 1. $AB \cong CD$;
2. $OH \perp AB$;
3. $OK \perp CD$.

Tesi $OH \cong OK$.

DIMOSTRAZIONE Congiungiamo il centro O con gli estremi B e D. Consideriamo i triangoli rettangoli OHB e OKD, essi hanno:

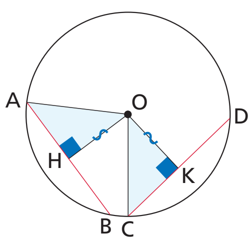
- $OB \cong OD$ perché raggi;
- $HB \cong KD$ perché metà di corde congruenti (infatti, nei triangoli isosceli AOB e COD le altezze OH e OK sono anche mediane).

Pertanto, i triangoli rettangoli OHB e OKD sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare, sono congruenti i cateti OH e OK.

Vale anche il **teorema inverso**.

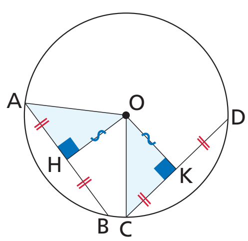
TEOREMA

In una circonferenza, corde aventi la stessa distanza dal centro sono congruenti.



Ipotesi 1. $OH \perp AB$;
2. $OK \perp CD$;
3. $OH \cong OK$.

Tesi $AB \cong CD$.

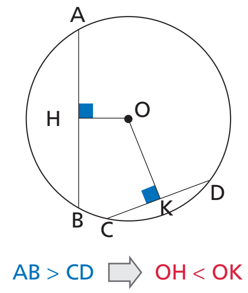


DIMOSTRAZIONE I triangoli AHO e CKO, rettangoli per le ipotesi 1 e 2, hanno:

- $AO \cong CO$ perché raggi di una stessa circonferenza;
- $OH \cong OK$ per l'ipotesi 3.

Quindi sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare sono congruenti i cateti AH e CK.
I triangoli AOB e COD sono isosceli, quindi AH e CK sono la metà rispettivamente di AB e CD.
Se $AH \cong CK$, anche $2AH \cong 2CK$, *pertanto* le corde AB e CD sono congruenti.

Vale inoltre il seguente teorema, di cui proponiamo la dimostrazione guidata a pagina G210.



TEOREMA

Se in una circonferenza due corde non sono congruenti, non hanno la stessa distanza dal centro: la corda maggiore ha distanza minore.

3. Le posizioni di una retta rispetto a una circonferenza

I punti in comune fra una retta e una circonferenza

TEOREMA

Una retta e una circonferenza che si intersecano non possono avere più di due punti in comune.

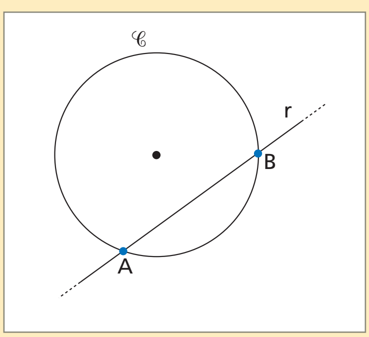
DIMOSTRAZIONE Ragioniamo per assurdo.
Supponiamo che la retta r e la circonferenza abbiano in comune tre punti A, B e C.
Poiché i punti A, B e C appartengono a r, i segmenti AB e BC sono allineati. Di conseguenza, i loro assi sono entrambi perpendicolari a r, *quindi* sono paralleli fra loro.
D'altra parte, AB e BC sono corde della circonferenza, *quindi* i loro assi devono passare per il centro. *Pertanto*, le rette individuate da AB e BC si intersecano.
Risulterebbe che due rette, contemporaneamente, si intersecano e sono parallele. Poiché questo è assurdo, retta e circonferenza non possono avere tre (o più) punti in comune.

Il ragionamento vale anche per più di tre punti in comune.

DEFINIZIONE

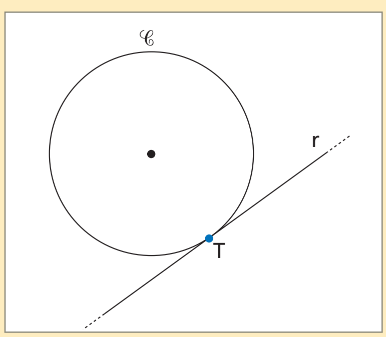
Retta secante una circonferenza

Una retta è **secante** una circonferenza se ha due punti in comune con essa.



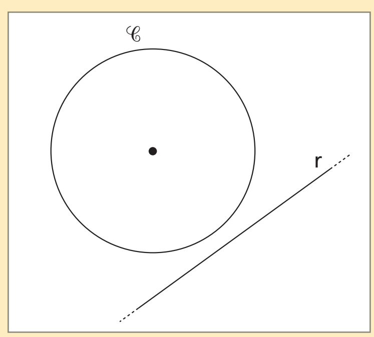
Retta tangente a una circonferenza

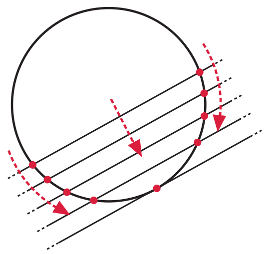
Una retta è **tangente** a una circonferenza se ha un solo punto in comune con essa.



Retta esterna a una circonferenza

Una retta è **esterna** a una circonferenza se non ha punti in comune con essa.





▲ Figura 7

Se consideriamo le rette secanti e la tangente parallele a una retta data (figura 7), notiamo che, man mano che le secanti si avvicinano alla retta tangente, i punti di intersezione con la circonferenza si avvicinano sempre più fra loro. Si può allora pensare che anche per la tangente i punti di intersezione con la circonferenza siano due, e siano coincidenti.

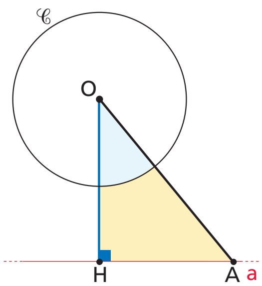
La distanza di una retta dal centro di una circonferenza e la sua posizione rispetto alla circonferenza stessa

TEOREMI

Se la distanza del centro di una circonferenza da una retta è:

1. maggiore del raggio, allora la retta è esterna alla circonferenza;
2. uguale al raggio, allora la retta è tangente alla circonferenza;
3. minore del raggio, allora la retta è secante la circonferenza.

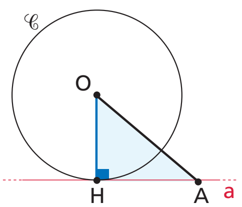
Esaminiamo i tre casi possibili fornendo separatamente le dimostrazioni. Indichiamo con a la retta, con $\mathscr{C}$ la circonferenza e con OH il segmento di perpendicolare condotto dal centro della circonferenza alla retta.



1. Ipotesi $OH > r$. **Tesi** a è esterna a $\mathscr{C}$.

DIMOSTRAZIONE Indichiamo con A un altro qualsiasi punto della retta a, diverso da H, e tracciamo il segmento OA.
Il segmento OH è maggiore del raggio, *quindi* il punto H è esterno alla circonferenza.
Il segmento OA è ipotenusa del triangolo rettangolo AOH, *quindi* $OA > OH$.

$OH > r$ per ipotesi, *quindi* $OA > r$, *pertanto* il punto A è esterno alla circonferenza.
La retta a non ha alcun punto in comune con la circonferenza, *pertanto* è esterna.



2. Ipotesi $OH \cong r$. **Tesi** a è tangente a $\mathscr{C}$.

DIMOSTRAZIONE Consideriamo un altro qualsiasi punto A della retta a, diverso da H, e congiungiamo A con il centro O.
Il segmento OH è congruente al raggio, *quindi* il punto H appartiene alla circonferenza.
Il segmento OA è ipotenusa del triangolo rettangolo OHA, *quindi* $OA > OH$.
Per ipotesi $OH \cong r$, *quindi* $OA > r$, *pertanto* il punto A è esterno alla circonferenza.
La retta a ha un solo punto in comune con la circonferenza, *pertanto* è tangente.

3. Ipotesi $OH < r$. **Tesi** a è secante $\mathscr{C}$.

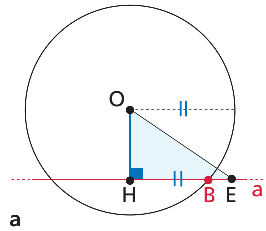
DIMOSTRAZIONE Consideriamo sulla retta a un segmento HE congruente al raggio e congiungiamo O con E (figura a).

Nel triangolo rettangolo OHE l'ipotenusa OE è maggiore del cateto HE, *quindi* possiamo scrivere $OE > HE$. Ma $HE \cong r$, *quindi* $OE > r$, *pertanto* il punto E è esterno alla circonferenza.

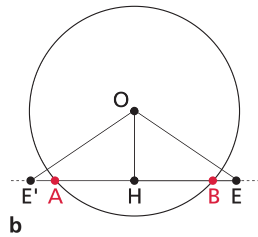
Il segmento HE congiunge il punto H, interno alla circonferenza, con il punto E, esterno, *quindi*, per il postulato di partizione del piano, HE interseca la circonferenza almeno in un punto (in figura il punto B).

Ripetendo la costruzione da parte opposta rispetto a OH (figura b), si trova che la retta interseca la circonferenza nel punto A.

La retta a ha in comune con la circonferenza due punti, A e B, *pertanto* risulta secante.



a



b

I tre teoremi appena dimostrati ammettono anche i **teoremi inversi**, che sono tutti dimostrabili per assurdo.
Per esempio, dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA

Se una retta è tangente a una circonferenza, la sua distanza dal centro è uguale al raggio.

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo per assurdo.
Se la distanza fosse maggiore o minore del raggio, allora la retta sarebbe rispettivamente esterna o secante. Ciò contraddirebbe l'ipotesi.

Dai teoremi precedentemente dimostrati deriva il seguente.

TEOREMA

Se una retta è tangente a una circonferenza di centro O in un suo punto H, allora è perpendicolare al raggio OH.

Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA

Se una retta è perpendicolare al raggio di una circonferenza nel suo estremo H, allora è tangente in H alla circonferenza.

Poiché la perpendicolare a una retta passante per un punto è una e una sola, anche la retta tangente in un punto è una e una sola.

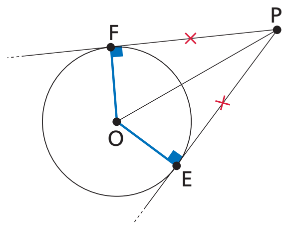
Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno

TEOREMA

Se da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le due rette tangenti a essa, allora i segmenti di tangente, aventi ciascuno un estremo nel punto P e l'altro in un punto in comune con la circonferenza, sono congruenti.

Ipotesi 1. P è esterno alla circonferenza $\mathscr{C}$;
2. le rette PE e PF sono tangenti a $\mathscr{C}$.

Tesi $PE \cong PF$.



◄ **Figura 8**

DIMOSTRAZIONE $OE \perp EP$, in quanto raggio condotto nel punto di tangenza; $OF \perp FP$ per lo stesso motivo, *quindi* i triangoli OEP e OFP sono rettangoli e hanno:

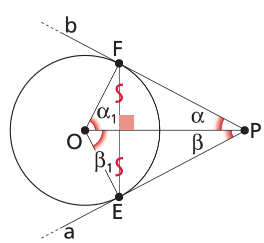
- PO in comune;
- $OE \cong OF$, perché raggi di una stessa circonferenza.

Pertanto sono congruenti, per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

In particolare, sono congruenti i cateti PE e PF.

Corollario. Se un segmento ha per estremi il centro di una circonferenza e un punto esterno a essa (figura 9), allora il segmento appartiene:

1. alla bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti condotte dal punto esterno alla circonferenza;
2. alla bisettrice dell'angolo formato dai raggi aventi un estremo nei punti di contatto;
3. all'asse della corda che unisce i due punti di contatto.



◄ **Figura 9** La prima tesi afferma che $\alpha \cong \beta$, la seconda che $\alpha_1 \cong \beta_1$ e la terza che PO è asse della corda EF.

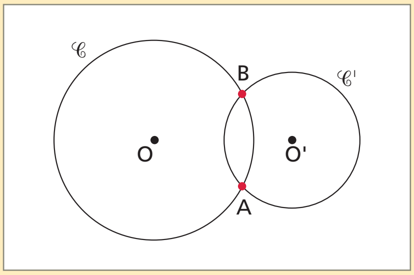
4. Le posizioni reciproche fra due circonferenze

Due circonferenze non possono intersecarsi in più di due punti. Infatti, se avessero tre punti in comune coinciderebbero, poiché per tre punti passa una e una sola circonferenza. Pertanto, possono avere in comune *due punti*, *un solo punto* oppure *nessun punto*.

DEFINIZIONE

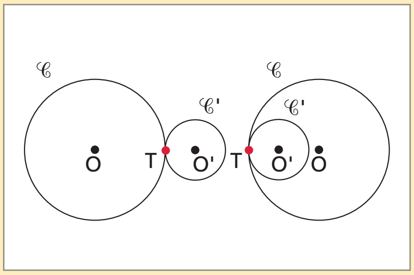
Circonferenze secanti

Due circonferenze sono secanti quando hanno due punti in comune.



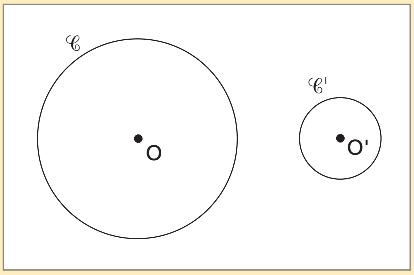
Circonferenze tangenti

Due circonferenze sono tangenti quando hanno un solo punto in comune.
Se il centro di una è esterno all'altra, sono **tangenti esternamente**. Se il centro di una è interno all'altra, sono **tangenti internamente**.



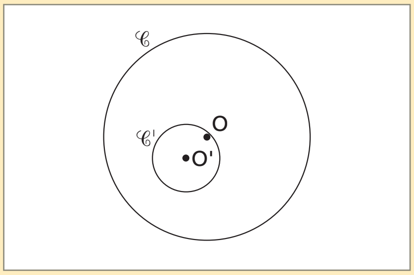
Circonferenze esterne

Due circonferenze sono esterne quando tutti i punti di una circonferenza sono esterni all'altra e viceversa.



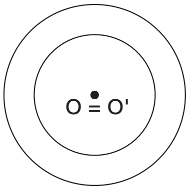
Circonferenze una interna all'altra

Due circonferenze sono una interna all'altra se, avendo raggi diversi, tutti i punti della circonferenza di raggio minore sono interni all'altra.



Il punto comune a due circonferenze tangenti si chiama **punto di tangenza** o **punto di contatto**.

Due circonferenze, una interna all'altra, che hanno lo stesso centro vengono dette **concentriche**.



circonferenze concentriche

La posizione reciproca fra due circonferenze e la distanza fra i loro centri

◗ Per il teorema enunciato qui a lato ci limitiamo a un'illustrazione.

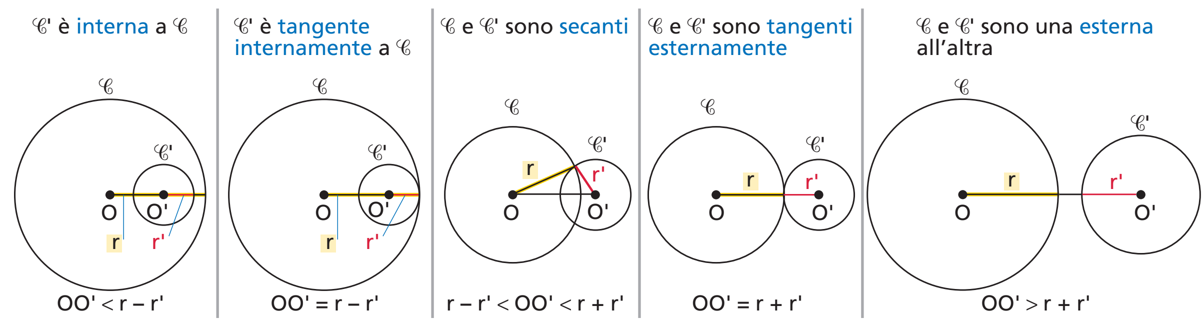
TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinché due circonferenze siano:

- **una interna all'altra** è che la distanza dei centri sia minore della differenza dei raggi;
- **secanti** è che la distanza dei centri sia minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza;
- **tangenti internamente** è che la distanza dei centri sia uguale alla differenza dei raggi;
- **tangenti esternamente** è che la distanza dei centri sia uguale alla somma dei raggi;
- **esterne** è che la distanza dei centri sia maggiore della somma dei raggi.

▼ **Figura 10** Nella figura delle circonferenze secanti puoi notare che vale la proprietà dei triangoli: un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Esemplifichiamo nella figura 10 i casi descritti dal teorema.



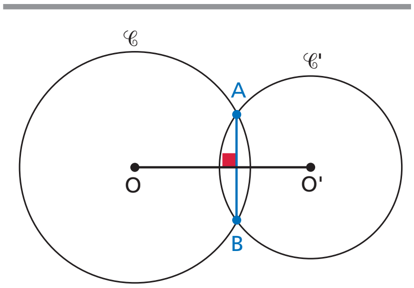
Esaminiamo una proprietà delle circonferenze secanti e una delle circonferenze tangenti.

Circonferenze secanti

Se due circonferenze di centri O e O' sono secanti nei punti A e B, allora la retta dei centri è perpendicolare al segmento AB.

Infatti $OA \cong OB$ e $O'A \cong O'B$, pertanto, essendo O e O' equidistanti dagli estremi del segmento AB, OO' è asse di AB.

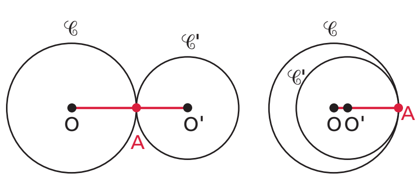
▶ **Figura 11**



Circonferenze tangenti

Se due circonferenze sono tangenti, il punto di tangenza appartiene alla retta dei centri. Infatti, la retta tangente per A è comune alle due circonferenze e, per l'unicità della tangente, i punti O, A, O' sono allineati.

▶ **Figura 12**

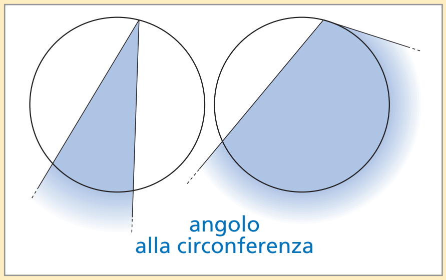


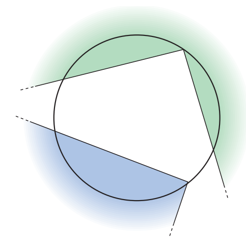
5. Gli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro

DEFINIZIONE

Angolo alla circonferenza

Un angolo alla circonferenza è un angolo convesso che ha il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza stessa, oppure un lato secante e l'altro tangente.



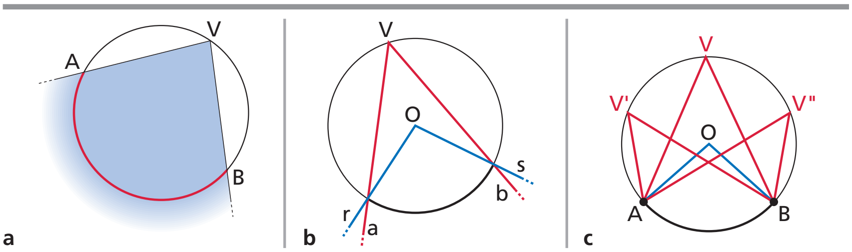


▲ **Figura 13** L'angolo colorato in verde **non** è alla circonferenza perché non è convesso. L'angolo colorato in azzurro **non** è alla circonferenza perché un lato non è secante e neppure tangente.

I lati di un angolo alla circonferenza intersecano la circonferenza in due punti, che sono gli estremi di un arco. Tale arco è l'intersezione dell'angolo con la circonferenza.

Si dice che l'angolo alla circonferenza **insiste** su tale arco. Si può anche dire che l'arco **è sotteso** dall'angolo.

Un **angolo al centro** e **un angolo alla circonferenza** si dicono **corrispondenti** quando insistono sullo stesso arco.



◀ **Figura 14**

a) L'angolo $A\hat{V}B$ insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$; l'arco $\overset{\frown}{AB}$ è sotteso dall'angolo $A\hat{V}B$.

b) $a\hat{V}b$ e $r\hat{O}s$ sono corrispondenti.

c) Per ogni arco esiste un solo angolo al centro che insiste su di esso, mentre gli angoli alla circonferenza che insistono su quell'arco sono infiniti.

La proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti

TEOREMA

Un angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.

Ipotesi 1. α angolo alla circonferenza;
2. β angolo al centro corrispondente di α.

Tesi $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

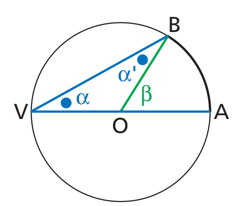
DIMOSTRAZIONE Esaminiamo i tre casi possibili.

1. Un lato dell'angolo alla circonferenza contiene un diametro.

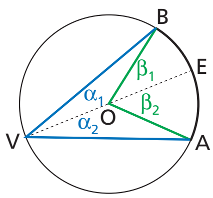
Indichiamo con α' l'angolo $V\hat{B}O$.

Il triangolo VBO è isoscele perché VO e OB sono due raggi, *quindi* $\alpha \cong \alpha'$, per il teorema del triangolo isoscele.

Nel triangolo VBO l'angolo β è esterno di vertice O, *quindi* $\beta \cong \alpha + \alpha'$, per il teorema dell'angolo esterno (somma).



Poiché $\alpha \cong \alpha'$, possiamo anche scrivere $\beta \cong \alpha + \alpha$, ossia $\beta \cong 2\alpha$, *quindi* $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.



2. Il centro O è interno all'angolo α.

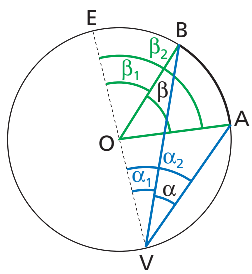
Tracciamo il diametro VE. Indichiamo l'angolo $E\hat{V}B$ con α_1, il corrispondente angolo al centro $E\hat{O}B$ con β_1, $A\hat{V}E$ con α_2, e il corrispondente al centro $A\hat{O}E$ con β_2.
Gli angoli α_1 e α_2 hanno un lato che contiene un diametro, *quindi*

$$\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\beta_1 \text{ e } \alpha_2 \cong \frac{1}{2}\beta_2.$$

Sommando gli angoli α_1 e α_2, otteniamo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cong \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2, \quad \text{cioè} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \cong \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2).$$

Per costruzione risulta $\alpha_1 + \alpha_2 \cong \alpha$ e $\beta_1 + \beta_2 \cong \beta$, *pertanto* $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.



3. Il centro O è esterno all'angolo α.

Tracciamo il diametro VE. Indichiamo l'angolo $E\hat{V}B$ con α_1, il corrispondente angolo al centro $E\hat{O}B$ con β_1, $E\hat{V}A$ con α_2, e il corrispondente al centro $E\hat{O}A$ con β_2.
Gli angoli α_1 e α_2 hanno un lato che contiene un diametro, *quindi*

$$\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\beta_1 \text{ e } \alpha_2 \cong \frac{1}{2}\beta_2.$$

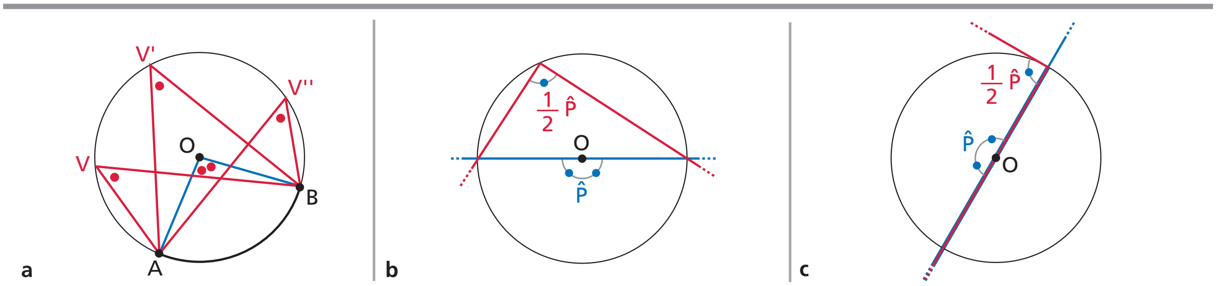
Nella sottrazione $\alpha_2 - \alpha_1$ otteniamo:

$$\alpha_2 - \alpha_1 \cong \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1, \text{ cioè } \alpha_2 - \alpha_1 \cong \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1).$$

Per costruzione risulta $\alpha_2 - \alpha_1 \cong \alpha$ e $\beta_2 - \beta_1 \cong \beta$, *pertanto* $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

Corollario 1. Nella stessa circonferenza, due o più angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o su archi congruenti) sono congruenti (figura 15*a*).

