Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Erster Teil (veranschaulicht durch das GeoGebra-Applet)

Die Ableitung einer Flächenfunktion $A(x)=\int_a^x f(x)dx$, die aus der Fläche unter einer Kurve $f(x)$ besteht, ist wieder die Funktion $f(x)$.

Zweiter Teil

Will man eine Fläche unter $\int_a^b f(x)dx$ einer Kurve berechnen, so kann man sich den ersten Teil des Hauptsatzes zur Hilfe nehmen. Aus diesem wird klar, dass $A(x)=\int_a^x f(x)dx$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Zusätzlich muss man eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ erraten, deren Funktionsgleichung man als Term aufschreiben kann.

Da $A(x)$ und $F(x)$ beide dieselbe Ableitung haben, können sie sich nur um eine Konstante unterscheiden[1]:

$$A(x)=F(x)+C\,. \tag{1}$$

Die Konstante C kann man einfach ausrechnen, indem man $x=a$ in Gleichung (1) einsetzt und berücksichtigt, dass $A(a)=0$ ist:

$$\begin{aligned} A(a) &= F(a)+C \\ 0 &= F(a)+C \\ C &= -F(a) \end{aligned} \tag{2}$$

Mit dem Wissen der Konstanten kann man jetzt die Fläche berechnen:

$$\int_a^b f(x)dx=A(b)\overset{(1)}{=}F(b)+C\overset{(2)}{=}F(b)-F(a)\,.$$

(An den Stellen mit (1), (2) wurden die entsprechenden Gleichungen genutzt.)

Die Formel $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ist sehr praktisch zur Berechnung von Flächen.

Beispiel:

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$, gesucht ist die Fläche unter der Kurve von $x=1$ bis $x=10$.

Eine Stammfunktion von f kann man mit Hilfe der Konstanten-Regel und der Potenz-Regel des Differenzierens erraten, $F(x)=\frac{1}{6}x^3$.

$\rightarrow \int_1^{10} f(x)dx=F(10)-F(1)=\frac{1}{6}\cdot 10^3-\frac{1}{6}\cdot 1^3=\frac{999}{6}=\frac{333}{2}=166{,}5$.

---

1 Das sieht man genauer, wenn man betrachtet, dass die Ableitung der Differenzfunktion $A(x)-F(x)$ Null ergibt. Die einzige Funktion, deren Ableitung Null ist, ist eine konstante Funktion.