1 | Rotationskörper mit Geogebra

Um mit Geogebra-Rotationskörper(revolution of solid) zu zeichnen hier einige Punkte, die man wissen sollte. Wenn die Sachverhalte bekannt sind - einfach überspringen!

1. Wie lautet der Funktionsterm einer Funktion g deren Graph gegenüber einer Funktion f um a nach rechts und b nach oben verschoben ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ g(x') \end{pmatrix}$$

   aus der 2.-ten Komponente folgt

   $g(x') = f(x) + b$ - daraus folgt mit der 1. Komponente $\Rightarrow g(x') = f(x' - a) + b$

   und da x' nur eine „dummy-Variable“ darstellt, können wir schreiben

$$\boxed{g(x) = f(x - a) + b}$$

2. Lineare (reelle) Funktionen f haben die Eigenschaft

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$
$$f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad a, b \in D_f \tag{1.2}$$

   Leicht kann man zeigen, dass $f(x) = k\,x$ diese Eigenschaften besitzt.

3. Obige Definition lässt sich erweitern:
   Sei A eine $n \times n$ Matrix mit den Elementen $a_{ik} \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} \vec{f} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\longmapsto A\vec{x} := \sum_k a_{ik} x_k \end{aligned} \tag{1.3}$$

   eine lineare Funktion. Durch Einsetzen lassen sich Eigenschaft (1) ind (2) leicht beweisen. Beachten Sie, dass sich die Matrixmultiplikation auch deuten lässt als Linearkombination der Matrixspaltenvektoren:

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad \text{oder} \qquad \vec{y} = \sum_k \vec{a}_k x_k$$

   wobei $\vec{a}_k$ der k-te Spaltenvektor der Matrix A ist!

4. Umgekehrt gilt auch: Ist eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ linear, dann ist sie durch eine Matrixmultiplikation darstellbar:

   $$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\sum_k \vec{e}_k x_k) = \sum_k \vec{f}(e_k)x_k = A\vec{x} \qquad \text{siehe oben!}$$

   Die Matrix A hat als Spaltenvektoren die Werte der Standardeinheitsvektoren $\vec{e}_i = (0,\ldots,\underbrace{1}_{i-te\ Pos.},0,\ldots)$

5. Die Rotation um eine Achse ist eine lineare Abbildung $\Rightarrow$ ist als Multiplikation mit einer (3×3)-Matrix darstellbar!

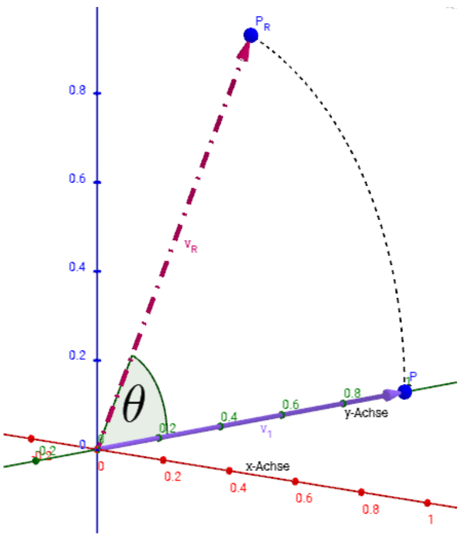
   Wie man sich mit Geogebra3d leicht veranschaulicht, gilt sowohl

   $$R(\vec{a} + \vec{b}) = R(\vec{a}) + R(\vec{b})) \qquad \text{als auch} \qquad R(\lambda\,\vec{a}) = \lambda R(\vec{a})$$

6. Um eine Rotationsmatrix um die x-Achse $R_x = r_{ij}$ festzulegen, reicht es nach obigen Überlegungen diese Abbildung f (wir lassen wegen der Kürze das Vektorzeichen bei f weg) bei den Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ zu kennen.

   $$f(\vec{e}_1) = (1,0,0) \quad \longleftarrow \quad \text{1. Spaltenvektor von } R_x$$

   Dieser Vektor gehört zu den Invarianten, da er auf der Rotationsachse liegt (Fixpunkt)



Mit nebenstehender Abbildung ergibt sich $f(\vec{e}_2)$:

$f(\vec{e}_2) = (0, \cos\theta, \sin\theta) \leftarrow$ 2. Spaltenvektor von R_x

Es sei dem Leser als Übung überlassen , dass gilt

$f(\vec{e}_3) = (0, -\sin\theta, \cos\theta) \leftarrow$ 3. Spaltenvektor von R_x