Corollario 2. Se un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza, è retto (figure 15*b* e 15*c*).



▼ **Figura 15**

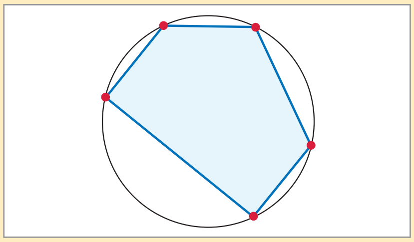
a) **$A\hat{V}B$, $A\hat{V}'B$ e $A\hat{V}''B$ sono tutti congruenti alla metà di $A\hat{O}B$, quindi sono congruenti fra loro.**
b) **L'angolo al centro è piatto, quindi l'angolo alla circonferenza è un angolo retto.**
c) **Il secondo corollario vale anche quando un lato dell'angolo alla circonferenza è secante e l'altro è tangente.**

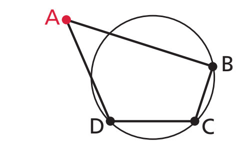
6. I poligoni inscritti e circoscritti

DEFINIZIONE

Poligono inscritto in una circonferenza

Un poligono è inscritto in una circonferenza se ha tutti i vertici sulla circonferenza.





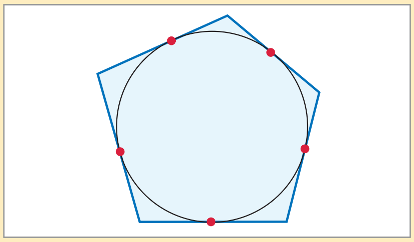
Il poligono *ABCD* non è inscritto nella circonferenza.

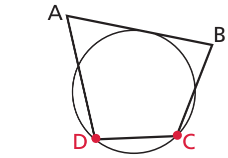
Quando un poligono è inscritto in una circonferenza possiamo anche dire che **la circonferenza è circoscritta al poligono**.

DEFINIZIONE

Poligono circoscritto a una circonferenza

Un poligono è circoscritto a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.





Il poligono *ABCD* non è circoscritto alla circonferenza.

Quando un poligono è circoscritto a una circonferenza possiamo anche dire che **la circonferenza è inscritta nel poligono**.

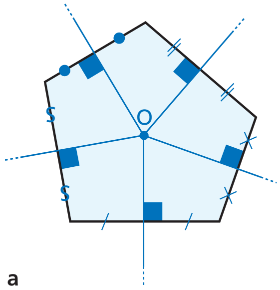
I poligoni inscritti e gli assi dei lati

Non tutti i poligoni possono essere inscritti in una circonferenza.

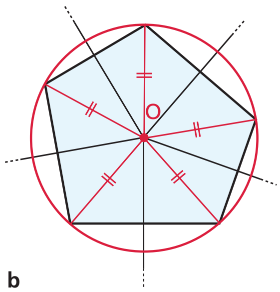
TEOREMA

Se un poligono ha gli assi dei lati che passano per uno stesso punto, allora il poligono può essere inscritto in una circonferenza.

DIMOSTRAZIONE Disegniamo un poligono e gli assi dei suoi lati, in modo che si intersechino in O secondo l'ipotesi (figura *a*).
Poiché l'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dai suoi estremi, il punto di intersezione degli assi ha la stessa distanza da tutti i vertici del poligono, quindi è tracciabile la circonferenza che ha per raggio tale distanza e centro il punto di intersezione (figura *b*).
Questa circonferenza passa per tutti i vertici del poligono.



a



b

Valgono anche i seguenti teoremi.

TEOREMA

Se gli assi dei lati di un poligono non passano per uno stesso punto, il poligono non può essere inscritto in una circonferenza.

TEOREMA

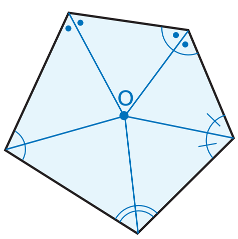
Se un poligono è inscritto in una circonferenza, gli assi dei suoi lati si incontrano nel centro della circonferenza.

I poligoni circoscritti e le bisettrici degli angoli

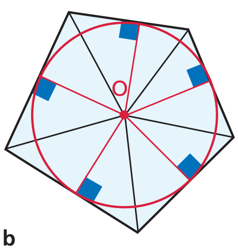
Non tutti i poligoni possono essere circoscritti a una circonferenza.

TEOREMA

Se un poligono convesso ha le bisettrici degli angoli che passano tutte per uno stesso punto, allora il poligono può essere circoscritto a una circonferenza.



a



b

DIMOSTRAZIONE

Disegniamo un poligono e le bisettrici dei suoi angoli interni, le quali per ipotesi si intersecano in O (figura *a*).
Poiché la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati, il punto di intersezione delle bisettrici del poligono ha la stessa distanza da tutti i lati, quindi è possibile tracciare la circonferenza che ha come raggio tale distanza e come centro il punto di intersezione (figura *b*). Questa circonferenza è tangente a tutti i lati del poligono.

Valgono anche i seguenti teoremi.

TEOREMA

Se le bisettrici degli angoli di un poligono non passano per uno stesso punto, il poligono non può essere circoscritto a una circonferenza.

TEOREMA

Se un poligono è circoscritto a una circonferenza, le bisettrici dei suoi angoli si incontrano nel centro della circonferenza.

7. I punti notevoli di un triangolo

Un punto notevole di un triangolo è un punto in cui si intersecano segmenti o rette particolari quali le altezze, le mediane, gli assi...
Esaminiamo per primi quei punti notevoli che permettono di trovare per il triangolo la circonferenza circoscritta e quella inscritta.

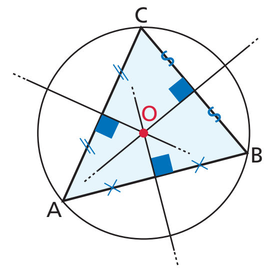
Il circocentro

TEOREMA

Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un punto.

DIMOSTRAZIONE

Poiché per tre punti passa una circonferenza, il triangolo è inscrivibile e gli assi dei suoi lati passano per il centro della circonferenza.



O circocentro di ABC

DEFINIZIONE

Circocentro

Il punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo si chiama circocentro ed è il centro della circonferenza circoscritta.

Corollario. Ogni triangolo è inscrivibile in una circonferenza che ha come centro il circocentro del triangolo.

L'incentro e l'excentro

TEOREMA

Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un punto.

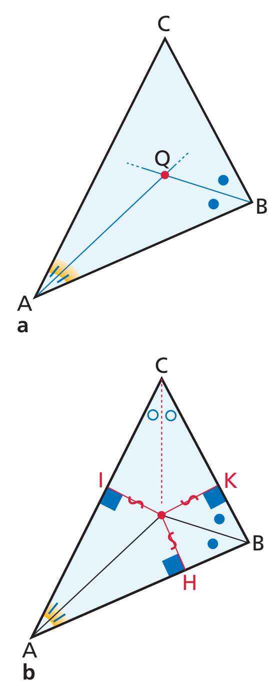
DIMOSTRAZIONE

Tracciamo le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ (figura 16*a*).
Possiamo essere certi che le due bisettrici si incontrano in un punto, che chiamiamo Q. Infatti la somma degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ del triangolo è minore di un angolo piatto, quindi, a maggior ragione, lo è anche la somma delle loro metà. Le bisettrici di $\hat{A}$ e di $\hat{B}$ formano dunque con la trasversale AB angoli coniugati interni non supplementari, perciò si incontrano.
Tracciamo da Q le perpendicolari ai lati e chiamiamo H, I e K i rispettivi piedi (figura 16*b*).
Dobbiamo dimostrare che anche la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$ passa per il punto Q.
Osserviamo che:

- $QI \cong QH$, perché il punto Q appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$, perciò è equidistante dai suoi lati;
- $QH \cong QK$, perché il punto Q appartiene alla bisettrice di $\hat{B}$, perciò è equidistante dai suoi lati.

Per la proprietà transitiva: $QI \cong QK$.
Il punto Q è equidistante dai lati dell'angolo $\hat{C}$, *quindi* appartiene alla sua bisettrice.

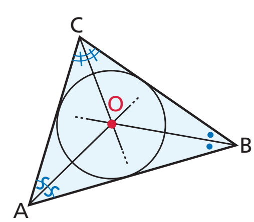
▼ **Figura 16**



DEFINIZIONE

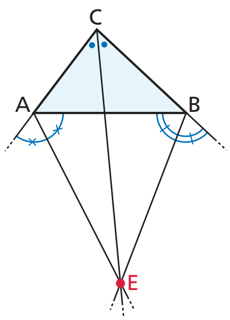
Incentro

Il punto di incontro delle bisettrici di un triangolo si chiama incentro ed è il centro della circonferenza inscritta.



O incentro di ABC

Corollario. Ogni triangolo è circoscrivibile a una circonferenza che ha come centro l'incentro del triangolo.



E excentro di ABC

Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

TEOREMA

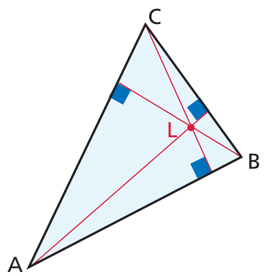
Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e la bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi si intersecano in uno stesso punto.

DEFINIZIONE

Excentro

Il punto di incontro delle bisettrici di due angoli esterni di un triangolo con la bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi si chiama excentro.

Se ne deduce che un triangolo ha quattro punti equidistanti dalle rette dei lati: l'incentro e tre excentri.



L'ortocentro

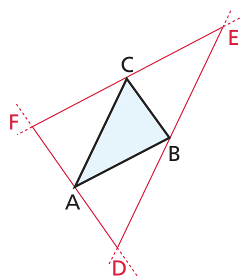
TEOREMA

Le altezze di un triangolo (o i loro prolungamenti) si incontrano in un punto.

DIMOSTRAZIONE

Per ogni vertice del triangolo tracciamo la parallela al lato opposto. Queste rette si incontrano a due a due per il corollario relativo alla proprietà transitiva delle rette parallele (paragrafo 2 del capitolo G3). Chiamiamo D, E e F i loro punti di intersezione (figura 17).

▼ Figura 17

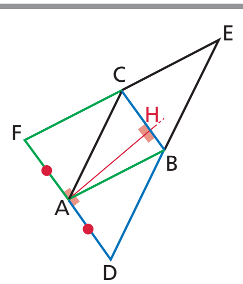


I quadrilateri $ADBC$ e $ABCF$ sono parallelogrammi, in quanto hanno i lati opposti paralleli per costruzione, *quindi*:

- $AD \cong BC$ perché lati opposti di un parallelogramma;
- $BC \cong FA$ per lo stesso motivo.

Per la proprietà transitiva, $AD \cong FA$, *quindi* A è il punto medio di FD.

La retta AH dell'altezza è perpendicolare al lato BC (figura 18), *quindi* è anche perpendicolare a FD ($FD \parallel BC$ per costruzione). AH interseca il segmento FD nel suo punto medio A, *quindi* è l'asse di FD.



▲ Figura 18

In modo analogo si dimostra che B e C sono i punti medi degli altri due lati del triangolo DEF e che le rette delle altre due altezze sono gli assi di DE e di EF.

Dunque le rette delle tre altezze di ABC sono anche gli assi del triangolo DEF, *quindi* si incontrano in un punto, per il teorema del circocentro.

DEFINIZIONE

Ortocentro

In un triangolo il punto di incontro delle altezze (o dei loro prolungamenti) si chiama ortocentro.

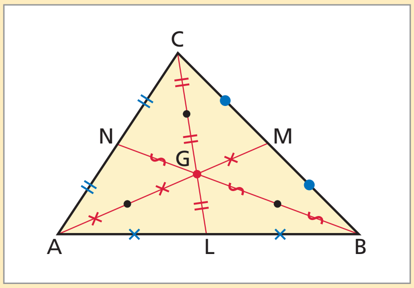
▶ **Ortocentro** è una parola composta da «orto» (dal greco *orthós*, che significa «diritto, retto») e da «centro».

Il baricentro

TEOREMA

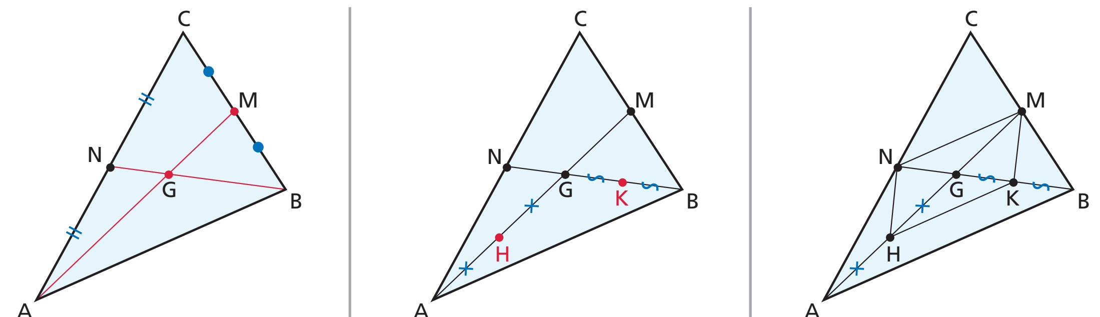
Le mediane di un triangolo si incontrano in un punto.
Il punto di intersezione divide ogni mediana in due parti, tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra.

$AG \cong 2GM$,
$BG \cong 2GN$, $CG \cong 2GL$.



DIMOSTRAZIONE

▼ **Figura 19** Costruzione.



a. Nel triangolo *ABC* disegniamo le due mediane *AM* e *BN*. Chiamiamo *G* il loro punto di intersezione.

b. Sulla mediana *AM* fissiamo il punto medio *H* di *AG*, e sulla mediana *BN* il punto medio *K* di *BG*.

c. Congiungiamo *N* e *K* con *M* e con *H*.

1. Dimostriamo che il punto di incontro di *due* mediane divide ognuna delle mediane in due parti una doppia dell'altra.

Nel triangolo *ABC* il segmento *MN* congiunge i punti medi di due lati, *quindi* *MN* è parallelo ad *AB* e congruente alla sua metà, per la proprietà della congiungente dei punti medi dei lati di un triangolo.

Nel triangolo *AGB* il segmento *HK* congiunge i punti medi di due lati, *quindi* *HK* è parallelo ad *AB* e congruente alla metà di *AB*, per la proprietà enunciata in precedenza.

Il quadrilatero *HKMN* ha i due lati opposti *MN* e *HK* congruenti (entrambi metà di *AB*) e paralleli (entrambi paralleli ad *AB*), *quindi* è un parallelogramma.
In un parallelogramma le diagonali si incontrano nel loro punto medio, *quindi* $HG \cong GM$ e $KG \cong GN$.

▶ Per la proprietà della congiungente dei punti medi dei lati di un triangolo, vedi il paragrafo 10 del capitolo G3.

Per costruzione, H è punto medio di AG, *quindi* $AH \cong HG \cong GM$, *pertanto* $AG \cong 2GM$. Analogamente, K è punto medio di BG, *quindi* $BK \cong KG \cong GN$, *pertanto* $BG \cong 2GN$.
Ripetendo lo stesso ragionamento con le mediane CL e BN, *si deduce* che anch'esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice del triangolo ABC è doppia dell'altra.

2. Dimostriamo che il punto di incontro delle mediane è uno solo.
La mediana BN è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con AM, sia da quello di intersezione con CL, *quindi* AM e CL devono intersecare BN nello stesso punto G.

Baricentro è una parola composta da «bari» (dal greco *barýs*, che significa «pesante») e da «centro». Il baricentro è chiamato anche *centro di gravità* del triangolo.

DEFINIZIONE

Baricentro
Il punto di incontro delle mediane di un triangolo si chiama baricentro.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Sempre in fila (e non solo)

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Che relazioni esistono fra baricentro, circocentro e ortocentro di un qualunque triangolo?

GIADA: «Io proverei a partire da qualche caso particolare, per esempio da un triangolo rettangolo. Oppure isoscele».

SARA: «Ma quante relazioni ci saranno?».

▶ Formula congetture relative a due relazioni fra i tre punti notevoli, poi dimostrale mediante la geometria analitica.

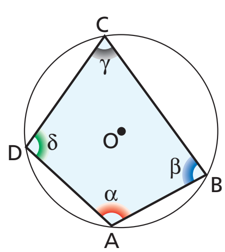
8. I quadrilateri inscritti e circoscritti

I quadrilateri inscritti

In base a questo teorema, un rombo, in generale, è inscrivibile in una circonferenza?

TEOREMA

In un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.



Ipotesi *ABCD* è inscritto in una circonferenza.

Tesi 1. $\alpha + \gamma \cong \hat{P}$;
2. $\beta + \delta \cong \hat{P}$.

DIMOSTRAZIONE

Disegniamo i raggi OB e OD. Indichiamo con α l'angolo alla circonferenza di vertice A e con γ quello di vertice C; con α' l'angolo al centro $D\hat{O}B$ corrispondente di α e con γ' l'angolo al centro $D\hat{O}B$ corrispondente di γ (figura 20*a*).

La somma dei due angoli α' e γ' è un angolo giro, *quindi* $\alpha' + \gamma' \cong 2\hat{P}$.

L'angolo α è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{BCD}$, *quindi* è la metà del suo corrispondente angolo al centro α' (figura 20*b*).

L'angolo γ è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{DAB}$, *quindi* è la metà del suo corrispondente angolo al centro γ' (figura 20*c*).

Da $\alpha \cong \frac{1}{2}\alpha'$ e $\gamma \cong \frac{1}{2}\gamma'$, sommando membro a membro, otteniamo:

$$\alpha + \gamma \cong \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2}\gamma'.$$

Raccogliamo $\frac{1}{2}$ a fattor comune:

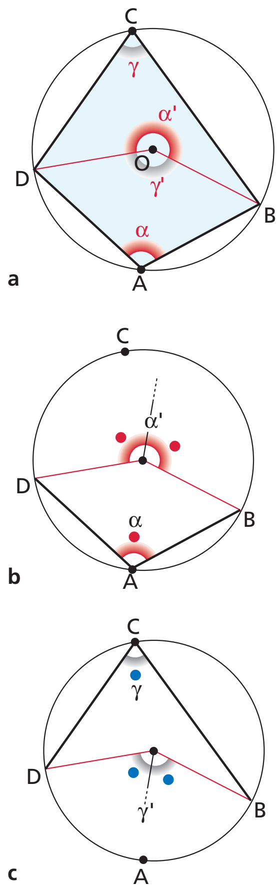
$$\alpha + \gamma \cong \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma'),$$

e quindi, essendo $\alpha' + \gamma' \cong 2\hat{P}$:

$$\alpha + \gamma \cong \frac{1}{2} \cdot 2\hat{P} \cong \hat{P}.$$

Tracciando gli altri due raggi OA e OC e ripetendo lo stesso ragionamento, si deduce che $\beta + \delta \cong \hat{P}$.

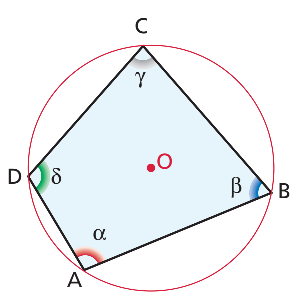
Figura 20



Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA

Un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.



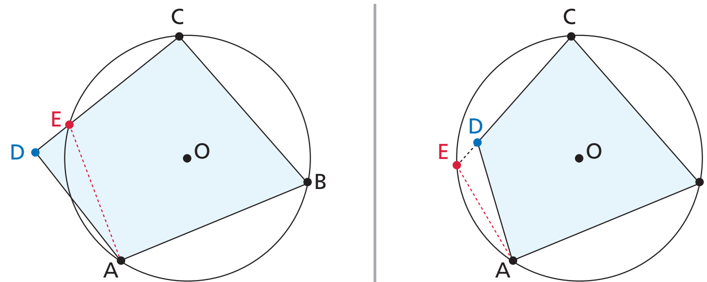
Ipotesi
1. *ABCD* è un quadrilatero;
2. $\alpha + \gamma \cong \hat{P}$;
3. $\beta + \delta \cong \hat{P}$.

Tesi *ABCD* è inscrivibile in una circonferenza.

La somma degli angoli interni di un quadrilatero è $2\hat{P}$. Si può quindi dire che un quadrilatero convesso è inscrivibile in una circonferenza quando le somme degli angoli opposti sono congruenti.

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo dimostrare che la circonferenza passante per A, B e C passa anche per D.
Ragioniamo per assurdo.

Se, per assurdo, la circonferenza per *A*, *B*, e *C* non passa per *D*, si hanno due casi possibili:



a. *D* è esterno alla circonferenza: la circonferenza interseca il lato *CD* nel punto *E*.

b. *D* è interno alla circonferenza: la circonferenza interseca il prolungamento del lato *CD* nel punto *E*.

▶ Figura 21

Osservando la figura 21 notiamo che:

- $A\hat{E}C + A\hat{B}C \cong \hat{P}$ perché angoli opposti in un quadrilatero inscritto in una circonferenza;
- $A\hat{D}C + A\hat{B}C \cong \hat{P}$ per ipotesi.

Quindi $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ sono congruenti, perché supplementari dello stesso angolo.

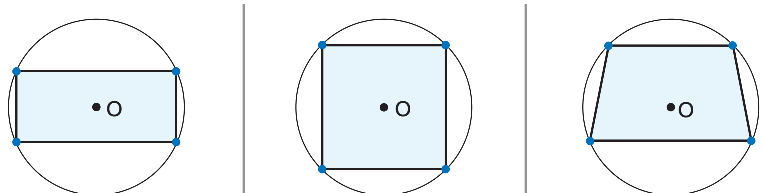
D'altra parte, essi sono angoli corrispondenti fra le rette AD e AE, tagliate dalla trasversale DE. Le rette AD e AE, avendo angoli corrispondenti congruenti, risultano parallele, e ciò è in *contraddizione* con il fatto che hanno in comune il punto A.
Quindi la circonferenza deve passare anche per il punto D.

I due teoremi dimostrati si riassumono nel seguente.

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.

Corollario. Ogni rettangolo, quadrato o trapezio isoscele è inscrivibile in una circonferenza.



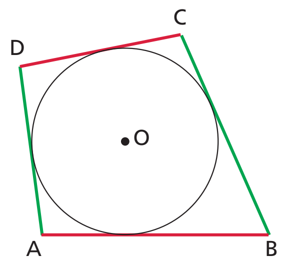
a. Rettangolo. **b.** Quadrato. **c.** Trapezio isoscele.

▶ **Figura 22** In tutte e tre le figure gli angoli opposti sono supplementari. Nelle prime due perché gli angoli sono tutti congruenti, di conseguenza retti; nel trapezio isoscele per il corollario del teorema relativo a tale figura (paragrafo 9 del capitolo G3).

I quadrilateri circoscritti

TEOREMA

In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza, la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.



Ipotesi $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza.

Tesi $AB + CD \cong AD + BC$.

▶ In base a questo teorema, un rettangolo, in generale, è circoscrivibile a una circonferenza?

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con P, Q, R, S i punti di tangenza dei lati con la circonferenza.
I segmenti AP e AS (figura 23*a*) sono segmenti di tangente condotti dal vertice A, esterno alla circonferenza, *quindi* sono congruenti.
Per lo stesso motivo sono congruenti i segmenti BP e BQ, CR e CQ, DR e DS (figura 23*b*).
Possiamo scrivere:

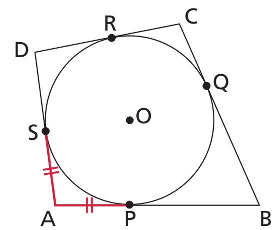
$$AP \cong AS, \quad BP \cong BQ, \quad CR \cong CQ, \quad DR \cong DS.$$

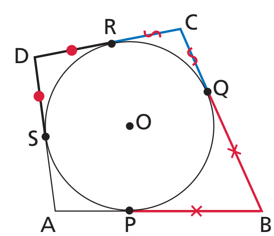
Sommando membro a membro otteniamo:

$$AP + BP + CR + DR \cong AS + BQ + CQ + DS, \text{ ossia}$$

$$\underbrace{AP + BP} + \underbrace{CR + DR} \cong \underbrace{AS + DS} + \underbrace{BQ + CQ}.$$

Nelle addizioni indicate, sostituendo a ogni coppia di segmenti il segmento congruente, otteniamo: $AB + CD \cong AD + BC$.





