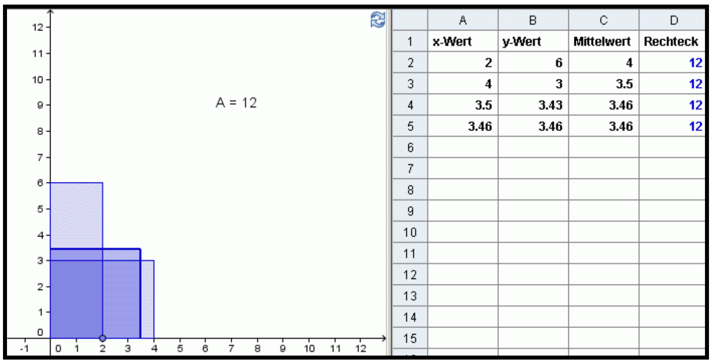
Iterationen

Das Heron’sche Wurzelziehen

Das Heron-Verfahren oder babylonische Wurzelziehen geht zurück auf Heron von Alexandria (vermutlich 1. Jh). Es ist ein Rechenverfahren zur Berechnung einer Näherung der Quadratwurzel x einer Zahl A.
Das Heron-Verfahren ist ein Spezialfall des Newton-Verfahrens für die Nullstelle der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - a$.

<u>Aufgabenstellung</u>
Gesucht ist die Seitenlänge a eines Quadrats, dessen Flächeninhalt A gegeben ist.
Die Fragestellung ist äquivalent zur (näherungsweisen) Bestimmung der $\sqrt{A}$.

<u>Vorgangsweise</u> (am Beispiel für A = 12)



	A	B	C	D
1	x-Wert	y-Wert	Mittelwert	Rechteck
2	2	6	4	12
3	4	3	3.5	12
4	3.5	3.43	3.46	12
5	3.46	3.46	3.46	12

Man wählt die Länge des 1. Rechtecks mit Flächeninhalt A = 12 beliebig, z. B. Seitenlänge 2

	Länge des Rechtecks	**Breite des Rechtecks**
A = 12, $b_1 = 6$, $a_1 = 2$	**Startwert** $a_1 = 2$ $a_1 = 2$ Seite zu kurz	$\Rightarrow \quad b_1 = \frac{12}{2} = \frac{12}{a_1} = 6$ Seite zu lang
A = 12, $b_2 = 3$, $a_2 = 4$	Mittelwert der beiden Werten a_1, b_1 $a_2 = \frac{1}{2}\cdot(2+6) = 4$ Das Rechteck wird einem Quadrat ähnlicher.	$\Rightarrow \quad b_2 = \frac{12}{4} = \frac{12}{a_2} = 3$
	Mittelwert der beiden Werten a_2, b_2 $a_3 = ½\cdot(4 + 3) = 3,5$ $a_3 = \frac{1}{2}\cdot(a_2 + \frac{A}{a_2})$ …	$\Rightarrow \quad b_3 = \frac{12}{3,5} = \frac{12}{a_3} \approx 3,43$ $b_3 = \frac{12}{a_3}$ …
allgemein:	$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot(a_n + \frac{A}{a_n})}$ **Iterationsformel**	**Heron’sches Wurzelziehen (Babylonsches Wurzelziehen)**

Definition
Unter einer **Iteration** versteht man eine Methode, sich der exakten Lösung eines Rechenproblems schrittweise anzunähern.
Sie besteht in der wiederholten Anwendung desselben Rechenverfahrens, wobei das Ergebnis aus dem vorangegangenen Berechnungsschritt immer wieder in die Iterationsformel eingesetzt wird.

Beispiele für Iterationen
Heron'sches Wurzelziehen, Regula falsi (Sekantennäherungsverfahren), Newton'sches Näherungsverfahren (Anwendung der Differentialrechnung), …

Beispiel
Berechne $\sqrt{45}$ auf 3 Stellen genau.

Lösung

Variante 1:
Startwert 5
$a_1 = 5$

$$a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(5 + \frac{45}{5}\right) = 7$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_2 + \frac{A}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(7 + \frac{45}{7}\right) \approx \mathbf{6.}7142857143$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\cdot\left(6{,}71428... + \frac{45}{6{,}71428...}\right) \approx \mathbf{6{,}7}082066869$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\cdot\left(6{,}70820... + \frac{45}{6{,}70820...}\right) \approx \mathbf{6{,}708}2039325$$

$$a_6 = \;...\; \approx \mathbf{6{,}7082039}325$$

…

Variante 2:
Startwert 6
$a_1 = \mathbf{6}$

$$a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(6 + \frac{45}{6}\right) = \mathbf{6{,}7}5$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_2 + \frac{A}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(6{,}75 + \frac{45}{6{,}75}\right) \approx \mathbf{6{,}708}3333333$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(6{,}7083... + \frac{45}{6{,}7083...}\right) \approx \mathbf{6{,}7082039}337$$

…

Auf 3 Stellen genau bedeutet, dass sich die 4. Stelle nicht mehr ändern darf.
Anschließend muss gerundet werden
Ergebnis: $\sqrt{45} \approx 6{,}708$

Beachte:
- Je näher der Startwert am tatsächlichen Wert liegt, desto schneller konvergiert das Verfahren. In diesem Fall nähert sich die Variante 2 der gesuchten Lösung schneller.
- Ein Rechenfehler innerhalb der Iteration bedeutet nur einen neuen Startwert; das Verfahren liefert trotz Rechenfehlers das richtige Ergebnis!