Damit ergibt sich R_x und analog R_y zu

$$\boxed{R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

7. So jetzt haben wir unser Ziel "einen Rotionskörper in Geogebra" zu zeichnen fast erreicht: Wir brauchen jetzt nur mehr den Graphen einer Funktion g um die x- bzw. y-Achse zu rotieren:

$$R_x \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Graph von } g} = \begin{pmatrix} t \\ \cos\theta\ g(t) \\ \sin\theta\ g(t) \end{pmatrix} = S_x \text{ wobei } t \in [a,b],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Dies ist also die Parameterdarstellung der Oberfläche (engl. *surface*) eines Rotationskörpers (Rotationsachse ist x-Achse). Analog ergibt sich für die y-Achse

$$R_y \begin{pmatrix} t \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\ \cos\theta \\ g(t) \\ -t\ \sin\theta \end{pmatrix} = S_y \text{ wobei } t \in [a,b],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

8. **Beispiel in Geogebra:** Wir verschieben einen Kreis mit Radius 2 um 4 Einheiten in Richtung positiver x-Achse und lassen ihn sowohl um die x-Achse (es entsteht eine Kugel) als auch um die y-Achse (es entsteht ein Torus) rotieren:

pos./neg. Halbkreis im Ursprung: $\quad {}_1g_2(x) = \pm\sqrt{2^2 - x^2}$

Verschiebung: $\quad {}_1k_2(x) = {}_1g_2(x-4) = \pm\sqrt{4 - (x-4)^2}$

(a) Wir definieren den Funktionsbereich $D_g = [a,b] = [2,6]$ in Geogebra(Eingabezeile) und die Funktionen g_i:

```
a=2
b=6
g_1(x)=Funktion[+sqrt(4-(x-4)^2), a, b]
g_2(x)=Funktion[-sqrt(4-(x-4)^2), a, b]
```

(b) Jetzt auf 3D-Ansicht wechseln und den Oberflächenbefehl verwenden (bei S_x nachschauen):

```
S_x=Oberfläche[t, cos(θ)*g_1(t), sin(θ)*g_1(t), t, a, b, θ, 0, 2*pi]
```

(c) Damit wir diesen "umständlichen" Befehl nicht immer eingeben müssen, basteln wir uns einen Makro (in Geogebra "Werkzeug" genannt):

- In Menüzeile *Werkzeuge → Neues Werkzeug erstellen*
- Reiter *Eingabe Objekte*: Im darunterliegender Eingabezeile (*Objekte in der Konstruktion*) nacheinander g_1, a und b wählen anschl. *Weiter* klicken.

- Jetzt den Namen des Makros eingeben: `rot_x` ,
  den Hilfetext z.B.: *Rotationkörper um die xAchse*
- Ausgabeobjekt wählen: `S_x`
  und *Fertigstellen* → dies wird hoffentlich mit einer Erfolgsmeldung abgeschlossen!
- In Menüzeile *Werkzeuge* → *Werkzeuge verwalten* kann man dieses Makro als **.ggt*-Datei (Geogebra Tool) abspeichern. Wenn man das Werkzeug braucht, dann wie eine "normale Geogebra-Datei" (*.ggb) öffnen - **nicht** in *Werkzeuge verwalten* **Öffnen** wählen!

So jetzt können wir das neue Werkzeug gleich ausprobieren:
Wir erzeugen einen Grammophontrichter mit

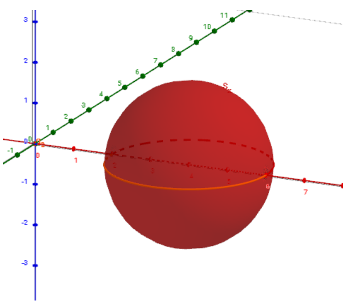
```
rot_x[0.1*x^2,1,5]
```

in der Eingabezeile - und schon wird der Rotationskörper angezeigt.

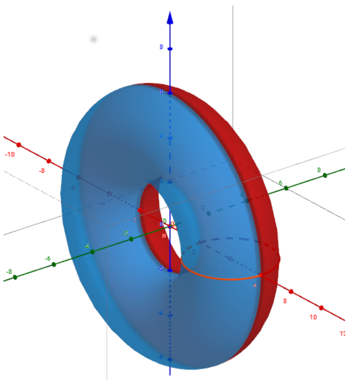
So jetzt noch der Torus - also g_1 und g_2 um die y-Achse rotieren:

```
S_y1=Oberfläche[t*cos(θ),g_1(t), -t*sin(θ), t, a, b, θ, 0, 2*pi]
S_y2=Oberfläche[t*cos(θ),g_2(t), -t*sin(θ), t, a, b, θ, 0, 2*pi]
```

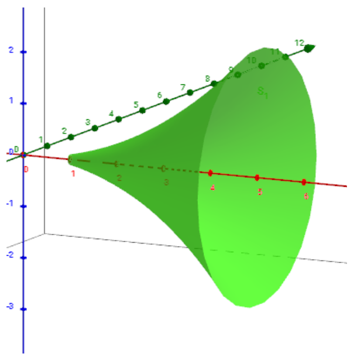
Natürlich kann man sich auch wieder ein Werkzeug `rot_y` nach obigem Muster erstellen!



Kugel



Torus



Trichter