▲ Figura 23

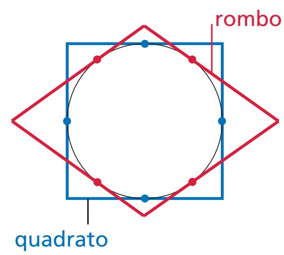
Vale anche il teorema inverso (dimostrazione per assurdo).

TEOREMA

Se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, allora è possibile circoscrivere il quadrilatero a una circonferenza.

Corollario. Se un quadrilatero è un rombo (o, in particolare, un quadrato), è circoscrivibile a una circonferenza. Per il quadrato i punti di contatto coincidono con i punti medi dei lati (figura 24).

▼ Figura 24



I due teoremi possono essere riassunti nel seguente.

TEOREMA

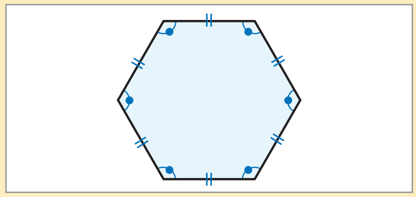
Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.

9. I poligoni regolari

DEFINIZIONE

Poligono regolare

Un poligono è regolare quando ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.



Possiamo dire che un poligono regolare è equilatero ed equiangolo.

Un rombo non è un poligono regolare perché, pur avendo tutti i lati congruenti, non ha tutti gli angoli congruenti.
Un rettangolo non è un poligono regolare perché, pur avendo tutti gli angoli congruenti, non ha tutti i lati congruenti.
Il triangolo equilatero e il quadrato sono poligoni regolari.

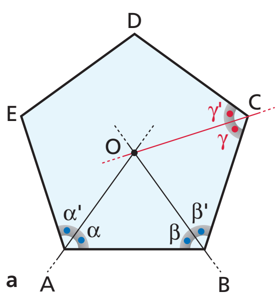
I poligoni regolari e le circonferenze inscritta e circoscritta

TEOREMA

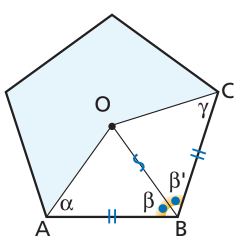
Un poligono regolare è inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a un'altra; le due circonferenze hanno lo stesso centro.

Ipotesi 1. $AB \cong BC \cong CD \cong DE \cong EA$;
2. $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E}$.

Tesi 1. $ABCDE$ è inscrivibile in una circonferenza $\mathscr{C}$;
2. $ABCDE$ è circoscrivibile a una circonferenza $\mathscr{C}'$;
3. $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ hanno lo stesso centro.



a



b

DIMOSTRAZIONE Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, che divide $\hat{A}$ in α e α'.
Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, che lo divide in β e β'. Indichiamo con O il punto d'intersezione delle due bisettrici.
Congiungiamo O con il vertice C; indichiamo con γ l'angolo $B\hat{C}O$ e con γ' l'angolo $O\hat{C}B$ (figura *a*).
Vogliamo dimostrare che OC è bisettrice di $\hat{C}$.
Per l'ipotesi 2, $\hat{A} \cong \hat{B}$, *quindi* $\alpha \cong \beta$ perché metà di angoli congruenti. *Dunque* il triangolo ABO è isoscele, *pertanto* $OA \cong OB$.

Consideriamo i triangoli ABO e BCO (figura *b*). Essi hanno:

- BO in comune;
- $AB \cong BC$, perché lati del poligono regolare;
- $\beta \cong \beta'$, per costruzione.

Quindi sono congruenti per il primo criterio.

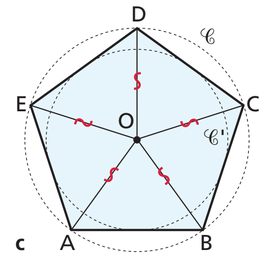
In particolare, risulta $OA \cong OC$ e $\alpha \cong \gamma$.

$\hat{A} \cong \hat{C}$, per l'ipotesi 2, $\alpha \cong \frac{1}{2}\hat{A}$ per costruzione, allora anche $\gamma \cong \frac{1}{2}\hat{C}$,

quindi, essendo $\gamma \cong \gamma'$, OC è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

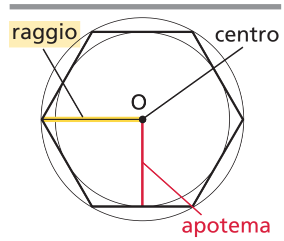
Se congiungiamo il punto O con i rimanenti vertici (figura c), possiamo ripetere lo stesso ragionamento per tutti gli altri triangoli che si formano (CDO, DEO, EAO). Essi sono tutti isosceli e fra loro congruenti.

Il punto O è equidistante da tutti i vertici del poligono e **rappresenta il centro della circonferenza in cui il poligono è inscritto**.
O è anche il punto di incontro delle bisettrici di tutti gli angoli, *pertanto*, per la proprietà della bisettrice, risulta equidistante da tutti i lati del poligono. *Quindi* il punto O rappresenta anche il **centro della circonferenza alla quale il poligono è circoscritto**.



Il teorema precedente permette di individuare nei **poligoni regolari** alcuni **elementi notevoli**. In ogni poligono regolare:

- il **centro** è il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta;
- l'**apotema** è il raggio della circonferenza inscritta;
- il **raggio** è il raggio della circonferenza circoscritta.



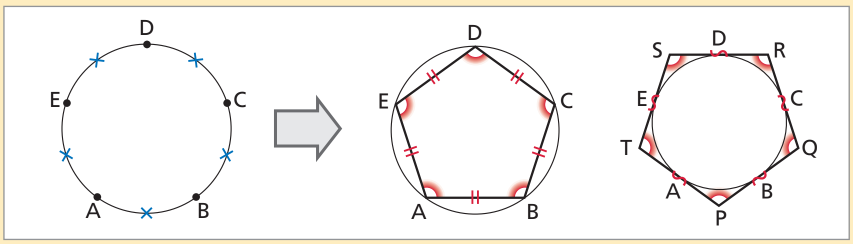
▲ **Figura 25** **Il centro, l'apotema e il raggio di un esagono regolare.**

La circonferenza divisa in archi congruenti

TEOREMA

Se una circonferenza è divisa in tre o più archi congruenti, allora:

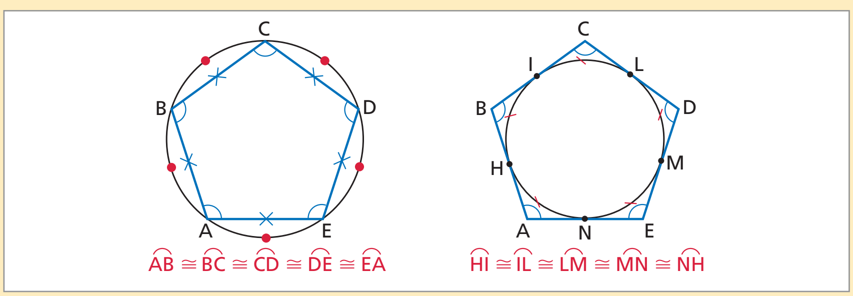
- il poligono inscritto che si ottiene congiungendo i punti di suddivisione è regolare;
- il poligono circoscritto che si ottiene tracciando le tangenti alla circonferenza nei punti di suddivisione è regolare.



TEOREMA

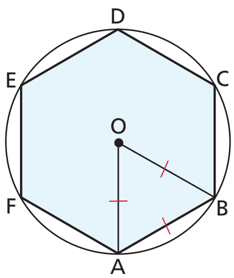
Una circonferenza è suddivisa in archi congruenti dai:

- vertici dei poligoni regolari inscritti;
- punti di tangenza dei poligoni regolari circoscritti.



TEOREMA

Il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è congruente al raggio della circonferenza.



DIMOSTRAZIONE Dimostriamo che congiungendo il centro O della circonferenza con i punti A e B si ottiene un triangolo equilatero. Infatti l'angolo $A\hat{O}B$ è $\frac{1}{6}$ di angolo giro poiché insiste sull'arco $\widehat{AB}$ congruente a $\frac{1}{6}$ di circonferenza.

Quindi $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A \cong A\hat{O}B$, tutti congruenti a $\frac{1}{6}$ di angolo giro.

Pertanto AOB è un triangolo equilatero e $OA \cong AB$.

LA CICLOTOMIA

Con «ciclotomia» si indica il problema di dividere, *con riga e compasso*, la circonferenza in n parti congruenti, con n numero naturale.

Osserviamo che se riusciamo a dividerla in n parti congruenti, abbiamo anche ottenuto un metodo per disegnare con riga e compasso il poligono regolare di n lati.

Friedrich Gauss, nel 1801, studiando la questione, arrivò al seguente risultato: è possibile suddividere la circonferenza in un numero n di parti congruenti, usando riga e compasso, soltanto se:

- n è un numero primo e $n = 2^{2^l} + 1$, dove $l \in \mathbb{N}$;
- n non è un numero primo e $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots$, dove $m \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \ldots$ sono fattori primi distinti della forma $2^{2^l} + 1$.

Per il primo tipo di numeri otteniamo, per esempio:

$$2^1 + 1 = 3; \quad 2^2 + 1 = 5; \quad 2^4 + 1 = 17; \ldots$$

Per il secondo tipo di numeri abbiamo:

$$2^2 = 4;\ 2(2^1 + 1) = 6;\ 2^3 = 8;$$
$$2(2^2 + 1) = 10; \ldots$$

Procedendo in questo modo, si ottiene che con riga e compasso è possibile dividere la circonferenza in 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, … parti congruenti, ma non è possibile in 7, 9, 11, 13, 14, … parti congruenti.

10. La piramide e i solidi di rotazione

In questo paragrafo i concetti relativi alla circonferenza vengono utilizzati per studiare la piramide retta e i solidi di rotazione.

La piramide

DEFINIZIONE

Piramide

Si chiama piramide la parte di angoloide compresa fra il suo vertice e un piano che interseca tutti i suoi spigoli.

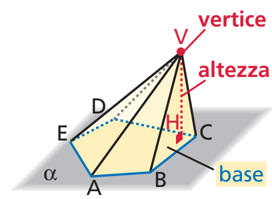
Il poligono intersezione fra il piano e l'angoloide si chiama **base** della piramide, il vertice dell'angoloide si chiama **vertice** della piramide.

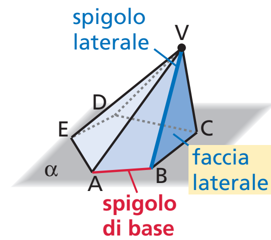
La distanza fra il vertice e il piano di base è l'**altezza** della piramide.

La piramide è delimitata, oltre che dalla base, da triangoli detti **facce laterali**.

Ogni lato della base si chiama anche **spigolo** di base, gli altri lati dei triangoli si chiamano **spigoli laterali**.

Piramide





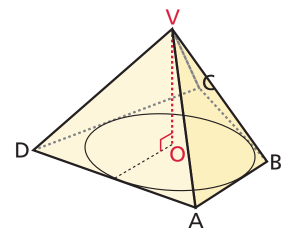
Due piramidi particolari

DEFINIZIONE

Piramide retta

Una piramide è retta quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base.

Piramide retta

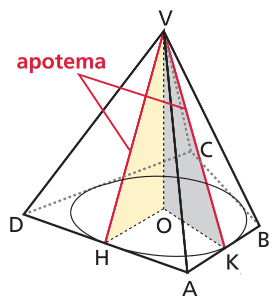


Il centro O della circonferenza è la proiezione ortogonale del vertice V, cioè il piede della perpendicolare alla base passante per il vertice V.

Osserva che il segmento VO è l'altezza della piramide.

TEOREMA

In una piramide retta, le altezze delle facce laterali passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenza inscritta e sono tra loro congruenti.



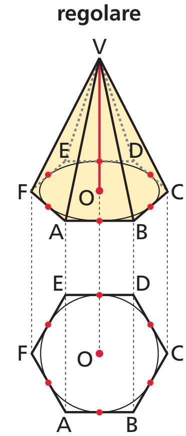
L'altezza delle facce laterali della piramide retta si chiama **apotema**.

DEFINIZIONE

Piramide regolare

Una piramide retta si dice regolare quando la sua base è un poligono regolare.

Piramide regolare



Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli fra loro congruenti.

I solidi di rotazione

Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno a una retta r, secondo un angolo α.

Se α è un angolo giro, allora si dice che la rotazione è **completa**.

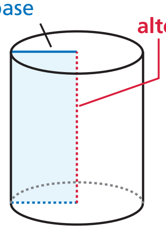
In una rotazione completa, il punto P, che corrisponde a se stesso, descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare alla retta e passante per P.

Il cilindro

DEFINIZIONE

Cilindro

Un cilindro è un solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.



Il lato attorno al quale ruota il rettangolo è detto **altezza** del cilindro. Gli altri due lati perpendicolari all'altezza sono detti **raggi di base**.

I raggi di base nella rotazione determinano due cerchi, che sono detti **basi** del cilindro.

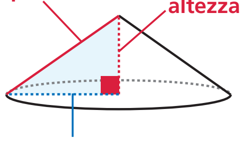
Un cilindro si dice **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro della base.

Il cono

DEFINIZIONE

Cono

Un cono è un solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti.



Il cateto attorno a cui ruota il triangolo è l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio di base**. L'ipotenusa è detta **apotema** del cono.

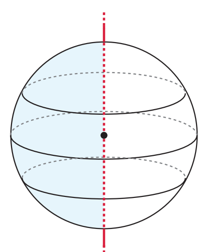
Un cono si dice **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro della base. L'intersezione fra un cono equilatero e un piano contenente la sua altezza è un triangolo equilatero.

La sfera

DEFINIZIONE

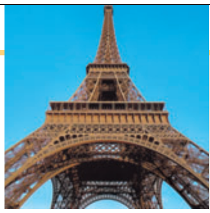
Sfera

La sfera è un solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



La semicirconferenza che ruota genera una superficie detta **superficie sferica**. Il raggio della semicirconferenza è detto **raggio** della sfera.

La superficie sferica e la sfera possono essere considerate luoghi geometrici:
- la superficie sferica è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro distanza uguale al raggio;
- la sfera è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro distanza minore o uguale al raggio.



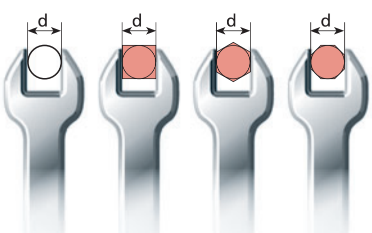
Bulloni!

…perché le teste dei bulloni sono quasi sempre esagonali?

Il quesito completo a pag. G169

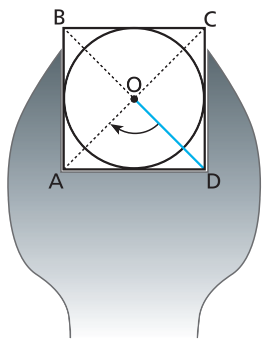
Supponiamo di voler stringere un bullone a testa pentagonale con una comune chiave: possiamo verificare immediatamente che lo strumento tende a scappare via, poiché i suoi lati paralleli hanno pochi punti di contatto col bullone.

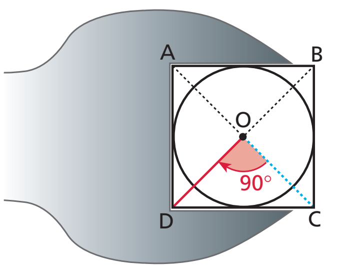
Affinché questo non succeda è necessario che anche i lati della testa del bullone su cui si fa forza siano paralleli. Dato che ogni poligono regolare avente un numero pari di lati ha i lati opposti paralleli, in teoria la testa dei bulloni potrebbe avere una qualunque di queste forme: quadrata, esagonale, ottagonale e così via.



Precisamente, con la stessa chiave inglese possiamo stringere o allentare tutti i bulloni la cui testa sia un poligono regolare avente un numero pari di lati, circoscritto alla circonferenza di diametro *d*.

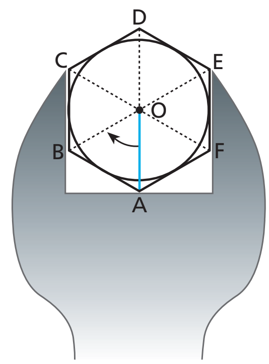
Partiamo dunque dal più semplice di tali poligoni, il quadrato, e consideriamo nella figura la rotazione da far compiere al bullone per ottenere la stessa configurazione di partenza.
Seguiamo tale rotazione registrando il movimento, per esempio, della semidiagonale *OD*.

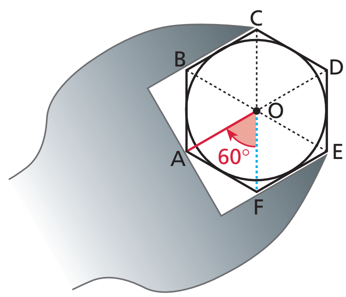




Ciò che si osserva è che l'angolo di rotazione richiesto vale 90°, pari all'angolo in cui è diviso l'angolo giro al centro quando un quadrato è circoscritto alla circonferenza. Ugualmente anche lo spazio di manovra della chiave è di 90° e ciò può creare problemi di ingombro.
Se invece il bullone ha testa esagonale, è sufficiente una rotazione di 60° per portarlo alla configurazione iniziale e lo spazio di manovra della chiave è così inferiore.

L'angolo di rotazione di 60° è ancora quello per cui l'angolo giro al centro risulta suddiviso quando un esagono è circoscritto alla circonferenza.





Sembrerebbe dunque ancora più conveniente utilizzare dei bulloni con testa ottagonale: di fatto, però, non è così. Infatti, al crescere del numero dei lati, il poligono regolare circoscritto a una circonferenza ha il lato sempre più corto, e approssima sempre meglio la circonferenza stessa: questo fa sì che il bullone ottagonale sia molto più delicato di quello esagonale, in quanto è più facile, girandolo con la chiave, smussarne un angolo, rendendolo quindi inutilizzabile.

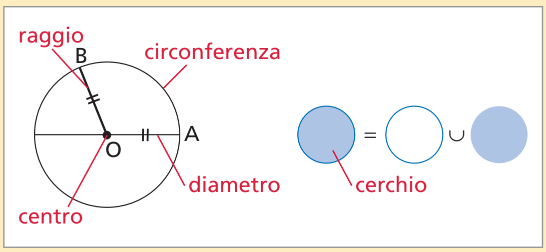
LA TEORIA IN SINTESI

La circonferenza, i poligoni inscritti e circoscritti

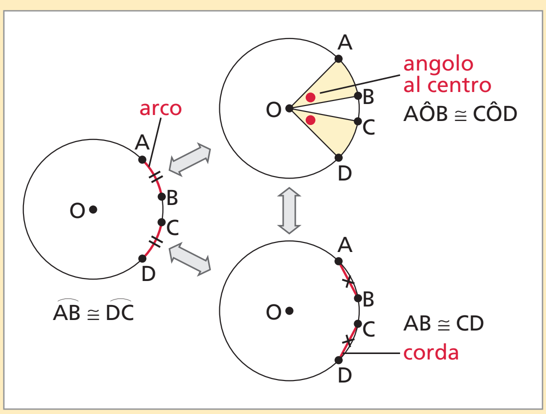
1. La circonferenza e il cerchio

Un **luogo geometrico** è l'insieme di tutti e soli i punti di un piano che godono di una determinata proprietà caratteristica.

L'**asse di un segmento** è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.
La **circonferenza** è il luogo dei punti di un piano che hanno una distanza assegnata da un punto fisso detto **centro**. Il **cerchio** è la figura formata dai punti della circonferenza e dai suoi punti interni.

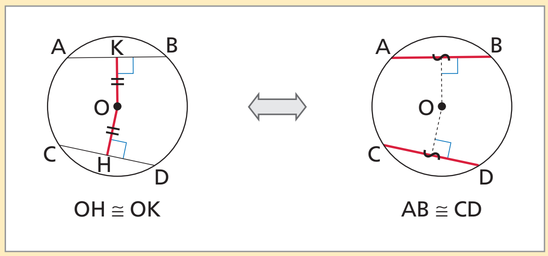


Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.
Se in una circonferenza sono congruenti due figure dello stesso tipo, per esempio due archi, allora sono congruenti anche le figure corrispondenti, ossia le due corde e i due angoli al centro.

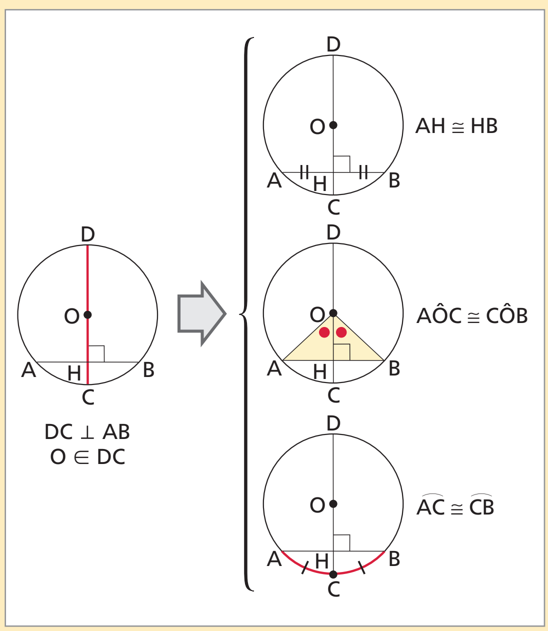


2. I teoremi sulle corde

In una circonferenza due corde hanno la stessa distanza dal centro se e solo se sono congruenti.

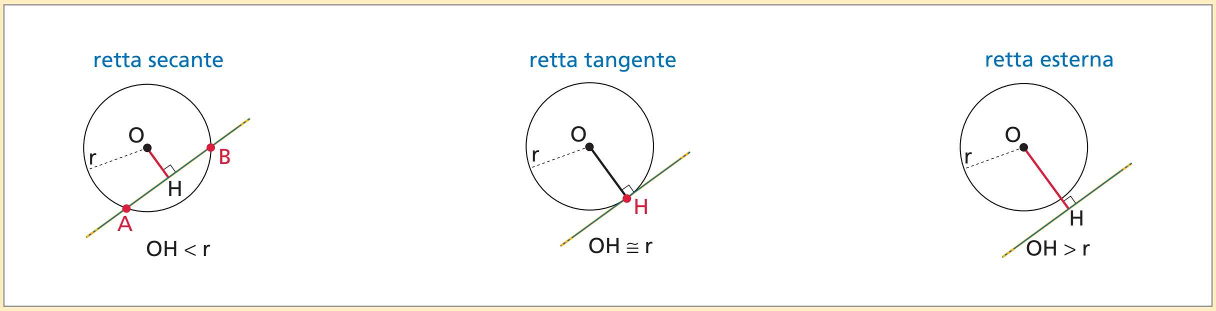


Se un diametro è perpendicolare a una corda non passante per il centro, allora esso divide la corda in due parti congruenti. Tale diametro divide in due parti congruenti anche i due archi che la corda individua e i due angoli al centro corrispondenti a detti archi.