Konvergenz des Verfahrens
Es bleibt noch zu zeigen, dass das Heron'sche Wurzelziehen tatsächlich gegen die $\sqrt{A}$ konvergiert.

Zunächst zeigen wir: $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 1:\quad a_n > \sqrt{A}$, d. h. $\sqrt{A}$ ist eine untere Schranke.

Der Startwert kann kleiner sein als die gesuchte $\sqrt{A}$, aber ab a_2 sind alle Folgenglieder größer als $\sqrt{A}$ (siehe Übungen, Applet zu Heron'schem Wurzelziehen), weil

$$a_n^2 - A = \frac{1}{4} \cdot \left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}} \right)^2 - A = \frac{1}{4} \cdot \left(a_{n-1}^2 + 2 \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot \frac{A}{\cancel{a_{n-1}}} + \left(\frac{A}{a_{n-1}} \right)^2 \right) - \frac{4A}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(a_{n-1}^2 - 2 \cdot A + \left(\frac{A}{a_{n-1}} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(a_{n-1} - \frac{A}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0$$

$a_n^2 \geq A$ (Gleichheit nur, wenn Startwert bereits genau $\sqrt{A}$ ist)

$a_n > \sqrt{A}$ ▪

Jetzt zeigen wir: $\langle a_n \rangle$ ist streng monoton fallend

$a_{n+1} < a_n$

$$\frac{1}{2} \cdot (a_n + \frac{A}{a_n}) < a_n \qquad | \cdot 2$$

$$a_n + \frac{A}{a_n} < 2 \cdot a_n \qquad | \cdot a_n$$

$$a_n^2 + A < 2 \cdot a_n^2$$

$$A < a_n^2$$

$a_n > \sqrt{A}$ (wahre Aussage laut obiger Überlegung) ▪

Weil die Folge $\langle a_n \rangle$ (ab dem 2. Folgenglied) streng monoton fallend und durch $\sqrt{A}$ nach unten beschränkt ist (falls der Startwert kleiner als $\sqrt{A}$ ist, ist 0 eine untere Schranke), besitzt sie einen Grenzwert a.

Welchen Wert hat der Grenzwert a? $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a = ?$

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2} \cdot (a_n & + & \frac{A}{a_n}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & = & \frac{1}{2} \cdot (a & + & \frac{A}{a}) \end{array}$$

a ist ein Fixpunkt der Iteration.

$$2a = a + \frac{A}{a} \qquad | \cdot a$$

$$2a^2 = a^2 + A$$

$$a = \sqrt{A}$$

Damit ist gezeigt, dass das Heron'sche Wurzelziehen gegen $\sqrt{A}$ konvergiert.

Die Folge $b_n = \frac{A}{a_n}$ ist übrigens (ab dem 2. Folgenglied) als Kehrwert einer streng monoton fallenden Folge selbst streng monoton steigend und konvergiert ebenfalls gegen $\sqrt{A}$. ▪

Konvergenzgeschwindigkeit

Wie man aus der Tabelle im Beispiel sieht, nimmt die Anzahl der gültigen Dezimalstellen (fett gedruckt) von einem Schritt auf den nächsten auf das Doppelte zu.

Diese quadratische Konvergenz lässt sich folgendermaßen zeigen:

Es sei $\left| a_n - \sqrt{A} \right| < \varepsilon$.

Dann ist

$$\left|a_{n+1}-\sqrt{A}\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right)-\sqrt{A}\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n^{\;2}-2\sqrt{A}\cdot a_n+A}{a_n}\right| = \frac{1}{2a_n}\cdot\left|a_n-\sqrt{A}\right|^2 < \frac{1}{2a_n}\cdot\varepsilon^2$$

Falls die Differenz eines Folgenglieds zum gesuchten Wert in einem Schritt den Wert $\varepsilon = 10^{-2}$ hat, so ist die Abweichung im nächsten Schritt kleiner als $\frac{1}{2a_n}\cdot\left(10^{-2}\right)^2 < 10^{-4}$ (für $a_n > 1$)

Die Folge $<a_n>$ konvergiert demnach sehr rasch gegen den gesuchten Grenzwert.