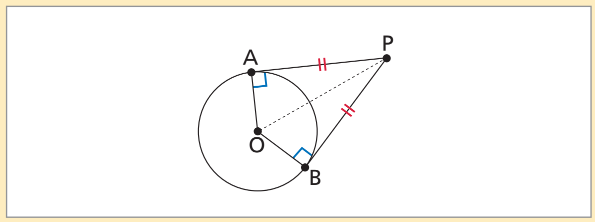


3. Le posizioni di una retta rispetto a una circonferenza

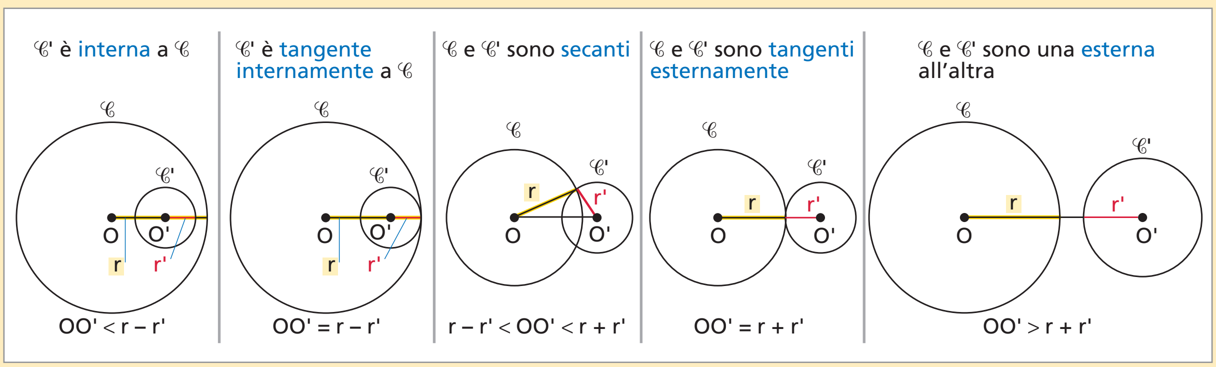
Una retta e una circonferenza che si intersecano non possono avere più di due punti in comune.
Una retta è **secante** una circonferenza se ha due punti in comune con essa, è **tangente** se ha un solo punto in comune, è **esterna** se non ha punti in comune.



Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno
Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le due rette tangenti, risultano congruenti i due segmenti di tangente.

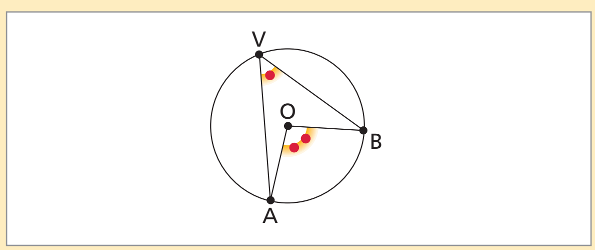


4. Le posizioni reciproche fra due circonferenze



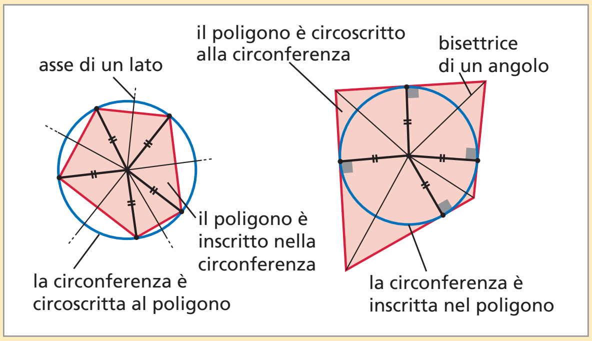
5. Gli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro

Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza si dicono **corrispondenti** quando insistono sullo stesso arco. Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.
Nella stessa circonferenza, due o più angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti.
Se un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza, è retto.



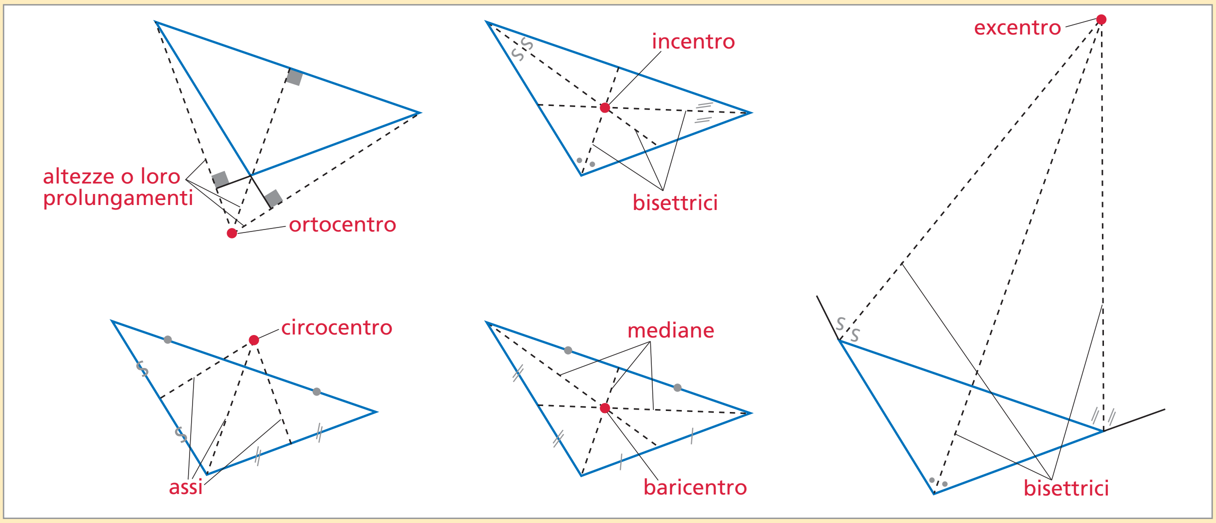
6. I poligoni inscritti e circoscritti

Un poligono è **inscritto** in una circonferenza quando ha tutti i vertici sulla circonferenza. Un poligono può essere inscritto in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si incontrano tutti in uno stesso punto. Il punto di intersezione degli assi dei lati del poligono coincide con il centro della circonferenza.
Un poligono è **circoscritto** a una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Un poligono può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se le bisettrici dei suoi angoli si incontrano tutte in uno stesso punto. Il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli del poligono coincide con il centro della circonferenza.



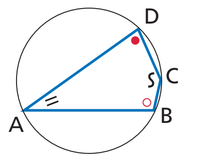
7. I punti notevoli di un triangolo

- Il **circocentro** è il punto di incontro degli assi dei lati del triangolo.
- L'**incentro** è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli del triangolo.
- L'**excentro** è il punto di incontro delle bisettrici di due angoli esterni con la bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi.
- L'**ortocentro** è il punto di incontro delle altezze del triangolo.
- Il **baricentro** è il punto di incontro delle mediane del triangolo.
  Proprietà del baricentro. Il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.



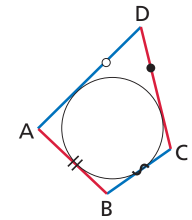
8. I quadrilateri inscritti e circoscritti

Condizione necessaria e sufficiente affinché un **quadrilatero** sia **inscrivibile** in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.



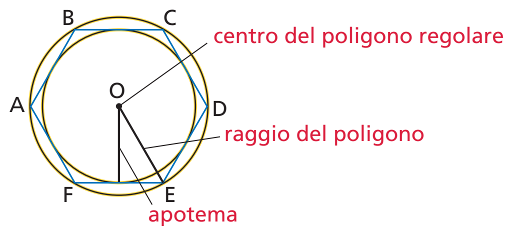
$\hat{B} + \hat{D} \cong \hat{P}$
$\hat{A} + \hat{C} \cong \hat{P}$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un **quadrilatero** sia **circoscrivibile** a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.



9. I poligoni regolari

Un poligono **regolare** è un poligono avente tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.
Se un poligono è regolare, allora esso è inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a un'altra.
Le due circonferenze hanno lo stesso centro, detto centro del poligono.



10. La piramide e i solidi di rotazione

Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, detto **base**, e da **facce laterali** triangolari, le quali:

- hanno in comune un vertice, detto **vertice della piramide**;
- hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base.

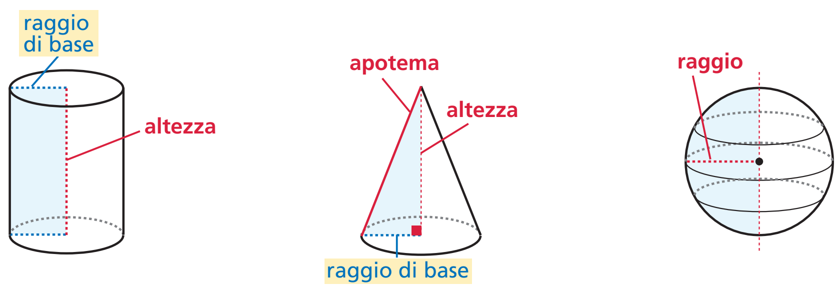
La distanza fra il vertice e il piano della base è detta **altezza** della piramide.

Una piramide è **retta** quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base. Le facce laterali di una piramide retta hanno altezze congruenti; tale altezza viene detta **apotema**.

Una piramide è **regolare** quando è retta e la sua base è un poligono regolare.

I **solidi di rotazione** sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta. In particolare:

- un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati;
- un **cono** è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti;
- una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



1. La circonferenza e il cerchio

Teoria a pag. G169

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 TEST Per tre punti qualsiasi e fissati passa:

A sempre una e una sola retta.
B una e una sola circonferenza.
C una e una sola circonferenza, purché i punti non siano allineati.
D un diametro.
E una corda.

2 Un settore circolare può coincidere con un segmento circolare? Motiva la risposta.

3 VERO O FALSO?

a) A ogni corda corrisponde sempre un solo arco e viceversa. V F
b) Per tre punti distinti passa sempre una circonferenza. V F
c) Gli estremi di due diametri perpendicolari sono i vertici di un quadrato. V F
d) Per due punti distinti passano infinite circonferenze che hanno tutte il centro sull'asse della corda. V F
e) Ogni diametro è una corda. V F

ESERCIZI

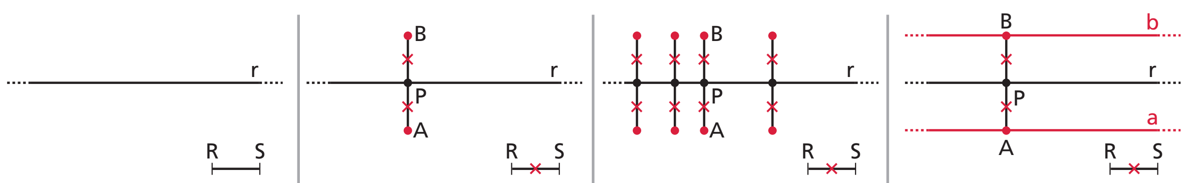
Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

I luoghi geometrici

ESERCIZIO GUIDA

4 Tracciamo una retta *r* e, fuori di essa, un segmento *RS*. Disegniamo il luogo dei punti del piano che hanno da *r* distanza *RS*.
Dimostriamo che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

Dimostrazione



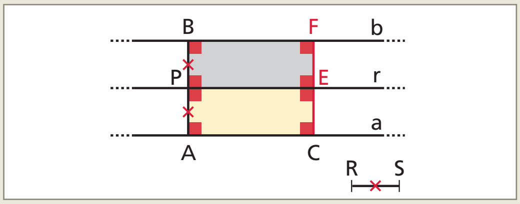
a. Disegniamo una retta *r* e un segmento *RS*.

b. I punti del piano richiesti devono avere distanza *RS* da *r*. Per trovarne uno, scegliamo un punto *P* di *r* e riportiamo con il compasso sulla retta passante per *P* e perpendicolare a *r* due segmenti, *PA* e *PB*, congruenti a *RS*.

c. Ripetiamo la stessa costruzione per altri punti della retta *r*.

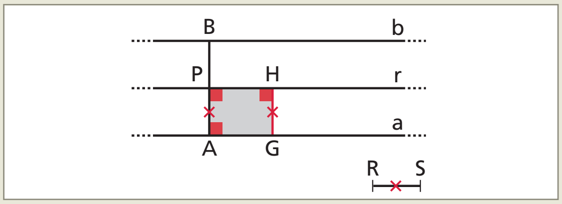
d. Il luogo richiesto è formato da due rette *a* e *b*, parallele a *r*, che hanno da *r* distanza *RS*.

1. Dimostriamo che tutti i punti delle rette a e b hanno distanza RS da r.



Scegliamo sulla retta a un qualunque altro punto C; tracciamo la perpendicolare per C alla retta a, che incontra r nel punto E e b in F.
Il quadrilatero $ACEP$ ha i lati opposti paralleli e gli angoli retti, per costruzione, *quindi* è un rettangolo e *pertanto* $AP \cong CE$.
Anche il quadrilatero $BFEP$ ha i lati opposti paralleli e gli angoli retti, per costruzione, *quindi* è un rettangolo, *pertanto* $PB \cong EF$.
I segmenti AP e PB sono congruenti a RS per costruzione, *quindi* anche i segmenti EC ed EF sono congruenti a RS.

2. Dimostriamo che soltanto i punti delle rette a e b hanno distanza RS da r, ossia che se un punto G ha distanza da r congruente a RS, allora G appartiene alla retta a oppure alla retta b.



GH è congruente a RS. Anche AP è congruente a RS, *quindi* GH è congruente ad AP.
Il quadrilatero $AGHP$ ha i lati opposti AP e GH congruenti e paralleli, *quindi* è un parallelogramma; inoltre gli angoli $\hat{P}$ e $\hat{H}$ sono retti, *quindi* $AGHP$ è un rettangolo, *pertanto* il lato AG appartiene alla retta a.

Disegna i seguenti luoghi geometrici e dimostra che ogni figura ottenuta è il luogo richiesto.

5 Disegna due rette r e s, non parallele, e fissa un segmento AB. Determina il luogo dei punti che hanno distanza congruente ad AB sia da r sia da s.

6 Traccia una retta r e due punti A e B fuori di essa tali che la retta AB non sia perpendicolare a r. Determina il luogo dei punti appartenenti a r che sono equidistanti da A e da B.

7 Determina il luogo dei punti equidistante da due rette parallele.

8 Determina il luogo dei punti che hanno distanze assegnate da due rette non parallele.

9 Nel quadrato $ABCD$ il vertice A rimane fisso, mentre varia la lunghezza del lato. Determina il luogo dei punti P di intersezione delle diagonali.

10 Considera tutti i rettangoli con la base in comune e altezza variabile. Qual è il luogo geometrico costituito dai punti di intersezione delle diagonali?

11 Dati un quadrato $ABCD$ e un segmento EF minore di AB, disegna il luogo dei punti del quadrato che hanno distanza da AB congruente al segmento EF.

12 Nel triangolo ABC sono assegnate la base BC e la lunghezza dell'altezza AH. Qual è il luogo dei vertici A?

13 Nel triangolo isoscele ABC di base AB determina il luogo dei vertici C al variare dell'angolo al vertice dei triangoli isosceli aventi tutti la stessa base AB.

14 Considera un rettangolo $ABCD$ e un segmento EF minore della base AB. Determina il luogo dei punti del rettangolo che hanno da BC distanza EF.

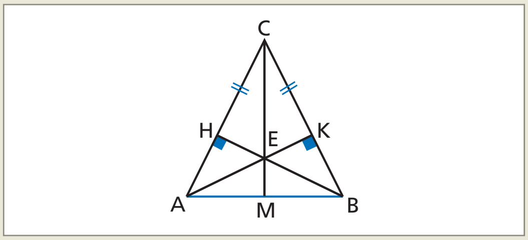
15 Dati un trapezio $ABCD$ e un segmento EF minore dell'altezza, determina il luogo dei punti del trapezio aventi dalla base maggiore una distanza minore o uguale alla lunghezza del segmento EF.

16 Disegna un rettangolo $ABCD$, in modo che la somma della base e dell'altezza sia congruente a un segmento EF assegnato. Col vertice in A disegna un altro rettangolo $AB'C'D'$, in modo che il lato AB' stia sul lato AB, AD' su AD e la somma della base e dell'altezza sia sempre congruente al segmento EF. Determina il luogo dei vertici C al variare dei rettangoli.

Le applicazioni dei luoghi geometrici

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

17 Nel triangolo isoscele ABC di base AB, traccia le perpendicolari AK al lato BC e BH al lato AC, che si incontrano nel punto E e disegna la mediana CM. Dimostra che $E \in CM$.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo ....;
2. $AK \perp$ ...... e ...... $\perp AC$;
3. ...... è mediana.

Tesi $E \in$ ....

Dimostrazione

- *Dimostra che i triangoli ABH e ABK sono congruenti.*
  Essi hanno:
  ...... $\cong K\hat{B}A$ perché angoli alla .... di un triangolo ...., $B\hat{H}A \cong$ .... perché ...., hanno inoltre AB ...., *quindi* sono congruenti per il .... di .... dei triangoli rettangoli.
- *Deduci che il triangolo ABE è isoscele.*
  In particolare hanno congruente anche il terzo angolo: ...... $\cong K\hat{A}B$. *Pertanto* il triangolo ABE è ....
- *Dimostra la tesi.*
  Il punto E è .... da A e B. Anche i punti ...... e M sono equidistanti da ...... e ......, *quindi* i punti C, ..., M appartengono all'...... del segmento AB, *pertanto* sono allineati ed E .... alla retta CM.

18 In un triangolo isoscele ABC, di vertice C, le altezze AK e BH si incontrano nel punto E. Conduci per A la perpendicolare al lato AC e per B la perpendicolare al lato BC e indica con F il loro punto intersezione. Dimostra che C, E, F sono allineati.

19 Dimostra che gli assi dei cateti di un triangolo rettangolo s'incontrano sull'ipotenusa.

20 Disegna un triangolo ABC e indica con I il punto d'incontro delle bisettrici dei suoi angoli. Indica con IH, IK, IR le distanze di I dai lati AB, BC, CA. Dimostra che $IH \cong IK \cong IR$.

21 Disegna un angolo $a\hat{O}b$ e la sua bisettrice Os. Su Os fissa un punto P e disegna un secondo angolo, $a'\hat{P}b'$, di vertice P, in modo che Os sia bisettrice anche di questo (Pa' non deve essere parallela a Oa e Pb' non deve essere parallela a Ob). La semiretta Pa' incontra Oa nel punto A e la semiretta Pb' incontra Ob nel punto B. Dimostra che Os è asse del segmento AB.

22 Nel triangolo ABC prolunga i lati AB dalla parte di A e BC dalla parte di C. Traccia le bisettrici degli angoli esterni di vertici A e C che si incontrano in E. Dimostra che la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$ passa per E.

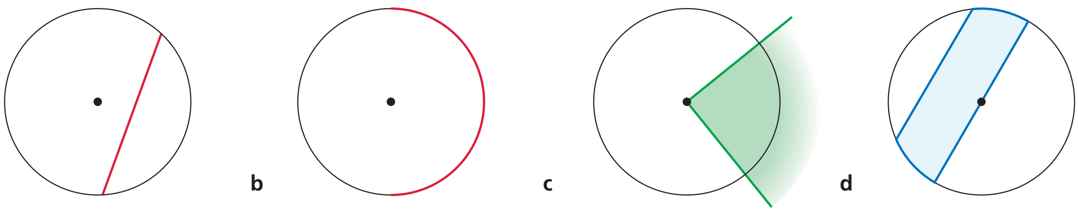
La circonferenza e il cerchio

23 Disegna tre punti non allineati e costruisci la circonferenza che passa per i tre punti.

24 Disegna una circonferenza utilizzando, per esempio, una moneta e poi determina il centro con riga e compasso.

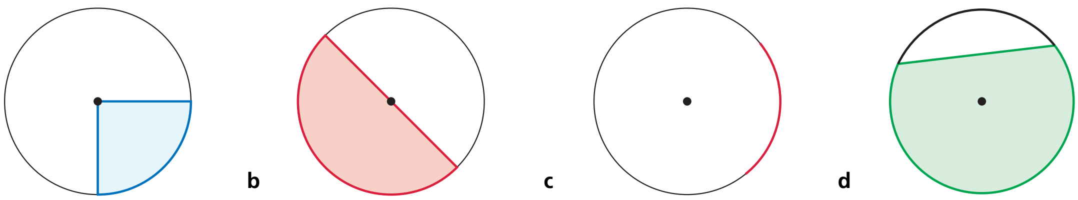
COMPLETA scrivendo il nome della parte colorata.

25



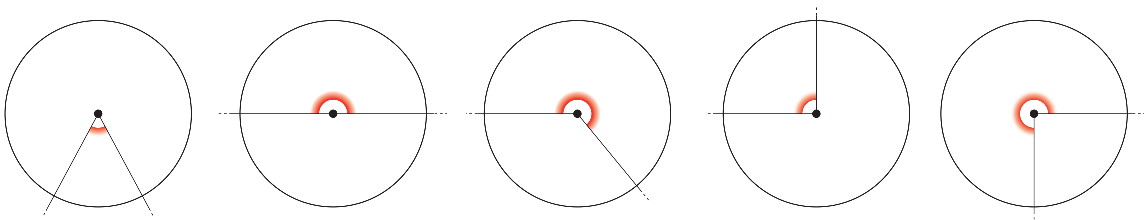
a .... b .... c .... d ....

26



a .... b .... c .... d ....

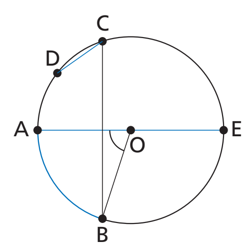
27 **COMPLETA** colorando l'arco su cui insiste ogni angolo al centro indicato in figura.



a b c d e

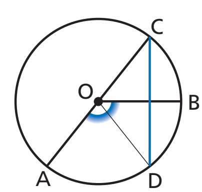
28 Facendo riferimento alla figura, scrivi il nome e il simbolo, se esiste, corrispondente a:

a) segmento di estremi C e D;
b) parte minore di circonferenza compresa fra A e B;
c) angolo di vertice O avente per lati le semirette OA e OB;
d) segmento di estremi A ed E;
e) parte di cerchio limitata da CD e da $\overset{\frown}{CD}$.



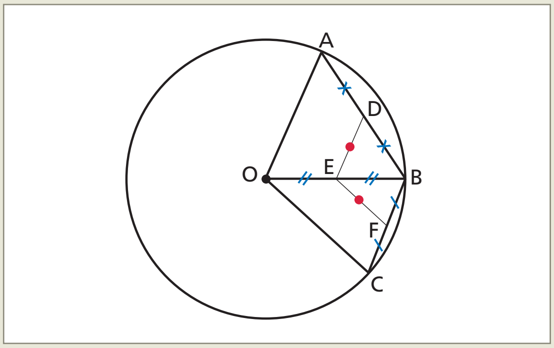
29 Facendo riferimento alla figura, scrivi il nome corrispondente all'intersezione fra:

a) il cerchio e l'angolo $A\hat{O}B$;
b) la circonferenza e l'angolo $A\hat{O}B$;
c) la circonferenza e la corda CD;
d) il cerchio e la corda CD.



DIMOSTRAZIONE GUIDATA

30 Nel cerchio di centro O e raggio OB, disegna due corde consecutive AB e BC e i raggi OA e OC. Considera i punti medi D di AB, E di OB, F di BC. Dimostra che $ED \cong EF$.
▶ *Caso particolare*: se le corde AB e CB sono congruenti al raggio, di che natura è il triangolo OFD?



Ipotesi 1. ……, OB, …… sono …… ;
2. punti medi: …… di AB, E di ……, …… di …… .

Tesi $ED \cong$ …… .

Dimostrazione

- *Dimostra che ED è congruente alla metà di OA.* Nel triangolo AOB il segmento ED ha per estremi i punti …… di due lati, *quindi* …… // OA e …… $\cong \frac{1}{2}$ …… .
- *Dimostra che EF è congruente alla metà di OC.* Analogamente nel triangolo …… il segmento EF ha per estremi ………………………, *quindi* …… // …… e …… $\cong$ …… OC.
- *Deduci la tesi.* $OA \cong$ …… perché ……, *quindi* …… $\cong$ …… perché metà di …………………… .

▶ *Caso particolare*
I triangoli OAB e OBC sono ………… ; i segmenti OF e OD sono altezze e bisettrici, *quindi* OF ……… OD. L'angolo $F\hat{O}D$ è $\frac{1}{3}$ dell'angolo piatto, *quindi* OFD è un triangolo …………… .

31 Dimostra che due corde parallele AB e CD, tracciate dagli estremi di un diametro AD, sono congruenti.

32 Disegna un cerchio di centro C e un triangolo isoscele ABC, con i lati congruenti AC e BC minori del raggio. Prolunga AC e BC fino a incontrare la circonferenza nei punti E e F. Dimostra che la corda EF è parallela alla base AB del triangolo.

2. I teoremi sulle corde

Teoria a pag. G175

RIFLETTI SULLA TEORIA

33 **VERO O FALSO?**

a) In una circonferenza, una retta passante per il centro e per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa. V F

b) La proiezione del centro di una circonferenza su una qualsiasi corda divide a metà la corda stessa. V F

c) Il diametro di un cerchio è la corda avente minima distanza dal centro. V F

d) In una circonferenza esiste un solo diametro perpendicolare a una corda data. V F

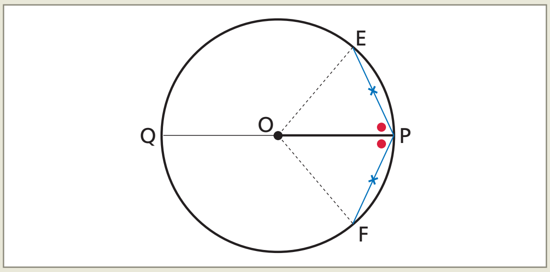
ESERCIZI Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

Il diametro perpendicolare a una corda e il diametro per il punto medio di una corda

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

34 In una circonferenza di centro O e diametro QP, traccia due corde congruenti PE e PF e i raggi OE e OF. Dimostra che PQ è bisettrice di $E\hat{P}F$.

▶ *Caso particolare*: se le corde FP e PE sono tali per cui i punti E e F sono diametralmente opposti, di che natura è l'angolo $F\hat{P}E$?



Ipotesi $EP \cong$ ....

Tesi PQ è .... di ....

Dimostrazione

- *Traccia i raggi OE e OF e dimostra la congruenza dei triangoli POE e POF.*

Essi hanno:
$OE \cong$ ...... perché ...... ;
...... $\cong PF$ per .... ;
OP ....
Per il .... di congruenza, i triangoli sono ......

- *Deduci la tesi.*
In particolare ...... $\cong O\hat{P}F$, *quindi* ...... è .... di $E\hat{P}F$.

▶ *Caso particolare*
Il diametro EF è .... al diametro QP e i due triangoli EOP e OPF sono .... e isosceli. Gli angoli $E\hat{P}O$ e $O\hat{P}F$ sono ciascuno metà di un angolo retto, *quindi* $F\hat{P}E$ è ....

35 Disegna due circonferenze di centri O e O' che si intersecano nei punti C e D. Congiungi O con O' e determina il punto medio M del segmento OO'. Traccia la retta per C, perpendicolare a CM, che interseca le circonferenze in A e in B. Dimostra che le corde AC e CB sono congruenti.

36 Dimostra che se in una circonferenza di centro O si tracciano due corde EP e FP e la semiretta OP è bisettrice dell'angolo $E\hat{P}F$, allora le due corde sono congruenti.

37 Disegna una circonferenza e una retta r che la intersechi in A e in B. Considerato un diametro CD che non intersechi la retta, traccia su r le proiezioni P e Q dei punti C e D.
Dimostra che $PA \cong BQ$.

38 Date una circonferenza di centro O e una sua corda AB, dopo aver costruito il punto medio M della corda, scegli su essa due punti, C e D, equidistanti da M. Dimostra che C e D sono anche equidistanti da O.

39 In una circonferenza, una corda AB ha punto medio M. Considerata una qualunque altra corda CD passante per M, dimostra che M divide CD in parti non congruenti.

40 Su una circonferenza di centro O considera due archi consecutivi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ e indica con M il punto medio di $\overset{\frown}{AB}$ e con N il punto medio di $\overset{\frown}{BC}$. Traccia la corda MN, che interseca la corda AB in E e la corda BC in F. Dimostra che $BE \cong BF$. (Suggerimento. Il triangolo OMN è isoscele, quindi gli angoli alla base sono...)

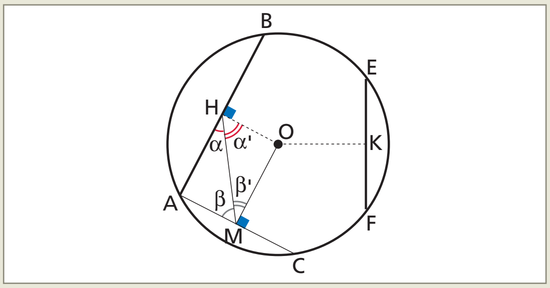
▶ *Caso particolare*: se gli archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ sono tali per cui le corde AB e BC sono congruenti al raggio OC, di che natura è il triangolo MON?

41 Date una circonferenza di centro O e due corde congruenti AB e CD che si incontrano nel punto E, dimostra che il punto E individua sulle corde segmenti rispettivamente congruenti.
(Suggerimento. Traccia le perpendicolari OH e OK alle corde AB e CD e considera i triangoli...)

La relazione tra corde aventi la stessa distanza dal centro

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

42 Dimostra che, se in una circonferenza due corde non sono congruenti, allora non hanno la stessa distanza dal centro e la corda maggiore ha distanza minore (vedi paragrafo 2 a pagina G177).



Ipotesi 1. AB, EF corde; 2. $AB >$ .... **Tesi** $OK >$ ....

Dimostrazione

- Costruisci la corda AC consecutiva ad AB e congruente a EF, indica con OM la distanza di AC da O. Traccia le distanze OH e OK rispettivamente di AB ed EF da O.
- *Esamina gli angoli $A\hat{H}O$ e $A\hat{M}O$.* Essi sono entrambi retti, *quindi* α e α' sono .... , come pure β e β', ossia: $\alpha +$ ...... $\cong \hat{R}$, $\beta +$ ...... $\cong$ ....
- *Considera il triangolo AMH.* A lato maggiore si oppone angolo .... In tale triangolo, fra i lati AH e AM, il maggiore è AH. Infatti $EF \cong AC$ e per ipotesi $AB >$ ...... , da cui risulta anche $AB > AC$. Dividendo i due membri per 2, si ottiene: $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}$......, ossia $AH >$ .... *Pertanto* $\beta >$ ....
- *Considera il triangolo MOH.* Poiché $\beta >$ ...... , tra i rispettivi complementari sussiste la relazione $\beta' <$ .... Nel triangolo MOH, all'angolo maggiore α' si oppone il lato maggiore ...... , *quindi* $OM >$ ....
- *Deduci la tesi.* OM e OK sono distanze da corde congruenti, *quindi* OM ...... OK, da cui risulta $OK >$ ....

43 Dati una circonferenza di centro O e un suo punto P interno, dimostra che, fra tutte le corde passanti per P, la maggiore è un diametro.

44 Preso un punto P interno a una circonferenza di centro O, traccia per P due corde, in modo che PO sia bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. Dimostra che le due corde sono congruenti.

45 In una circonferenza di centro O, le corde congruenti AB e CD si incontrano in P. Dimostra che PO è bisettrice dell'angolo formato dalle due corde. (Suggerimento. Ricorda che corde congruenti hanno distanze dal centro congruenti.)

46 P è un punto interno di una circonferenza di centro O. Traccia il raggio OP e la corda AB passante per P, perpendicolare a OP. Dimostra che la corda AB è minore di qualunque altra corda passante per P.

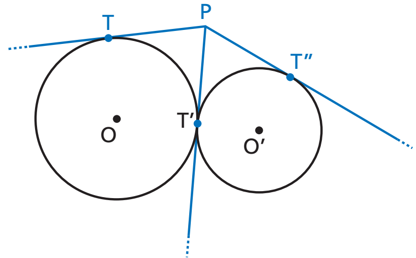
3. Le posizioni di una retta rispetto a una circonferenza

Teoria a pag. G177

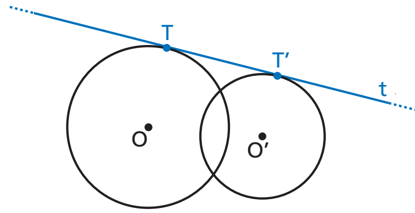
RIFLETTI SULLA TEORIA

47 Traccia una retta r e considera su di essa un punto Q. Esternamente a r prendi un punto A. Disegna la circonferenza che passa per A ed è tangente a r in Q.

48 Osserva la figura. Quale relazione sussiste fra i segmenti PT e PT''? Dimostrala.



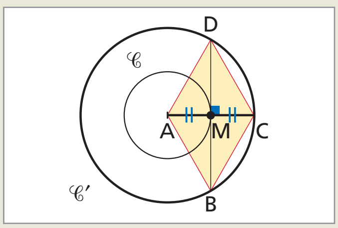
49 Osserva la figura. Come risultano le rette OT e $O'T'$? Giustifica la risposta.



ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

50 Disegniamo un segmento AC e il suo punto medio M. Tracciamo due circonferenze aventi centro in A, una di raggio AM e l'altra di raggio AC. Conduciamo per M la retta tangente alla circonferenza di raggio minore, fino a incontrare l'altra nei punti B e D. Dimostriamo che $ABCD$ è un rombo.



Ipotesi 1. $AM \cong MC$;
2. BD tangente in M.

Tesi $ABCD$ è un rombo.

Dimostrazione

Nella circonferenza minore, la retta tangente BD è perpendicolare al raggio AM passante per il punto di tangenza M. *Quindi* scriviamo $AM \perp BD$.
Nella circonferenza maggiore, il raggio AC è perpendicolare alla corda BD, *quindi* dimezza la corda stessa, ossia $BM \cong MD$.

D'altra parte, $AM \cong MC$ per ipotesi.

Il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali che si dimezzano scambievolmente, *quindi* è un parallelogramma. Inoltre, le diagonali sono perpendicolari, pertanto il parallelogramma $ABCD$ è un rombo.

51 Nella circonferenza di centro O e diametro AB, traccia le rette tangenti alla circonferenza in A e in B e dimostra che sono parallele.

52 Disegna una circonferenza di centro O e un punto P a essa esterno. Congiungi P con O e traccia da P due secanti Pa e Pb, in modo che PO sia bisettrice dell'angolo $a\hat{P}b$. Dimostra che le due corde intercettate dalla circonferenza sulle secanti sono congruenti.

53 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O traccia due secanti che intersecano il cerchio in due corde congruenti AB e CD. Dimostra che PO è bisettrice dell'angolo formato dalle due secanti.

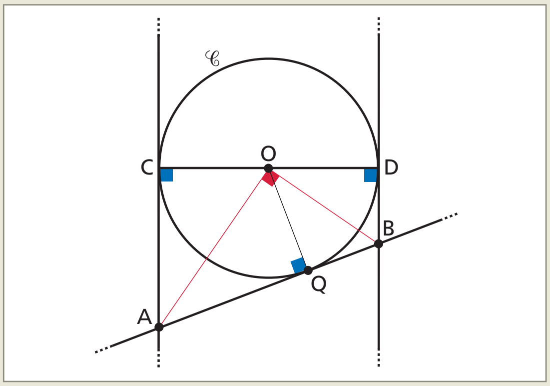
54 Disegna una circonferenza di centro O e due archi consecutivi congruenti, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$. Traccia la retta tangente alla circonferenza in B e disegna la corda AC. Dimostra che AC è parallela alla tangente.

Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

55 La circonferenza di centro O e diametro CD passa per il punto Q. Le tangenti condotte per C, D e Q si intersecano in A e in B. Dimostra che l'angolo $A\hat{O}B$ è retto.

▶ *Caso particolare*: se il punto Q è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{CD}$, come sono fra loro AB e CD? Come risulta il triangolo AOB?



Ipotesi 1. CD è un …………… ;
2. AC, …… e BD sono ………… a $\mathscr{C}$.

Tesi $A\hat{O}B$ è …………… .

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei triangoli AOC e AOQ, e quindi di $C\hat{O}A$ e $A\hat{O}Q$.*
  I triangoli ………… hanno:
  …… $\cong OQ$ perché ……… ;
  AO in ……… .
  Per il ……… criterio di congruenza dei triangoli ……………, i triangoli sono congruenti.
  In particolare: $C\hat{O}A \cong$ …… .

- *Ripeti il ragionamento per $B\hat{O}D$ e $B\hat{O}Q$.*
  Analogamente sono congruenti i triangoli …… e BOD perché hanno:
  ……………………… .
  In particolare: $Q\hat{O}B \cong$ …… .

- *Deduci la tesi.*
  Consideriamo l'angolo piatto $C\hat{O}D$:
  $$C\hat{O}D = \ldots + A\hat{O}Q + \ldots + B\hat{O}D = \hat{P}.$$
  E tenendo conto delle congruenze dimostrate:
  $$2A\hat{O}Q + 2Q\hat{O}B = \ldots .$$
  Dividendo ambo i membri per 2:
  $$A\hat{O}Q + \ldots = \frac{\hat{P}}{2} = \ldots .$$
  Quindi l'angolo $A\hat{O}B$ è retto.

▶ *Caso particolare*
Se Q è il punto medio di $\overset{\frown}{CD}$, il raggio OQ è perpendicolare sia a CD che a ………, *quindi AB* …………………… CD. Il triangolo AOB oltre che rettangolo è anche ……………………… .

56 Disegna una circonferenza di centro O e da un punto P esterno a essa conduci le due tangenti in A e B. Traccia il diametro per A e dimostra che l'angolo $O\hat{A}B$ è congruente a metà dell'angolo formato dalle due tangenti.

57 Data la circonferenza di centro O e diametro AB, prolunga AB di un segmento BE congruente al raggio e poi traccia la retta per B tangente alla circonferenza. Scegli su tale retta un punto V e disegna l'ulteriore tangente VF alla circonferenza. Dimostra che l'angolo $F\hat{V}E$ è triplo dell'angolo $B\hat{V}E$.

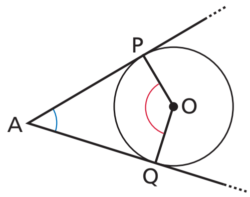
58 Disegna un angolo $a\hat{V}b$ e una circonferenza di centro O tangente ai lati dell'angolo. Dimostra che VO è la bisettrice dell'angolo $a\hat{V}b$. Detto E il punto di intersezione della circonferenza con il segmento VO, traccia per E la retta perpendicolare a VO, che interseca i lati dell'angolo nei punti A e B. Dimostra che il triangolo AVB è isoscele.

59 Considera una circonferenza di centro O e i punti P e Q, fuori di essa, equidistanti da O. Tracciati i segmenti di tangente condotti da P e da Q alla circonferenza, dimostra che sono congruenti.

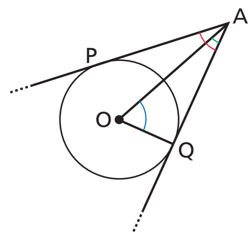
60 Con riferimento all'esercizio precedente, dimostra che la corda avente per estremi i punti di tangenza delle tangenti uscenti da P è congruente alla corda avente per estremi i punti di tangenza delle tangenti uscenti dal punto Q.

Proprietà geometriche e misure

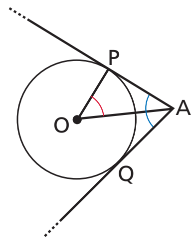
61 Determina gli angoli scritti sotto a ogni figura utilizzando i dati indicati.



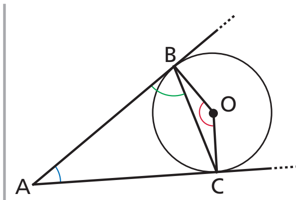
$P\hat{A}Q = 48°$
$P\hat{O}Q$?
a



$A\hat{O}Q = O\hat{A}Q + 28°$
$P\hat{A}Q$?
b



$P\hat{A}Q = 76°$
$P\hat{O}A$?
c



$A\hat{B}C = 2B\hat{A}C$
$B\hat{O}C$?
d

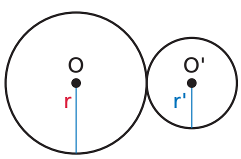
4. Le posizioni reciproche fra due circonferenze

Teoria a pag. G181

RIFLETTI SULLA TEORIA

62 **TEST** Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

A $OO' \cong r - r'$
B $OO' < r - r'$
C $OO' < r + r'$
D $OO' \cong r + r'$
E $OO' > r + r'$



63 Disegna due circonferenze in ognuna delle cinque possibili posizioni reciproche. Per ogni figura traccia, se esistono, le tangenti comuni alle due circonferenze.

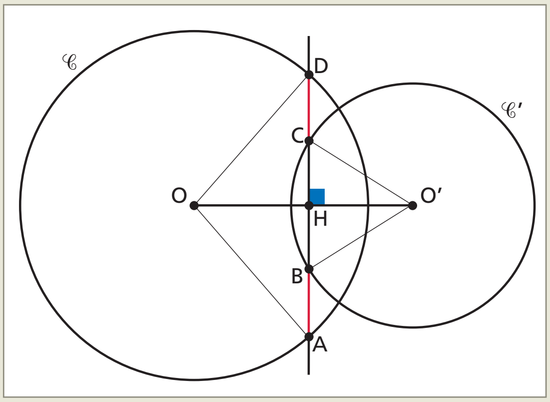
64 Disegna una circonferenza di centro O e raggio OA e una avente il centro nel punto medio di OA e raggio pari a $\frac{1}{4}$ di OA.
Qual è la posizione di una circonferenza rispetto all'altra? Motiva la risposta.

65 È data una circonferenza di centro O e raggio OA. Una seconda circonferenza ha centro O' esterno alla prima e tale che $O'O = \frac{5}{3}\ OA$.
Come deve essere il raggio della seconda affinché le due circonferenze siano secanti?

ESERCIZI

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

66 Date due circonferenze secanti, di centri O e O', traccia una retta perpendicolare a OO' in modo che incontri la prima circonferenza in A e in D e l'altra in B e in C e OO' in H. Dimostra che $AB \cong CD$.



Ipotesi 1. $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono .... ;
2. $DA \perp OO'$.

Tesi $AB \cong$ ....

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei segmenti DH e HA.* Nella circonferenza $\mathscr{C}$, $DA \perp OO'$ per ...., *quindi* $DH \cong$ ...... per il teorema sulla perpendicolare a una corda passante per il ....
- *Dimostra la congruenza dei segmenti CH e BH.* Nella circonferenza $\mathscr{C}'$, $CB \perp$ ... per ipotesi, *quindi* ...... $\cong HB$.
- *Deduci la tesi.* ... $\cong CD$ perché .... di segmenti ....

67 Date due circonferenze concentriche e una retta che le interseca entrambe, nell'ordine, nei punti A, B, C e D, dimostra che AB e CD sono congruenti.
Dimostra inoltre che l'asse del segmento AD coincide con l'asse del segmento BC e che tale asse passa per il centro delle due circonferenze.

68 Due circonferenze s'intersecano in A e in B. Traccia per A e B le rette parallele a e b e siano C, D ed E, F rispettivamente le intersezioni con le due circonferenze.
Dimostra che $EFDC$ è un parallelogramma.

69 Disegna due circonferenze tangenti esternamente. Per il punto di tangenza traccia una secante comune e, nei punti d'intersezione di questa secante con le circonferenze, conduci le tangenti. Dimostra che le due tangenti non comuni sono parallele.

70 Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti internamente in P. Traccia per P una retta secante s, che intersechi la circonferenza minore in A e quella maggiore in B.
Dimostra che i raggi $O'A$ e OB sono paralleli.
(Suggerimento. Dimostra che O, O', P sono allineati; poi considera i triangoli $AO'P$ e BOP...)

Proprietà geometriche e misure

71 Due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono tangenti internamente e la distanza tra i loro centri è 24 cm. Se il raggio di $\mathscr{C}$ è 4 cm, quanto è lungo quello di $\mathscr{C}'$?

72 La distanza fra i centri di due circonferenze di raggi lunghi 8 cm e 12 cm è uguale a 18 cm. Come sono le circonferenze?

73 **COMPLETA** la seguente tabella, dove r_1 e r_2 sono le misure dei raggi e O_1 e O_2 i centri di due circonferenze.

r_1	r_2	O_1O_2	$r_1 + r_2$	$r_1 - r_2$	POSIZIONE RECIPROCA
10	4	5	...	...	...
8	6	...	...	...	tangenti internamente
...	8	20	20	...	...
12	...	5	...	7	...
...	7	...	16	...	tangenti esternamente

5. Gli angoli alla circonferenza e i corrispondenti angoli al centro

Teoria a pag. G183

RIFLETTI SULLA TEORIA

74 **VERO O FALSO?**

a) In una circonferenza a ogni angolo al centro corrispondono infiniti angoli acuti alla circonferenza, tutti metà dell'angolo al centro. V F

b) Per ogni arco esiste un solo angolo alla circonferenza corrispondente. V F

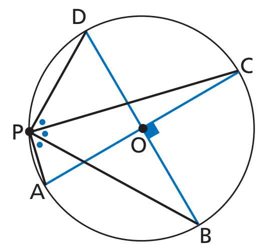
c) Non esistono angoli alla circonferenza maggiori di un angolo retto. V F

d) Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto. V F

e) L'angolo formato da un diametro e dalla semiretta tangente alla circonferenza in un estremo del diametro stesso è un angolo alla circonferenza. V F

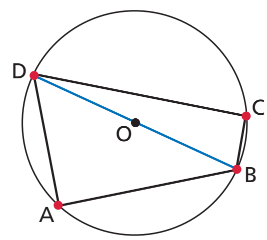
75 Se due angoli alla circonferenza sono complementari, come sono fra loro i due angoli al centro corrispondenti?

76



Nella figura, DB e AC sono due diametri perpendicolari. Preso un punto qualsiasi interno all'arco $\overset{\frown}{AD}$, spiega perché i tre angoli evidenziati sono congruenti.

77

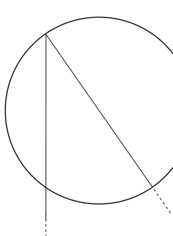


Nel quadrilatero $ABCD$ la diagonale DB è un diametro.
Spiega perché la somma di $A\hat{D}C$ e $C\hat{B}A$ è congruente a un angolo piatto.

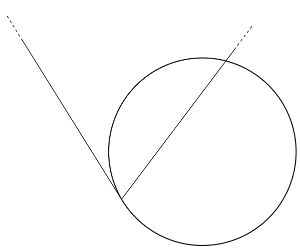
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero

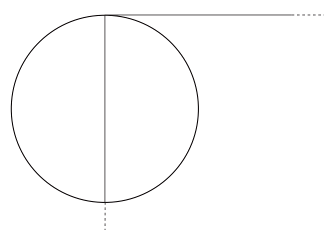
78 **COMPLETA** Colora l'arco su cui insiste ogni angolo alla circonferenza e disegna il corrispondente angolo al centro.



a

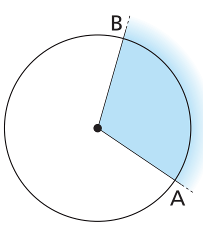


b

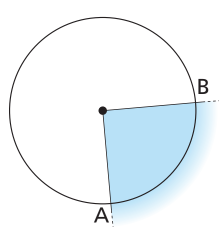


c

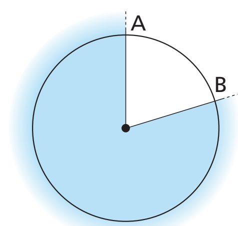
79 **COMPLETA** Per ogni angolo al centro, disegna tre angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Uno degli angoli tracciati deve avere il vertice in B.



a



b

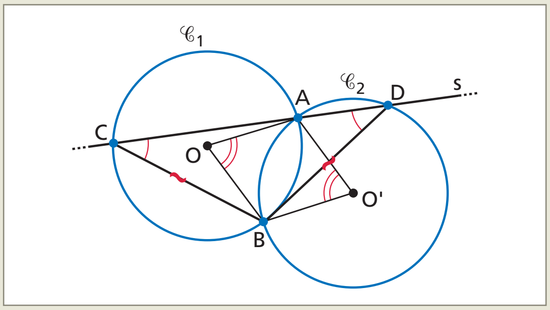


c

Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

80 Disegniamo due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ congruenti, rispettivamente di centro O e O', che si intersecano in A e in B. Per il punto A tracciamo una secante s che incontra le due circonferenze in C e D.
Dimostriamo che il triangolo CBD è isoscele.



Ipotesi 1. $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$;
2. $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A; B\}$;
3. $s \cap \mathscr{C}_1 = \{A; C\}$;
$s \cap \mathscr{C}_2 = \{A; D\}$.

Tesi CBD è isoscele.

Dimostrazione

Tracciamo i raggi OA, OB, $O'A$, $O'B$, che sono congruenti tra loro poiché $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$ per ipotesi.

$AOBO'$ è un rombo avendo i lati congruenti, *pertanto* $A\hat{O}B \cong A\hat{O}'B$ poiché angoli opposti di un rombo.

$A\hat{O}B$ è angolo al centro che insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ e $A\hat{C}B$ è angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$, *pertanto* $A\hat{C}B \cong \frac{1}{2} A\hat{O}B$ perché angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

Analogamente $A\hat{D}B \cong \frac{1}{2} A\hat{O}'B$ e poiché $A\hat{O}B \cong A\hat{O}'B$ anche $A\hat{D}B \cong A\hat{C}B$, *pertanto* CBD è isoscele.

81 Considera il triangolo ABC e traccia le altezze AH e BK. Dimostra che H e K sono punti della circonferenza di diametro AB. Se il triangolo ABC è rettangolo in C, dove si trovano i punti H e K?

82 Nel triangolo rettangolo ABC, M è il punto medio dell'ipotenusa AB. Dimostra che l'angolo $B\hat{M}C$ è doppio dell'angolo $\hat{A}$.

83 Su una circonferenza di centro O scegli tre punti A, B, C e congiungili, ottenendo un triangolo. Traccia l'asse del segmento AB, che incontra l'arco non contenente C nel punto E.
Congiungi E con C.
Dimostra che CE è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

84 Disegna una circonferenza di centro O, un diametro AB e due corde, AE e AF, tali che AB sia bisettrice dell'angolo $F\hat{A}E$.
Dimostra che le corde AE e AF sono congruenti.

85 Da un punto B di una circonferenza, traccia le corde AB e BC. Congiungi il punto medio M dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ col punto medio N dell'arco $\overset{\frown}{BC}$. La corda MN interseca le due corde in E e in F. Dimostra che il triangolo BEF è isoscele sulla base EF.

86 Dati una circonferenza di centro O e un suo arco $\overset{\frown}{AB}$, traccia due angoli alla circonferenza che insistono su $\overset{\frown}{AB}$ e poi disegna le bisettrici dei due angoli. Dimostra che tali bisettrici passano per il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$.

87 In una circonferenza di centro O disegna due diametri AB e CE. Traccia la corda ED perpendicolare ad AB.
Dimostra che $AB \parallel CD$.

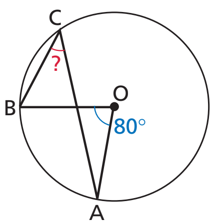
88 Data una circonferenza di diametro AB, disegna un triangolo ABC in modo che il lato AC intersechi la circonferenza in E e il lato BC in F. Proietta su EF il punto B, indicando con H la proiezione.
Dimostra che $A\hat{B}E \cong F\hat{B}H$.
(Suggerimento. Dimostra che $A\hat{B}E \cong A\hat{F}E$ e osserva la relazione che esiste tra AF e BC.)

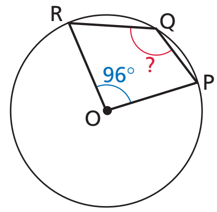
89 Il triangolo rettangolo ABC ha per base il cateto AB e M è il punto medio dell'ipotenusa BC. Traccia la circonferenza di diametro AM. Essa incontra AB in E e AC in F.
Dimostra che $EF \parallel BC$.
(Suggerimento. Ricorda che, in un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.)

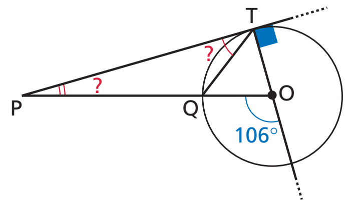
90 Disegna una circonferenza e due corde AB e CD perpendicolari fra loro. Per il loro punto di intersezione P traccia la retta perpendicolare a DB che interseca nel punto Q la corda AC.
Dimostra che il triangolo PQC è isoscele.

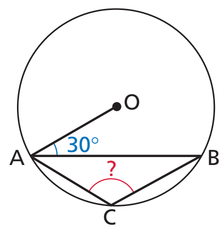
Proprietà geometriche e misure

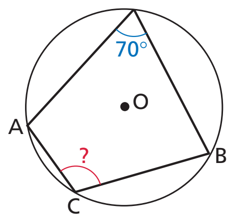
Determina la misura dell'ampiezza degli angoli indicati.

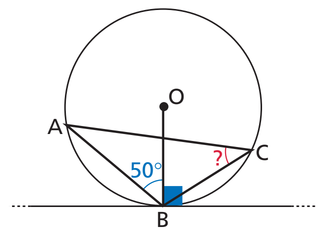
91


93


95


92


94


96


RIEPILOGO LA CIRCONFERENZA E IL CERCHIO

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

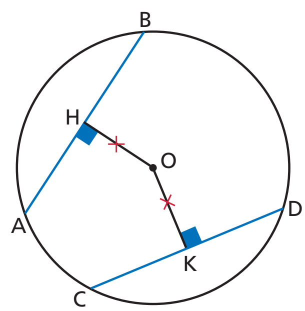
97 **TEST** Considera una circonferenza di centro O e raggio OR e quella di diametro OR. Come sono le due circonferenze?

A Concentriche.
B Tangenti esternamente.
C Esterne.
D Secanti.
E Tangenti internamente.

98 **TEST** Una sola delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

A Due circonferenze esterne hanno quattro tangenti comuni che si incontrano a due a due sulla retta dei centri.
B Due circonferenze tangenti esternamente hanno tre tangenti comuni.
C Due circonferenze tangenti internamente non hanno tangenti in comune.
D Date due circonferenze concentriche, per ogni tangente t a una delle due esistono due tangenti all'altra parallele a t.
E Due circonferenze una interna all'altra non hanno tangenti in comune.

99 Enuncia il teorema espresso dalla seguente figura e dalle relative ipotesi e tesi. Enuncia il teorema che ottieni scambiando la prima ipotesi con la tesi.



Ipotesi 1. $AB \cong DC$;
2. $OH \perp AB$;
3. $OK \perp CD$.

Tesi $OH \cong OK$.

100 Dati una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e un punto P esterno a essa, disegna la circonferenza $\mathscr{C}'$ che ha per centro il punto medio M del segmento OP e raggio OM. $\mathscr{C}'$ incontra $\mathscr{C}$ in T_1 e T_2. Dimostra che le rette PT_1 e PT_2 sono tangenti alla circonferenza $\mathscr{C}$.

101 In una circonferenza congiungi gli estremi di due corde parallele disuguali. Dimostra che il quadrilatero ottenuto è un trapezio isoscele.

102 Disegna una circonferenza di diametro AB e una di diametro BC, che interseca la precedente in E, oltre che in B.
Dimostra che i punti A, E, C sono allineati.

103 Una circonferenza è intersecata da due rette parallele. Dimostra che gli archi compresi fra le due parallele sono congruenti. (Suggerimento. Traccia una trasversale che congiunga...)

104 Date due circonferenze concentriche di centro O, traccia una semiretta Oa che incontra la circonferenza interna in A e l'altra in A'; allo stesso modo traccia una semiretta Ob che incontra la circonferenza interna in B e l'altra in B'.
Dimostra che $AB \parallel A'B'$.
▶ *Caso particolare*: se il raggio della circonferenza esterna è congruente al diametro di quella interna, quale relazione sussiste fra le corde AB e $A'B'$?

105 In una circonferenza di centro O prolunga una corda BC di un segmento CD congruente al raggio. Congiungi D con O e prolunga tale segmento fino a incontrare in A la circonferenza.
Dimostra che $C\hat{O}D$ è la terza parte di $A\hat{O}B$.

106 Dati due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ con i lati paralleli e discordi, dimostra che:
a) le bisettrici di tali angoli sono parallele;
b) $\hat{A}$ e $\hat{B}$ staccano sulla circonferenza di diametro AB corde congruenti;
c) congiungendo gli estremi di tali corde con il centro, ottieni due triangoli congruenti.

107 Disegna una circonferenza, una sua corda CD e il punto medio M della corda. Scegli su CD due punti, A e B, equidistanti da M. Traccia da A la perpendicolare a CD, che incontra l'arco minore in F e da B la perpendicolare sempre a CD, che incontra lo stesso arco in E.
Dimostra che $AF \cong BE$. Come risulta il quadrilatero $ABEF$?
▶ *Caso particolare*: se CD è un diametro, il quadrilatero $ABEF$ può essere un quadrato con i lati congruenti al raggio della circonferenza? Dimostralo.

108 Disegna due circonferenze concentriche, di raggio uno doppio dell'altro. Sulla circonferenza di raggio maggiore scegli un punto A e da esso conduci i segmenti di tangente, AB e AC, alla circonferenza minore. Traccia la corda BC.
Dimostra che il triangolo ABC è equilatero.

109 Considera una circonferenza di diametro AB e una corda CD perpendicolare ad AB, che incontra AB nel punto E. Indica con M il punto medio della corda BD. La retta ME incontra AC in F.
Dimostra che $EF \perp AC$.
▶ *Caso particolare*: come risulta il quadrilatero $ADBC$ se CD è congruente ad AB?

110 Disegna una circonferenza di centro O, un diametro AB e una corda CD, parallela ad AB. Dagli estremi della corda traccia le perpendicolari CF e DE al diametro AB.
Dimostra che $AF \cong BE$.

111 Una retta r interseca una circonferenza di centro O nei punti C e D. Costruisci un triangolo isoscele di vertice O e base AB appartenente a r.
Dimostra che $AC \cong BD$, distinguendo due casi:
a) $AB < CD$;
b) $AB > CD$.

112 Disegna un triangolo ABC e le altezze AH e BK. Dimostra che l'asse del segmento HK passa per il punto medio di AB.

113 Considera un triangolo isoscele FAD di base FA e prolunga il lato FD di un segmento $DC \cong FD$.
a) Dimostra che il triangolo FAC è rettangolo.
b) Indica con M il punto medio di AC e dimostra che DM appartiene all'asse del segmento AC.
c) Con centro in A e raggio AD traccia un arco che incontra il prolungamento di DM nel punto B. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è un rombo.

114 In una circonferenza di centro O traccia una corda AB e la semiretta t tangente in B nel semipiano che contiene il centro.
Considera su t un punto C tale che $CB \cong AB$ e indica con P il punto di intersezione della retta AC con la circonferenza. Dimostra che:
a) $PB \cong PC$;
b) $B\hat{P}C \cong 2O\hat{B}P$.

115 Su una circonferenza di diametro AB fissa un punto C. Traccia la corda AC e la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, che incontra la circonferenza in E. Congiungi B con C e traccia la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, che incontra AE in F. Dimostra che il triangolo BEF è rettangolo isoscele.

116 Disegna una circonferenza di diametro AB, scegli su di essa un punto C in modo che la tangente a essa in C incontri il prolungamento di AB, dalla parte di B, nel punto E. Traccia il segmento CH perpendicolare ad AB. Dimostra che CB è bisettrice dell'angolo $H\hat{C}E$.

117 Disegna due circonferenze tangenti esternamente. Per il loro punto di contatto traccia due rette secanti le circonferenze. Dimostra che le corde che congiungono i punti d'intersezione con le circonferenze sono parallele.

118 Disegna due circonferenze concentriche $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$. Da un punto P della circonferenza maggiore $\mathscr{C}$ conduci le tangenti alla circonferenza minore $\mathscr{C}'$. Siano A e B i punti d'intersezione con la circonferenza $\mathscr{C}$ e C e D i punti di tangenza con $\mathscr{C}'$.
Dimostra che $ABCD$ è un trapezio isoscele.

119 Le circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di centri O e O' sono tangenti esternamente nel punto A. Conduci la tangente comune in A e un'altra tangente BC. Le due tangenti s'intersecano in P.
Dimostra che $B\hat{A}C$ e $O\hat{P}O'$ sono retti.

120 Disegna un triangolo ABC e due circonferenze di diametri AC e BC. La retta perpendicolare ad AB passante per A incontra la circonferenza di diametro AC in E; la retta perpendicolare ad AB passante per B incontra l'altra circonferenza in F. Dimostra che:
a) i punti E, C, F sono allineati;
b) la retta EF è parallela ad AB.
▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è isoscele di vertice C, come sono i triangoli ACE e BCF?

121 Dati una circonferenza di centro O e un punto P esterno a essa, traccia due secanti Pa e Pa' in modo che PO risulti bisettrice dell'angolo $a\hat{P}a'$. Indica con A e A' i punti intersezione di Pa con la circonferenza e con B e B' i punti intersezione dell'altra secante. Dimostra che:
a) O ha la stessa distanza dai lati dell'angolo $a\hat{P}a'$;
b) $PA \cong PB$;
c) $PA' \cong PB'$.

122 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O conduci le tangenti PT e PR. Sull'arco $\overset{\frown}{TR}$, dalla parte di P, traccia una terza tangente che incontra le precedenti in A e B.
Dimostra che $A\hat{O}B \cong \frac{1}{2} R\hat{O}T$.

123 Disegna due circonferenze congruenti, che si intersecano nei punti A e B. Traccia una retta r, perpendicolare ad AB, che interseca la prima circonferenza in C e D e la seconda in E e F.
Dimostra che le corde CD ed EF sono congruenti. Dimostra inoltre che AB è asse sia del segmento CF sia del segmento ED. Detti O e O' i centri delle due circonferenze, dimostra che il quadrilatero $OO'FC$ è un trapezio isoscele.

124 Considera una circonferenza di centro O e disegna due corde parallele e congruenti, poi congiungi gli estremi in modo che la figura non risulti intrecciata.
Dimostra che il quadrilatero ottenuto è un rettangolo.
▶ *Caso particolare*: se un angolo (acuto) alla circonferenza che insiste su una delle due corde è congruente a $\frac{1}{4}\hat{P}$, che quadrilatero ottieni?

125 Disegna una circonferenza di centro O e diametro AB, e una retta r che interseca la circonferenza nei punti C e D. Conduci da A e da B le perpendicolari AE e BF alla retta r. Dimostra che $EC \cong FD$. (Suggerimento. Traccia da O la perpendicolare a CD e considera il fascio di rette.)

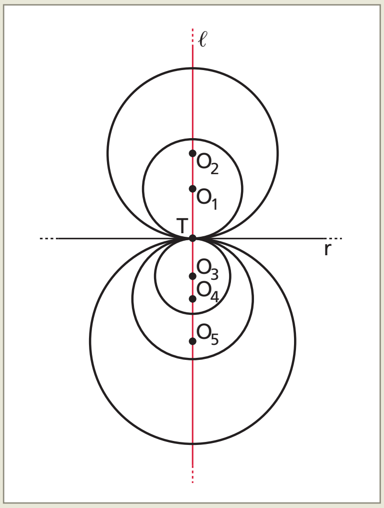
La circonferenza e i luoghi geometrici

ESERCIZIO GUIDA

126 Dati una retta r e un suo punto T, tracciamo alcune circonferenze tangenti a r in T. Disegniamo il luogo dei centri delle circonferenze tangenti in T a r e dimostriamo che la retta è il luogo richiesto.

Dimostrazione

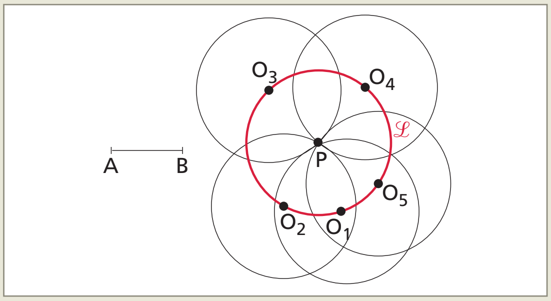
Vogliamo dimostrare che il luogo cercato è la retta ℓ perpendicolare a r in T.



1. Preso un qualsiasi punto O di ℓ, il segmento OT è raggio di una circonferenza di centro O e passante per T. Il raggio OT è perpendicolare a r, poiché appartiene alla retta ℓ, *quindi* la circonferenza è tangente a r. *Pertanto* tutti i punti di l sono centri di circonferenze tangenti in T a r.
2. Se O è centro di una circonferenza tangente in T a r, OT ne è il raggio. *Allora* OT è perpendicolare a r e $T \in r$. *Quindi* OT appartiene alla retta passante per T e perpendicolare a r, che è unica, *quindi* $O \in \ell$. *Pertanto* solo i punti di ℓ sono centri di circonferenze tangenti in T a r.

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

127 Considera un punto P e un segmento AB. Dimostra che il luogo geometrico dei centri delle circonferenze passanti per P e di raggio congruente ad AB è la circonferenza di centro P e raggio congruente ad AB.



- *Dimostra che tutti i punti del luogo $\mathscr{L}$ godono della proprietà richiesta.*

Ipotesi $O \in \mathscr{L}$.

Tesi …… è centro di una …………… passante per P con raggio congruente ad ……… .

Se $O \in \mathscr{L}$, $PO \cong$ …… , perché raggio della ……… …… , *quindi* esiste la circonferenza di centro ……… e raggio congruente ad ……… , che passa per ……… .

- *Dimostra che solo i punti di $\mathscr{L}$ godono della proprietà richiesta.*

Ipotesi O' è centro di una …………… passante per P con raggio congruente ad …… .

Tesi $O' \in$ …… .

Se PO' è un raggio, risulta $PO' \cong$ …… , *quindi* $O' \in$ …… .

128 Determina il luogo geometrico dei centri delle circonferenze aventi raggio congruente a un segmento AB e tangenti a una retta r.

129 Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa AB, determina il luogo dei vertici C al variare dell'angolo $\hat{A}$, tenendo fissa l'ipotenusa AB.

130 Disegna una semicirconferenza di diametro AB e un triangolo ABC con C appartenente alla semicirconferenza; traccia l'altezza CH del triangolo. Individua il luogo dei punti H al variare di C sulla semicirconferenza.

131 Disegna un triangolo ABC in modo che la mediana CM sia congruente al lato AC. Tenendo fissa la base AB, disegna altri triangoli ABC', ABC''…, con la proprietà che la mediana rispetto ad AB sia congruente al lato AC. Disegna il luogo dei vertici C e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

132 Determina il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele e da due punti fuori di esse.

133 Dati due punti A e B del piano, disegna il luogo dei centri delle circonferenze passanti per A e per B e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

134 Disegna un segmento AB e il suo punto medio M. Traccia da M una retta r e proietta su r il punto B, indicando la proiezione con H. Determina il luogo dei punti H al variare dell'inclinazione di r su AB (AB rimane fisso).

135 Considera una circonferenza di centro O, una sua corda AB e il punto medio di AB. Disegna il luogo dei punti medi delle corde congruenti ad AB e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

136 Disegna due rette r e s incidenti e alcune circonferenze tangenti a entrambe. Traccia il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alle due rette e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

137 Date una circonferenza e una retta qualunque, disegna il luogo dei punti medi delle corde parallele alla retta e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

138 Disegna due circonferenze concentriche $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$; traccia alcune circonferenze tangenti a entrambe. Determina il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a $\mathscr{C}$ e a $\mathscr{C}'$ e dimostra che la figura ottenuta è il luogo richiesto.

6. I poligoni inscritti e circoscritti

→ Teoria a pag. G185

RIFLETTI SULLA TEORIA

139 VERO O FALSO?

a) Un poligono è circoscrivibile a una circonferenza se gli assi dei lati passano per uno stesso punto. V F

b) Se le bisettrici degli angoli di un poligono passano tutte per uno stesso punto, questo è il centro della circonferenza inscritta. V F

c) Unendo ordinatamente n punti qualsiasi presi su una circonferenza, si ottiene un poligono di n lati inscritto in tale circonferenza. V F

d) I punti di contatto di quattro rette tangenti a una stessa circonferenza determinano un poligono inscritto nella circonferenza stessa. V F

ESERCIZI

140 Un rettangolo, che non sia un quadrato, ha sempre una circonferenza circoscritta, ma non ha mai quella inscritta. Spiega perché.

141 Un rombo, che non sia un quadrato, ha sempre una circonferenza inscritta, ma non ha mai quella circoscritta. Spiega perché.

7. I punti notevoli di un triangolo

Teoria a pag. G186

RIFLETTI SULLA TEORIA

142 VERO O FALSO?

a) Il punto di incontro degli assi di un triangolo si chiama circocentro perché è il centro del cerchio circoscritto. V F

b) L'incentro divide le mediane in due parti, una doppia dell'altra. V F

c) L'incentro di un triangolo è equidistante dai lati del triangolo stesso. V F

d) Il baricentro è l'unico punto notevole di un triangolo sempre interno. V F

e) Ortocentro, baricentro, incentro e circocentro di uno stesso triangolo non possono mai concidere. V F

143 TEST Quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?
In un triangolo:

A il circocentro è il punto di incontro degli assi.

B l'incentro è il punto di incontro delle mediane.

C l'ortocentro è il punto di incontro delle altezze.

D è sempre possibile inscrivere una circonferenza.

E vi sono sempre tre excentri.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero

Considera 5 triangoli: un triangolo scaleno acutangolo, un triangolo scaleno rettangolo, un triangolo scaleno ottusangolo, un triangolo isoscele, un triangolo equilatero. Effettua su questi triangoli le costruzioni richieste.

144 Costruisci il circocentro e traccia la circonferenza circoscritta.

145 Costruisci l'incentro e traccia la circonferenza inscritta.

146 Costruisci l'ortocentro.

147 Costruisci il baricentro.

148 Disegna gli excentri di un triangolo equilatero.

149 In un triangolo rettangolo, con quale punto coincide il circocentro? Motiva la risposta.

150 In un triangolo acutangolo l'ortocentro è sempre interno al triangolo? E in un triangolo ottusangolo? È in un triangolo rettangolo? Motiva le risposte.

151 In quale caso l'ortocentro coincide con uno dei vertici del triangolo? Motiva la risposta.

152 In un triangolo acutangolo l'incentro è un punto interno? E in un triangolo rettangolo o in uno ottusangolo? Motiva le risposte.

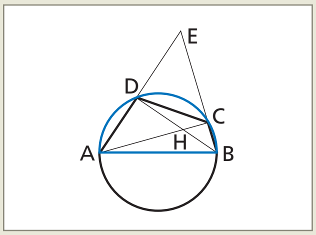
153 Indica dove si trova il baricentro di un triangolo acutangolo, di un triangolo rettangolo, di un triangolo ottusangolo. Motiva le risposte.

Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

154 Data la circonferenza di diametro AB, su una stessa semicirconferenza considera due punti C e D in modo da ottenere il quadrilatero $ABCD$, con diagonali AC e BD, che si intersecano in H.
Dimostra che H è l'ortocentro del triangolo ABE, essendo E il punto d'incontro delle rette AD e BC.

▶ *Caso particolare*: se i punti C e D sono tali per cui la corda CD è parallela ad AB, come risulta il triangolo ABE?



Ipotesi 1. AB è un .... ;
2. $C \in \overset{\frown}{ADB}$.

Tesi H è l'ortocentro di ....

Dimostrazione

- *Dimostra che DB e AC sono altezze.*
$A\hat{D}B$ è un angolo .... perché insiste su .... ; anche ...... è un angolo .... perché .... *Pertanto* DB è .... ad AE e AC è .... a .... DB, dunque sono due altezze del triangolo ......, *quindi* il loro punto d'incontro H è l'............... .

▶ *Caso particolare*
Il quadrilatero $ABCD$ risulta un trapezio .... *quindi* anche il triangolo ABE risulta ....

155 Dimostra che in ogni triangolo rettangolo:
a) il circocentro si trova sull'ipotenusa;
b) congiungendo il circocentro con i punti medi dei cateti e con il vertice dell'angolo retto, si ottengono quattro triangoli congruenti.

156 Dati un triangolo ABC e le sue altezze AH e BK, dimostra che i punti A, B, H, K appartengono alla stessa circonferenza.

157 Disegna un triangolo ABC e circoscrivi a esso una circonferenza di centro O. L'asse del lato BC incontra l'arco $\overset{\frown}{BC}$ non contenente A nel punto E. Dimostra che:
a) $B\hat{O}E \cong C\hat{O}E$;
b) AE è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$.

158 Considera un triangolo qualunque e la circonferenza inscritta in esso. Con centro nei vertici del triangolo disegna tre circonferenze passanti per i punti di tangenza con la circonferenza inscritta. Dimostra che le circonferenze sono a due a due tangenti esternamente.

159 Dato il triangolo ABC, dal vertice B traccia la retta perpendicolare ad AB e dal vertice C la retta perpendicolare ad AC. Le due rette si intersecano nel punto E. Dimostra che E appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo. Considera i due casi determinati dall'appartenenza o meno di O, centro della circonferenza, al triangolo dato.

160 Disegna un triangolo rettangolo circoscritto a una circonferenza. Dimostra che il diametro della circonferenza è congruente alla differenza fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.
(Suggerimento. Congiungi il centro della circonferenza con i punti di tangenza.)

161 Considera l'incentro S di un triangolo qualunque ABC e traccia per S la parallela al lato BC che incontra in P e in Q rispettivamente i lati AB e AC. Dimostra che il perimetro del triangolo APQ è congruente alla somma di AB e AC. (Suggerimento. Considera i triangoli BPS e SQC.)

8. I quadrilateri inscritti e circoscritti

→ Teoria a pag. G190

RIFLETTI SULLA TEORIA

162 **VERO O FALSO?**

a) È sempre possibile inscrivere un rombo in una circonferenza. V F
b) Se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora la somma degli angoli opposti è congruente a un angolo piatto. V F
c) Esiste sempre una circonferenza inscritta in un rettangolo. V F
d) Ogni trapezio è inscrivibile in una semicirconferenza. V F

163 TEST Un parallelogramma può essere inscritto in una circonferenza solo se:

A è un rombo.

B la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

C è un rettangolo.

D la somma degli angoli interni è un angolo giro.

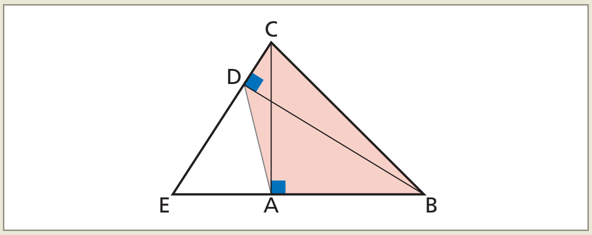
E un lato passa per il centro della circonferenza.

ESERCIZI

Dimostrazioni

ESERCIZIO GUIDA

164 Dati un triangolo *EBC* e le sue altezze *CA* e *BD*, dimostriamo che il quadrilatero *ABCD* è inscrivibile in una circonferenza.

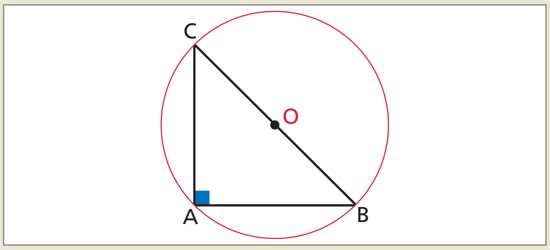


Ipotesi 1. $CA \perp EB$;
2. $BD \perp CE$.

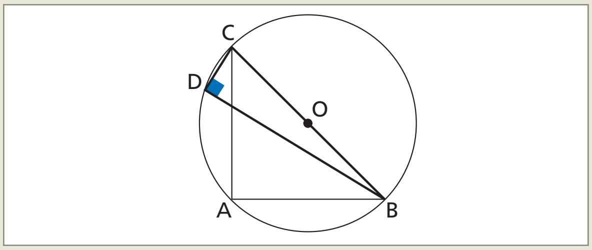
Tesi *ABCD* è inscrivibile in una circonferenza.

Dimostrazione

Poiché l'angolo $B\hat{A}C$ è retto, è possibile disegnare una circonferenza che ha come diametro *CB* e passante per *A*. Il centro *O* della circonferenza è il punto medio di *CB*, *pertanto* il raggio è la metà di *CB*.



Anche l'angolo $B\hat{D}C$ è retto, quindi anche *D* è un punto della circonferenza che ha come centro *O* il punto medio di *CB* e come raggio la metà di *CB*.



Possiamo concludere che il quadrilatero *ABCD* è inscrivibile in una circonferenza.

165 Dato un quadrilatero inscritto in una circonferenza, dimostra che ogni angolo è congruente all'angolo esterno di vertice opposto.

166 Dimostra che, se un trapezio è isoscele, è inscrivibile in una circonferenza.

167 Dimostra che se un parallelogramma è inscritto in una circonferenza, è un rettangolo.

168 Disegna due triangoli isosceli ABC e ABD aventi la base AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB. Dimostra che il quadrilatero $ACBD$ è circoscrivibile a una circonferenza.

169 Dopo aver disegnato una circonferenza di diametro AB, traccia le rette a e b tangenti rispettivamente in A e B alla circonferenza. Dai punti C e D di a, equidistanti da A, traccia le tangenti alla circonferenza. Indica con E e F i punti in cui tali tangenti incontrano b. Dimostra che il quadrilatero $CDFE$ è un trapezio isoscele.

170 Dagli estremi di una corda AB della circonferenza di centro O, traccia due corde AC e BD a essa perpendicolari. Dimostra che il quadrilatero $ABDC$ è un rettangolo.

171 Dal punto medio H della corda AB della circonferenza di centro O, traccia il diametro CD (in modo tale che l'arco $\overset{\frown}{ADB}$ sia minore dell'arco $\overset{\frown}{ACB}$). Dal punto D traccia una corda DE che incontra AB in F. Dimostra che il quadrilatero $ECHF$ è inscrivibile in una circonferenza.

172 Un quadrilatero convesso $ABCD$ inscritto in una circonferenza ha i due angoli $\hat{B}$ e $\hat{D}$ opposti congruenti. Dimostra che:
a) $\hat{B}$ e $\hat{D}$ sono angoli retti;
b) $A\hat{C}B \cong A\hat{D}B$, $A\hat{C}D \cong A\hat{B}D$.

173 Disegna un angolo convesso $a\hat{O}b$. Internamente all'angolo segna un punto P e traccia le distanze PR e PQ dai lati dell'angolo. Dimostra che il quadrilatero $OQPR$ è inscrivibile in una circonferenza, di cui devi precisare il diametro.

174 In una semicirconferenza di diametro AB inscrivi un trapezio $ABCD$.
Dimostra che il trapezio è isoscele e che la diagonale è perpendicolare al lato obliquo.

175 Dimostra che, in ogni trapezio circoscritto a una circonferenza di centro O, i due triangoli che si ottengono congiungendo il punto O con gli estremi dei lati obliqui sono rettangoli.

176 Dimostra che, in un trapezio isoscele circoscritto a una semicirconferenza, il lato obliquo è congruente alla metà della base maggiore.

177 Considerato il triangolo rettangolo EFC, di ipotenusa EF, traccia l'altezza CA, il punto medio D di EC e il punto medio B di FC.
Dimostra che $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza, di cui devi specificare centro e raggio.

178 Dato il quadrilatero $ABCD$, traccia le bisettrici dei suoi angoli e indica con L, M, N, P i loro punti d'incontro. Dimostra che $LMNP$ è un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza.

179 In un triangolo rettangolo ABC, avente per base l'ipotenusa BC, traccia l'altezza AH. Da H manda le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che:
a) A, E, H, D sono punti di una stessa circonferenza;
b) il quadrilatero $EBCD$ è inscrivibile in una circonferenza.

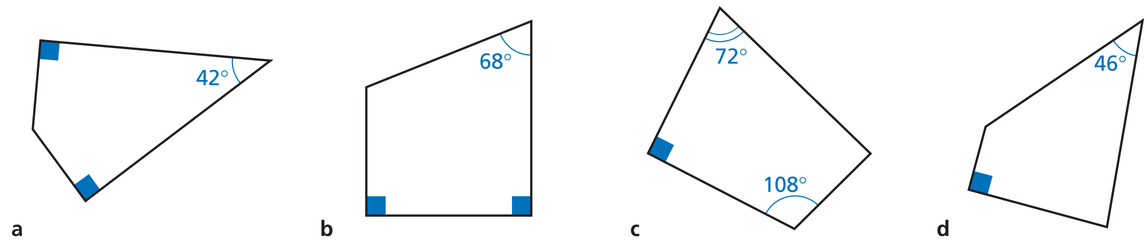
180 Nel triangolo ABC, inscritto in una circonferenza, traccia la corda BE perpendicolare al lato AC, la corda CF perpendicolare al lato AB e la corda AD perpendicolare al lato BC.
Dimostra che C è punto medio dell'arco $\overset{\frown}{ED}$, come pure B è medio di $\overset{\frown}{FD}$ e A è medio di $\overset{\frown}{EF}$.
(Suggerimento. Considera gli angoli $D\hat{F}C$ e $C\hat{F}E$ rispettivamente congruenti a $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}E$.)

181 Disegna un triangolo rettangolo ABC, avente la base nell'ipotenusa AB. Puntando il compasso in A, riporta su AB un segmento $AD \cong AC$. Dal punto D conduci la perpendicolare ad AB, che incontra BC in E e il prolungamento di AC in F. Dimostra che:
a) AE è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$;
b) $CD \parallel BF$;
c) il trapezio $CFBD$ è isoscele;
d) il trapezio $CFBD$ è inscrivibile in una circonferenza.

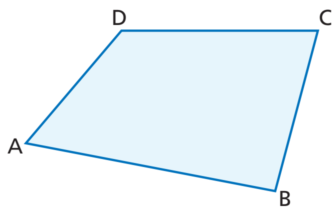
182 Considera una corda EF in una circonferenza e il punto medio M dell'arco $\overset{\frown}{EF}$ (minore). Da M traccia una corda MA, che interseca EF in D e una corda MB, che interseca EF in C. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza. (Suggerimento. Congiungi A con F, F con M e considera gli angoli $M\hat{A}F$ ed $E\hat{F}M$… . $MFAB$ è inscritto nella circonferenza. Dimostra che $M\hat{F}A \cong C\hat{D}A$.)

Proprietà geometriche e misure

183 Considera i seguenti quadrilateri e indica quale di essi è inscrivibile in una circonferenza.



184 **COMPLETA** in modo che il quadrilatero *ABCD* sia inscrivibile e circoscrivibile.



AB	*BC*	*CD*	*DA*	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$
30 cm	…	17 cm	21 cm	96°	…	…	104°
15 cm	$\frac{4}{3}AB$	…	27 cm	…	108°	…	115°
…	$\frac{5}{6}CD$	$3AD$	38 cm	…	110°	72°	…
…	124 cm	70 cm	$\frac{3}{10}CD$	…	$\frac{2}{3}\hat{D}$	$\frac{1}{3}\hat{A}$	…

9. I poligoni regolari

Teoria a pag. G194

RIFLETTI SULLA TEORIA

185 **VERO O FALSO?**

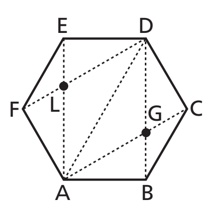
a) Il centro della circonferenza inscritta in un quadrato coincide con il centro della circonferenza circoscritta allo stesso quadrato. V F

b) Il raggio di un quadrato è congruente a metà diagonale. V F

c) L'apotema di un triangolo equilatero è congruente a un terzo di una delle mediane. V F

TEST

186 Nella figura sono disegnati l'esagono regolare *ABCDEF* e le sue diagonali uscenti dai vertici *A* e *D*.



Quale dei seguenti enunciati è *falso*?

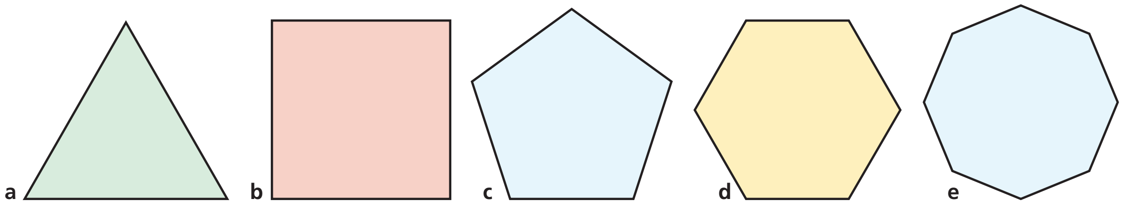
A *AGDL* è un parallelogramma.
B La diagonale *AD* è congruente al diametro della circonferenza circoscritta.
C *AGDL* è un rombo.
D *AGDL* è inscrivibile in una circonferenza.
E *ACDF* è rettangolo.

187 Un punto *P* interno a un pentagono convesso ha la stessa distanza da tutti i vertici. Allora possiamo dire che:

A le mediane dei lati passano per *P*.
B il pentagono è circoscrivibile a una circonferenza.
C il pentagono è inscrivibile in una circonferenza.
D il pentagono è regolare.
E gli assi dei lati passano per *P*.

ESERCIZI

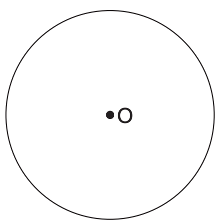
188 **COMPLETA** disegnando, per ogni poligono regolare della figura, il centro, il raggio e l'apotema.



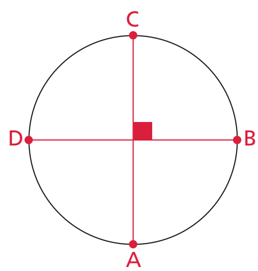
Costruzione di alcuni poligoni regolari

Dimostra la validità delle seguenti costruzioni di poligoni regolari.

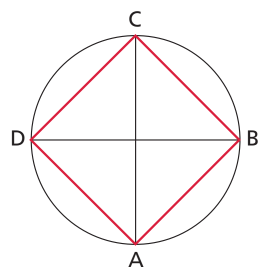
189



a. Disegniamo una circonferenza.

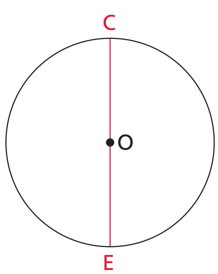


b. Tracciamo due diametri perpendicolari, *AC* e *BD*.

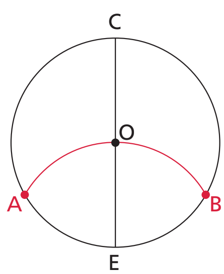


c. Congiungiamo gli estremi dei diametri. La figura *ABCD* è un quadrato.

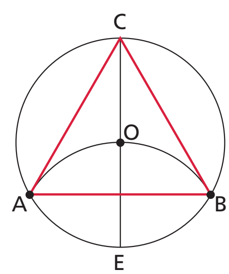
190



a. Disegniamo una circonferenza e un diametro *EC*.

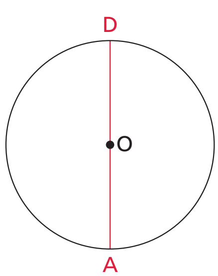


b. Puntando il compasso in *E*, sempre con la stessa apertura *OE*, tracciamo un arco $\overset{\frown}{AB}$.

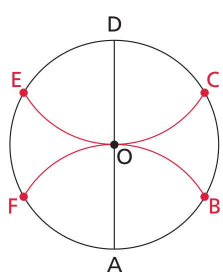


c. Congiungiamo *A* con *B*, *B* con *C* e *C* con *A*. La figura *ABC* è un triangolo equilatero.

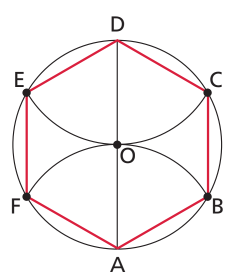
191



a. Disegniamo una circonferenza e un diametro *AD*.



b. Mantenendo la stessa apertura *OA*, puntiamo il compasso in *A* e tracciamo l'arco $\overset{\frown}{FB}$; puntiamo il compasso in *D* e tracciamo l'arco $\overset{\frown}{EC}$.



c. Congiungiamo i punti ottenuti. La figura *ABCDEF* è un esagono regolare.

Applicazioni del teorema del poligono regolare inscritto o circoscritto e del teorema della circonferenza divisa in archi congruenti

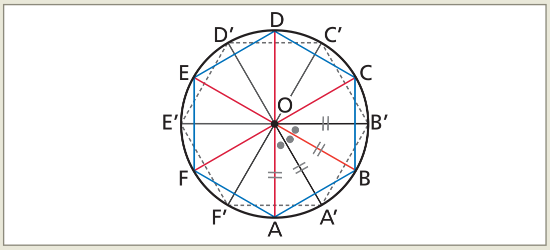
ESERCIZIO GUIDA

192 Disegniamo un esagono regolare, $ABCDEF$, inscritto in una circonferenza. Conduciamo ogni apotema e prolunghiamo fino a incontrare la circonferenza nei punti A', B', C', D', E', F'. Dimostriamo che:
a) l'esagono $A'B'C'D'E'F'$ è congruente all'esagono $ABCDEF$;
b) congiungendo i vertici dei due esagoni si ottengono le corde AA', BB', CC'..., lati di un dodecagono regolare.

Ipotesi 1. $ABCDEF$ è un esagono regolare;
2. OA', OB', OC', OD', OE', OF' raggi ottenuti prolungando gli apotemi.

Tesi 1. $A'B'C'D'E'F' \cong ABCDEF$;
2. $AA'BB'CC'DD'EE'FF'$ è un poligono regolare.

Dimostriamo la tesi 1
Congiungiamo O con i vertici di $ABCDEF$.



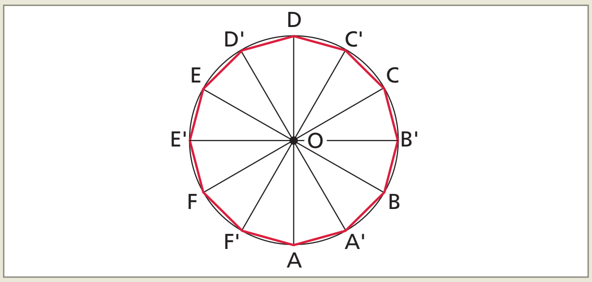
L'esagono $ABCDEF$ è suddiviso dai raggi tracciati in sei triangoli equilateri congruenti di vertice O, *quindi* ogni angolo di vertice O è $\frac{1}{6}$ dell'angolo giro.

Ogni apotema divide l'angolo di vertice O in due parti congruenti.

Consideriamo i triangoli OAB e $OA'B'$. Essi hanno:
- $OA' \cong OA \cong OB' \cong OB$, perché raggi;
- $A'\hat{O}B' \cong A\hat{O}B$, perché somme di angoli congruenti.

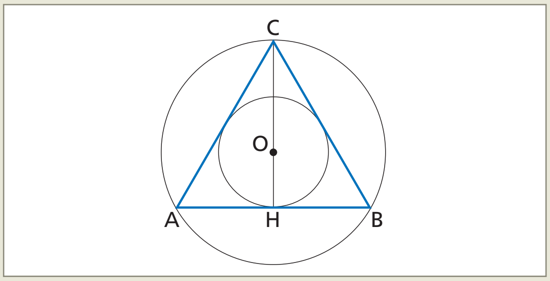
Quindi sono congruenti. In particolare, risulta che $AB \cong A'B'$.
Poiché $ABCDEF$ è regolare, anche $A'B'C'D'E'F'$ è regolare e, avendo i lati rispettivamente congruenti, sono congruenti.

Dimostriamo la tesi 2
Congiungiamo O con i vertici del dodecagono. L'angolo giro di vertice O risulta suddiviso in dodici angoli al centro congruenti, *quindi* anche la circonferenza è suddivisa in dodici archi congruenti, *pertanto* il dodecagono $AA'BB'CC'DD'EE'FF'$ è regolare.



DIMOSTRAZIONE GUIDATA

193 Dimostra che l'apotema di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è metà del suo raggio.



Ipotesi ABC è un triangolo ....

Tesi $OH \cong \frac{1}{2}$ ....

Dimostrazione
- *Prendi in considerazione il punto O.*
  1. Esso è il centro della circonferenza .... e di quella .... al triangolo ...... , perché è equilatero, *quindi* OH è .... del triangolo e OC è il ....
  2. Il punto O è anche il punto di intersezione delle altezze, ... e bisettrici del triangolo ABC.
- *Considera la mediana relativa al lato AB.*
  La mediana ...... è divisa dal punto ...... in due parti, una doppia dell'altra, *quindi* $OC \cong 2$...... , da cui $OH \cong$ ....

194 Dimostra che in un pentagono regolare le due diagonali uscenti da un vertice dividono l'angolo in tre parti congruenti.

195 Dimostra che in un esagono regolare le tre diagonali uscenti da un vertice dividono l'angolo in quattro parti congruenti.

196 Generalizza l'enunciato precedente nel caso di un poligono regolare di n lati.

197 Dati un esagono regolare $ABCDEF$ e la sua diagonale AC, dimostra che AC è perpendicolare ad AF.

198 Disegna un pentagono regolare $ABCDE$, inscritto in una circonferenza. Conduci ogni apotema e prolungalo fino a incontrare la circonferenza nei punti A', B', C', D', E'. Dimostra che:
a) il pentagono $A'B'C'D'E'$ è congruente al pentagono $ABCDE$;
b) congiungendo i vertici dei due pentagoni si ottiene un decagono regolare.

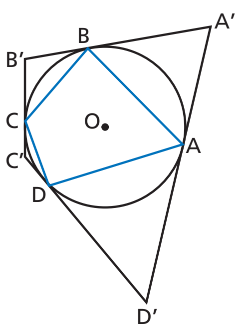
199 Considera un triangolo equilatero e un esagono regolare inscritti in una stessa circonferenza.
Dimostra che il lato del triangolo è doppio dell'apotema dell'esagono.

200 Nell'esagono regolare $ABCDEF$ prolunga da entrambe le parti i lati AB, CD, EF. I prolungamenti determinano un triangolo.
Dimostra che tale triangolo è equilatero e che il lato è triplo di quello dell'esagono.

201 Disegna separatamente un triangolo equilatero, un quadrato e un esagono regolare. Su ognuno dei lati delle tre figure considera il relativo quadrato (esterno al poligono). Per ogni figura congiungi i vertici liberi dei quadrati, ottenendo un esagono, un ottagono e un dodecagono.
Questi tre nuovi poligoni sono tutti regolari?
Dimostra la proprietà che hai ricavato.

RIEPILOGO I POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

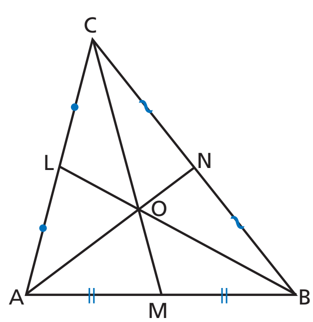
202 TEST Con riferimento alla figura, quale fra queste relazioni è *sbagliata*?



A $OB \cong OA$
B $AA' + CB' \cong BB' + BA'$
C $AB + CD \cong CB + AD$
D $C'D' \cong D'A + CC'$
E $A'D' \cong AA' + DD'$

203 Disegna una circonferenza inscritta in un triangolo equilatero ABC, con punti di tangenza M, N, L. Dimostra che:
a) il triangolo MNL è equilatero;
b) il lato del triangolo inscritto è la metà di quello circoscritto.

204 Enuncia il teorema espresso dalla seguente figura e dalle relative ipotesi e tesi. Se elimini la prima ipotesi e la prima tesi, è ancora valido il teorema? Dimostralo.



Ipotesi
1. $AM \cong MB$;
2. $AL \cong LC$;
3. $CN \cong NB$.

Tesi
1. $CO \cong 2OM$;
2. $OB \cong 2OL$;
3. $AO \cong 2ON$.

205 Nell'esagono regolare $ABCDEF$ congiungi B con F e C con E.
Dimostra che $BCEF$ è un rettangolo.

206 In un esagono regolare congiungi i punti medi di due coppie di lati opposti. Dimostra che tali segmenti sono le diagonali di un rettangolo.

207 Disegna un ottagono regolare. Prolunga da entrambe le parti quattro lati, alternando un lato sì e un lato no. Dimostra che i prolungamenti dei lati individuano un quadrato.

208 In un esagono regolare scegli due vertici opposti. Da questi vertici traccia le due diagonali non passanti per il centro. Dimostra che queste, incontrandosi, determinano un rombo.

209 Disegna un triangolo ABC inscritto in una circonferenza di centro O e il diametro CD, e determina l'ortocentro H. Dimostra che:
a) AH è parallelo a BD;
b) AB e HD si bisecano.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, come sono i punti O e H? Sono ancora vere le tesi?

210 Dato un triangolo equilatero di centro O, traccia gli assi dei segmenti OA, OB, OC, che incontrano i lati del triangolo in sei punti. Dimostra che tali punti sono i vertici di un esagono regolare.

211 Disegna un esagono regolare $ABCDEF$, la diagonale AC e le due diagonali BD e BF.
Dimostra che AC è divisa dalle altre due diagonali in tre parti congruenti.

212 Nel triangolo ABC inscritto in una circonferenza indica con H l'ortocentro. Traccia la corda BE perpendicolare ad AB. Dimostra che $BE \cong CH$.

213 Nel triangolo equilatero ABC, inscritto in una circonferenza, indica con D ed E i punti medi degli archi $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$. Dimostra che la corda ED, incontrando i lati AC e BC, viene suddivisa in tre parti congruenti.

214 Dimostra che se un poligono è sia inscrivibile che circoscrivibile a due circonferenze concentriche, allora è regolare.

215 Considera un pentagono regolare e dimostra che ogni diagonale ne divide un'altra in due parti di cui la maggiore è congruente al lato del pentagono.

216 Un trapezio isoscele è circoscritto a una semicirconferenza. Dimostra che la base maggiore è congruente alla somma dei lati obliqui. Considera anche il caso del trapezio scaleno e del trapezio rettangolo. (Suggerimento. Traccia dagli estremi della base minore le perpendicolari alla maggiore, congiungi i punti di tangenza di un lato con il centro della semicirconferenza e considera i triangoli ottenuti.)

217 Considera una circonferenza e quattro rette a essa tangenti, a due a due parallele. Indica con A, B, C, D i punti di contatto con la circonferenza e con P, Q, R, S i punti intersezione delle rette fra loro. Dimostra che:
a) $PQRS$ è un rombo;
b) $ABCD$ è un rettangolo.

218 Disegna un quadrato $ABCD$ di diagonale AC, congiungi il punto medio M di AB col punto medio N di AD e prolunga MN fino a incontrare in E il prolungamento di CD.
Dimostra che:
a) $AC \perp MN$;
b) $CN \perp AE$;
c) $AMDE$ è un parallelogramma.
(Suggerimento. Indica con P l'intersezione di MN con AC e considera il triangolo EAC, in esso AD ed EP sono…)

219 Disegna un triangolo ABC e le sue altezze AE, BF, CD, che individuano l'ortocentro H. Dimostra che le altezze di ABC sono le bisettrici del triangolo DEF. (Suggerimento. Traccia la circonferenza di diametro HB e confronta gli angoli $H\hat{D}E$ e $H\hat{B}E$. Poi traccia la circonferenza di diametro AH e confronta gli angoli $C\hat{A}E$ e $F\hat{D}C$.)

220 Nel triangolo ABC inscritto in una circonferenza di centro O e diametro AD, a partire dal vertice A, traccia l'altezza AH e la bisettrice AE. Dimostra che $H\hat{A}E \cong E\hat{A}D$. (Suggerimento. Congiungi D con C e considera i triangoli ABH e ADC.)

221 Nel triangolo acutangolo ABC traccia le altezze BH e CK e indica con O l'ortocentro. Dimostra che sono inscrivibili in una circonferenza i quadrilateri:
a) $AKOH$;
b) $BCHK$.

10. La piramide e i solidi di rotazione

Teoria a pag. G196

RIFLETTI SULLA TEORIA

222 VERO O FALSO?

a) Le facce laterali di una piramide retta sono congruenti. V F
b) Se una piramide ha per base un quadrato, allora è regolare. V F
c) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ruota attorno a uno dei cateti si trasforma sempre nell'apotema di un cono. V F
d) Un triangolo isoscele che ruota completamente attorno alla propria base genera due coni con la base in comune. V F
e) Un rettangolo che ruota completamente attorno a una retta parallela alla base, ma esterna al rettangolo, genera due cilindri, uno dentro all'altro. V F

ESERCIZI

223 Dimostra che, in una piramide retta, gli apotemi sono congruenti.

Disegna i solidi generati dalla rotazione dei seguenti poligoni intorno alla retta indicata e descrivi i solidi ottenuti. Se non viene specificato diversamente, considera una rotazione completa (360°).

224 Rotazione di un triangolo rettangolo intorno alla retta:
a) di uno dei cateti;
b) dell'ipotenusa.

225 Rotazione di un triangolo acutangolo intorno alla retta:
a) di uno dei lati;
b) passante per un vertice e parallela al lato opposto.

226 Rotazione di un triangolo isoscele intorno alla retta:
a) della base;
b) dell'altezza relativa alla base (rotazione di 180°).

227 Rotazione di un trapezio isoscele intorno alla retta:
a) della base maggiore;
b) della base minore;
c) di uno dei lati obliqui.

228 Rotazione di un quadrato intorno alla retta:
a) di una diagonale (rotazione di 180°);
b) passante per i punti medi di due lati opposti (rotazione di 180°);
c) passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

229 Rotazione di un rettangolo intorno alla retta:
a) di un lato;
b) parallela a un lato e non intersecante il rettangolo;
c) passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

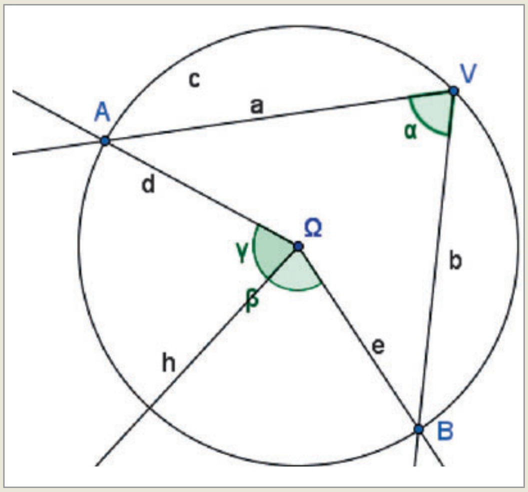
230 Rotazione dell'esagono regolare $ABCDEF$ intorno alla retta:
a) AD (rotazione di 180°);
b) di un lato;
c) passante per D e parallela a EC.

LABORATORIO DI MATEMATICA
La circonferenza con GeoGebra

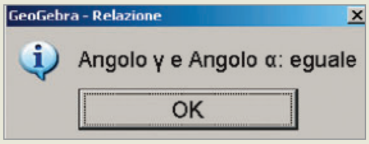
ESERCITAZIONE GUIDATA

Con gli strumenti di GeoGebra verifichiamo il teorema:
Un angolo alla circonferenza è metà del corrispondente angolo al centro.

- Attiviamo GeoGebra, nascondiamo gli assi cartesiani e la finestra algebrica e chiediamo al sistema di mostrare il nome degli oggetti senza il loro valore.
- Costruiamo la figura per verificare il teorema: con *Nuovo punto* inseriamo un punto che chiamiamo Ω e con *Circonferenza di dato centro e di dato raggio* tracciamo la circonferenza c di centro Ω e raggio 4 (figura 1).
- Su di essa con *Nuovo punto* evidenziamo i punti V (vertice dell'angolo alla circonferenza), A e B.
- Con *Semiretta per due punti* tracciamo i lati a e b dell'angolo alla circonferenza e i lati c e d del corrispondente angolo al centro.
- Con *Angolo* evidenziamo l'angolo alla circonferenza α e poi il corrispondente angolo al centro β.
- Con *Bisettrice* ricaviamo le due bisettrici di β, con *Semiretta per due punti* sovrapponiamo la semiretta h alla bisettrice che ci interessa, con *Mostra/nascondi oggetto* nascondiamo l'altra e con *Angolo* evidenziamo l'angolo $d\hat{\Omega}h$, la metà di β, che prende il nome γ.
- Applichiamo *Relazione fra due oggetti* agli angoli α e γ, ricevendo da GeoGebra la risposta di figura 2.
- Spostiamo poi il punto B e applichiamo di nuovo *Relazione fra due oggetti*, ricevendo la medesima risposta.



▲ Figura 1



▲ Figura 2

Nel sito: ► 2 esercitazioni guidate con Cabri ► 25 esercitazioni in più

Esercitazioni

Verifica i seguenti teoremi sulla circonferenza.

1 Se un diametro interseca una corda non passante per il centro nel suo punto medio, allora il diametro è perpendicolare alla corda.

2 Se un diametro è perpendicolare a una corda, allora esso divide a metà la corda, l'angolo al centro corrispondente e l'arco.

3 Le corde aventi la stessa distanza dal centro sono congruenti.

4 Se le due corde AN e NB (con A e B punti distinti) sono congruenti, allora il diametro MN è bisettrice dell'angolo $A\hat{N}B$.

5 Le rette tangenti negli estremi di un diametro sono parallele.

6 La tangente nel punto T della circonferenza è perpendicolare al raggio OT.

7 Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

8 Gli angoli alla circonferenza che insistono su archi (corde) congruenti sono congruenti.

Matematica per il cittadino

VIAGGIO IN TOSCANA

Durante un viaggio in Toscana, scopri di aver dimenticato la cartina stradale. Nel cruscotto rintracci l'ultima pagina di un vecchio atlante geografico, in cui sono riportate le distanze in linea d'aria tra i capoluoghi di provincia toscani (le distanze sono espresse in kilometri).

Arezzo (AR)									
80	Firenze (FI)								
125	140	Grosseto (GR)							
160	100	135	Livorno (LI)						
150	75	160	45	Lucca (LU)					
190	115	200	70	45	Massa C. (MS)				
155	90	150	25	20	50	Pisa (PI)			
120	35	165	80	45	75	60	Pistoia (PT)		
100	25	160	90	60	95	75	20	Prato (PO)	
60	65	80	110	110	155	110	95	85	Siena (SI)

1. Utilizzando la tabella, stabilisci quanto è lungo in linea d'aria il percorso che, partendo e tornando a Firenze, tocca le città di Lucca, Massa Carrara, Livorno (indica il percorso in questo modo: FI-LU-MS-LI-FI).

A 330 km B 430 km C 190 km D 290 km

2. Vuoi visitare tutte e dieci le città toscane compiendo un percorso che, partendo e tornando a Siena, passi una e una sola volta per ciascuna di esse.
Quale tra i seguenti itinerari è il più breve, considerando le distanze stradali approssimativamente coincidenti con quelle della tabella?

A SI-GR-LI-AR-FI-PO-PT-LU-MS-PI-SI
B SI-LI-PI-LU-MS-PT-PO-FI-AR-GR-SI
C SI-PI-LU-MS-PT-PO-FI-AR-GR-LI-SI
D SI-GR-LI-MS-PI-LU-PT-PO-FI-AR-SI

Sapresti suggerirne un altro ancora più breve?

3. Immagina di scambiare l'ordine di due città nella tabella delle distanze relative. Per ognuna delle seguenti affermazioni, indica se è vera o falsa.

a) Si devono modificare solamente le caselle delle righe relative alle due città scambiate, mentre le altre righe restano immutate. V F
b) Il numero di caselle che si devono modificare dipende da quali città vengono scambiate. V F
c) Qualunque coppia si scambi, le caselle da modificare sono 18. V F
d) Indipendentemente da quali città si scambiano, le caselle da modificare sono al più 16. V F

4. Sulla cartina della Toscana qui riportata, immagina di disegnare in scala una circonferenza che ha centro in Siena e raggio 90 km.
Quali città appartengono al cerchio?
Se tracci la stessa circonferenza con centro in Pisa, quali località si trovano nell'intersezione tra i due cerchi?

5. Sommando le distanze contenute nelle caselle della riga e della colonna relative a una data città, si ottengono valori diversi; per esempio, per Lucca 710 km, per Grosseto 1315 km. Quale interpretazione geometrica di questo dato ti sembra più corretta?

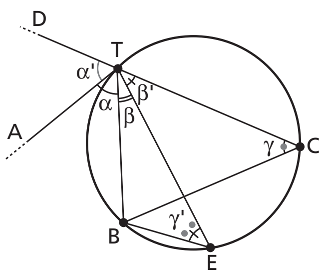
A Più il valore è grande, più la città ha poche città vicine, quindi è più vicina al mare.
B Il valore relativo a Firenze è il più piccolo perché è il capoluogo di regione.
C Più il valore è piccolo, minore è la distanza media di quella città da tutte le altre, cioè tale città è più «centrale» rispetto alla disposizione complessiva.
D Il valore per ogni città non ha alcun significato particolare.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Osserva la figura. La semiretta TA è tangente in T alla circonferenza.



Una delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

A α e γ insistono sullo stesso arco.

B α e β sono angoli alla circonferenza.

C α' e β' sono angoli alla circonferenza.

D α e γ' insistono sullo stesso arco.

E γ e γ' sono congruenti.

2 Due corde hanno uguale distanza dal centro di una circonferenza. Allora sono:

A perpendicolari.

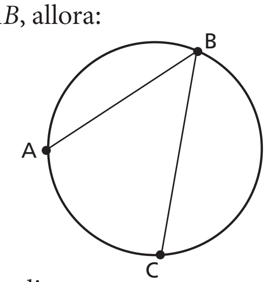
B parallele.

C incidenti.

D congruenti.

E consecutive.

3 Nella figura sono disegnate due corde AB e BC. Se $BC > AB$, allora:



A BC è un diametro.

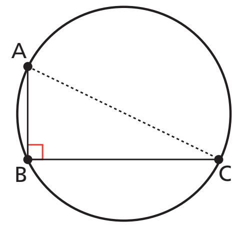
B AB e BC hanno uguale distanza dal centro.

C gli assi delle due corde si incontrano in un punto diverso dal centro.

D la distanza di BC dal centro è maggiore di quella di AB.

E la distanza di AB dal centro è maggiore di quella di BC.

4 Osserva la figura. Le corde AB e BC sono perpendicolari.



Uno dei seguenti enunciati è *vero*. Quale?

A AC è un diametro.

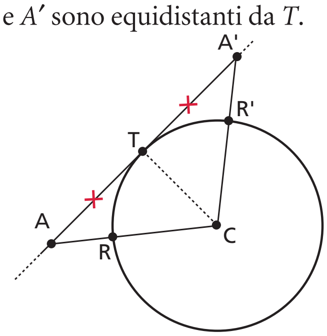
B AC è un diametro solo se $AB \cong BC$.

C Il centro della circonferenza è interno al triangolo ABC.

D Il centro della circonferenza è esterno al triangolo ABC.

E Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

5 Osserva la figura. La retta è tangente in T alla circonferenza. I punti A e A' sono equidistanti da T.



Quale fra le seguenti proposizioni è *falsa*?

A $AC \cong A'C$.

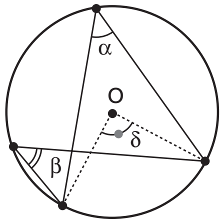
B ACA' è un triangolo rettangolo.

C $ATC \cong A'TC$.

D TC è bisettrice di $A\hat{C}A'$.

E $AR \cong A'R'$.

6 Osserva la figura e indica quale delle seguenti relazioni è *falsa*.



- A $\beta < \alpha$
- B $\alpha \cong \frac{1}{2}\delta$
- C $\delta \cong 2\beta$
- D $\beta \cong \delta - \alpha$
- E $\alpha + \beta \cong \delta$

7 Solo una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

- A In ogni punto di una circonferenza esistono due rette a essa tangenti.
- B Per un punto interno a una circonferenza passano due rette tangenti.
- C Le tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno hanno distanza dal centro maggiore del raggio.
- D Le tangenti a una circonferenza condotte da un punto interno hanno distanza dal centro minore del raggio.
- E Per un punto esterno a una circonferenza passano due rette tangenti.

8 Un parallelogramma è inscrivibile in una circonferenza se:

- A due angoli consecutivi sono congruenti.
- B due lati consecutivi sono congruenti.
- C le diagonali si dividono scambievolmente a metà.
- D le diagonali sono bisettrici degli angoli.
- E le diagonali sono perpendicolari.

9 Un quadrilatero convesso è circoscrivibile a una circonferenza se:

- A una diagonale è doppia dell'altra.
- B la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.
- C le diagonali si dividono scambievolmente a metà.
- D le mediane passano per lo stesso punto.
- E le altezze sono tutte interne al quadrilatero.

10 Un trapezio isoscele è circoscrivibile a una circonferenza se:

- A il lato obliquo è congruente alla semisomma delle basi.
- B le diagonali sono congruenti.
- C le diagonali sono perpendicolari.
- D il lato obliquo è congruente alla base minore.
- E gli angoli opposti sono supplementari.

11 Una delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

- A In un triangolo isoscele baricentro e ortocentro non appartengono alla stessa retta.
- B In un triangolo isoscele il circocentro e l'ortocentro sono interni al triangolo.
- C In un triangolo rettangolo l'ortocentro è il vertice dell'angolo retto e il circocentro è esterno.
- D In un triangolo equilatero baricentro e incentro non appartengono alla stessa retta.
- E In un triangolo equilatero incentro e circocentro coincidono.

12 L'altezza di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è congruente:

- A alla metà del raggio.
- B al doppio del raggio.
- C alla metà del diametro.
- D ai $\frac{3}{4}$ del diametro.
- E al diametro.

13 Se in un triangolo circocentro e incentro coincidono, allora esso è:

- A equilatero.
- B isoscele.
- C ottusangolo e isoscele.
- D rettangolo e scaleno.
- E rettangolo e isoscele.

SPIEGA PERCHÉ

14 Un angolo alla circonferenza può essere maggiore di un angolo piatto? Motiva la risposta.

15 Dati i punti A e B, rappresenta il luogo dei centri delle circonferenze passanti per i due punti dati. Come sono fra loro la retta AB e il luogo trovato? Perché?

16 Quando due circonferenze si dicono tangenti? In due circonferenze tangenti la distanza fra i centri può essere minore della somma dei raggi delle due circonferenze? Perché?

17 Il segmento che unisce i centri di due circonferenze tangenti esternamente può formare un triangolo con due raggi qualsiasi delle due circonferenze? E se le circonferenze sono tangenti internamente? Giustifica le tue risposte.

18 Disegna due circonferenze con i raggi congruenti e tali che il centro della seconda appartenga alla prima. Detti A e B i punti di intersezione delle due circonferenze, e rispettivamente O e O' i centri delle due circonferenze, di che natura è il quadrilatero $AOBO'$? Perché?

19 Perché gli angoli alla circonferenza che insistono su corde aventi stessa distanza dal centro sono congruenti? Come deve essere una corda AB affinché l'angolo acuto che insiste sul minore degli archi AB sia un sesto di $\widehat{P}$?

20 Data una corda MN nella circonferenza di centro O, quale relazione sussiste fra l'angolo al centro $M\widehat{O}N$ e l'angolo ottuso alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{MN}$?

21 Un trapezio isoscele inscritto in una circonferenza è sempre inscrivibile anche in una semicirconferenza?

22 Unendo, uno sì e uno no, i vertici di un decagono regolare ottieni un altro poligono regolare inscritto nella stessa circonferenza? Quale? Perché?

23 Data una circonferenza, quale poligono regolare individuano gli estremi di due diametri perpendicolari e i punti di incontro con la circonferenza delle bisettrici degli angoli che i due diametri formano? Tale poligono è circoscrivibile a una circonferenza? Come puoi disegnare tale circonferenza?

24 Unendo i vertici di un poligono regolare con il centro della circonferenza inscritta o circoscritta a esso, ottieni sempre dei triangoli isosceli. Perché? Quanti sono?

25 Congiungendo gli estremi di due diametri qualsiasi, presi su una circonferenza, ottieni sempre un rettangolo. Perché? È corretto affermare che, poiché i diametri sono tutti congruenti, allora i rettangoli inscritti in una circonferenza sono tutti congruenti? Perché?

26 Disegna una circonferenza di centro O e diametro AB e prolunga AB da entrambe le parti di due segmenti AE e BF congruenti al diametro. Dai punti E e F traccia le rette tangenti alla circonferenza. Che quadrilatero formano le tangenti? Che quadrilatero formano i punti di contatto delle suddette tangenti?

27 Date due rette, descrivi come puoi disegnare una circonferenza tangente a entrambe. E se le rette sono tre, puoi sempre disegnare una circonferenza tangente a tutte e tre? Motiva la risposta.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

28 Determina il luogo dei punti equidistanti da tre punti fissi A, B e C.

29 In una circonferenza disegna due archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ fra loro congruenti. Dimostra che le corde AD e BC sono congruenti.

30 Disegna una corda AB di una circonferenza e indica con M il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$. Dimostra che la parallela ad AB condotta per M è tangente alla circonferenza.

31 Sono date una circonferenza di centro O e diametro AB e la retta r tangente alla circonferenza nel punto B. Scegli sulla circonferenza un punto C qualunque e traccia la retta s tangente alla circonferenza in C. Indica con P il punto di intersezione delle tangenti r e s. Dimostra che PO è parallelo ad AC.
▶ *Caso particolare*: se C è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$, di che natura è il quadrilatero $POAC$?

32 Disegna una circonferenza e un punto P esterno a essa. Da P conduci le due rette tangenti alla circonferenza, indicando con A e B i punti di contatto. Sull'arco maggiore $\overset{\frown}{AB}$ scegli un punto qualunque C e congiungi tale punto con A e con B. Dimostra che la somma degli angoli $P\hat{A}C$ e $P\hat{B}C$ è costante al variare di C su $\overset{\frown}{AB}$.

33 Traccia una retta r, un suo punto P e un punto A non appartenente a essa. Congiungi A con P e indica con H il punto medio del segmento AP. Costruisci l'asse s del segmento AP, che interseca la retta r nel punto M. Sulla retta s determina il punto M', tale che sia $MH \cong M'H$. Qual è il luogo dei punti M' al variare di P su r?

34 Dimostra che l'altezza di un triangolo equilatero è congruente ai tre quarti del diametro della circonferenza a esso circoscritta.

35 Disegna una circonferenza e due suoi diametri AB e CD. Dall'estremo A traccia la perpendicolare al diametro CD, che interseca la circonferenza nel punto E. Dimostra che la corda BE è parallela al diametro CD.

36 Dimostra che se il circocentro di un triangolo appartiene a un lato, allora l'angolo opposto a questo lato è retto.

37 In una circonferenza disegna una corda AB. Traccia poi le corde AD e BC congruenti fra loro, nello stesso semipiano rispetto ad AB. Dimostra che $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$.

38 Disegna un triangolo equilatero ABC e poi, esternamente a esso, i triangoli equilateri ABE, BCF e ACD, i cui baricentri sono, rispettivamente, P, Q e R. Dimostra che l'esagono $APBQCR$ è regolare e che il triangolo PQR è congruente al triangolo ABC.

39 Nel triangolo ABC rettangolo in A indica con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, con M e N i punti medi dei due cateti. Dimostra che i punti A, M, H, N giacciono su una stessa circonferenza.

40 In un triangolo equilatero ABC costruisci il baricentro G. Disegna l'asse del segmento AG e l'asse di BG. Dimostra che il lato AB è diviso dai due assi in tre parti congruenti.

41 Dimostra che l'incentro di un triangolo ABC coincide con l'ortocentro del triangolo formato dalle bisettrici degli angoli esterni di ABC.

42 Dimostra che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei diametri della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo.

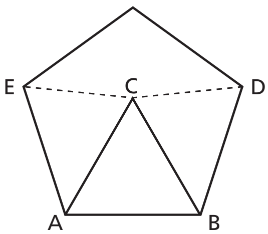
METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

TEST

43 Nel pentagono regolare in figura, il triangolo ABC è equilatero. Quanto vale l'angolo convesso $E\hat{C}D$?

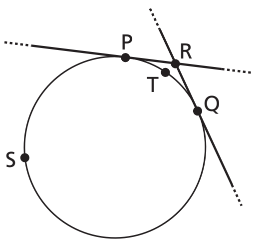
A 120°
B 144°
C 150°
D 168°
E 170°



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 1996)

44 PR e QR sono tangenti al cerchio in figura. Sapendo che l'arco PSQ è quattro volte l'arco PTQ, allora l'angolo $P\hat{R}Q$ è:

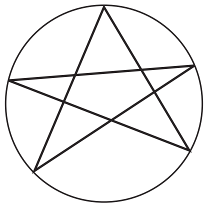
A 72°
B 90°
C 105°
D 108°
E 120°



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 1997)

45 Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?

A 100°
B 150°
C 180°
D 200°
E I dati a disposizione sono insufficienti.



(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2003)

46 In un triangolo, per ogni coppia di lati consecutivi, i due assi dei lati e la bisettrice dell'angolo formato dai due lati si incontrano in uno stesso punto.
Possiamo affermare che:

A non esiste un triangolo con questa proprietà.
B il triangolo è equilatero.
C il triangolo ha un angolo di 30°.
D il triangolo è rettangolo.
E il triangolo ha un angolo di 45°.

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2005)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

47 TEST Consider a quadrilateral whose vertices, A, B, C, and D, are on a circle. Let x, y, and z be the truth values of the following three statements. What is the value of the ordered triple (x, y, z)?

x: For quadrilateral $ABCD$, $A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180°$.
y: The perimeter of quadrilateral $ABCD$ is greater than twice the diameter of the circle.
z: The perpendicular bisector of any side will pass through the circle's center.

A (F, F, T)
B (F, T, T)
C (T, T, T)
D (F, F, F)
E (T, F, T)

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

48 Two circles C_1 and C_2 have a common chord GH. Point Q is chosen on C_1 so that it is outside C_2. Lines QG and QH are extended to cut C_2 at V and W, respectively. Show that, no matter where Q is chosen, the length of VW is constant.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 2003)

49 TEST A regular polygon has each interior angle half as large as each exterior angle. How many sides does the polygon have?

A 3
B 4
C 5
D 6
E None of these answers.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

GLOSSARY

chord: corda	**extended**: prolungato	**statement**: enunciato, frase
circle: circonferenza, talvolta cerchio	**perpendicular bisector**: asse	**triple**: terna
to cut-cut-cut: tagliare, intersecare	**side**: lato	**twice**: doppio