

## Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, GTR

Denken Sie stets an eine sorgfältige Dokumentation des Lösungswegs („Ansätze bringen Punkte!“)

### Aufgabe 5: Medikament (50 Punkte)

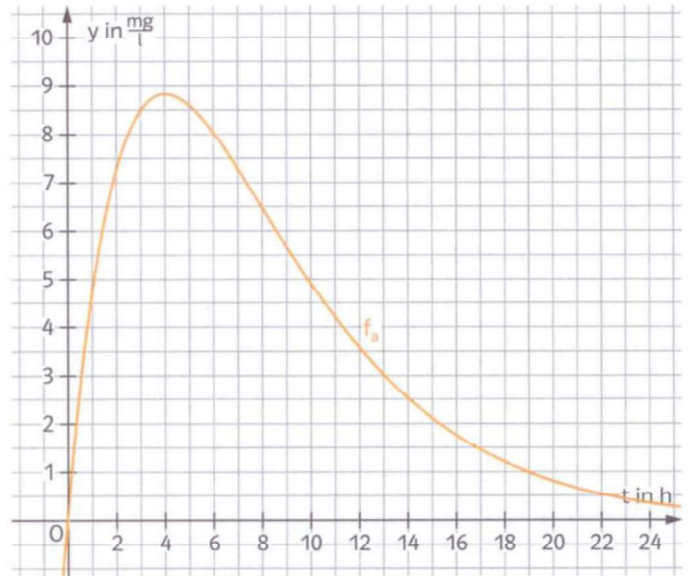
Ein Medikament wird in unterschiedlichen Wirkstoffdosierungen hergestellt. Durch die Funktion  $f_a$  mit

$$f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0,25t}$$

wird die Konzentration dieses Medikamentenwirkstoffs im Blut eines Patienten beschrieben. Der Parameter  $a > 0$  berücksichtigt die Höhe der Wirkstoffdosierung. Dabei wird die Zeit  $t$  in Stunden seit der Einnahme und die Wirkstoffkonzentration  $f_a(t)$  im Blut in Milligramm pro Liter (mg/L) gemessen.

a) Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf einer Wirkstoffkonzentration im Blut eines Patienten. Die Wirkstoffkonzentration im Blut des Patienten beträgt vier Stunden nach der Einnahme 8,83 mg/L.

Berechnen Sie den Parameter  $a$ . Damit das Medikament wirksam ist, sollte die Wirkstoffkonzentration im Blut mindestens 3 mg/L betragen. Bestimmen Sie anhand des Funktionsgraphen, wie lange dies bei dieser Dosierungshöhe ungefähr der Fall ist. Zwischenergebnis: Für den abgebildeten Graphen gilt  $a = 6$ .



b) Zeigen Sie, dass die Wirkstoffkonzentration im Blut unabhängig vom Parameter  $a$  vier Stunden nach der Einnahme maximal ist. Um eine Gefährdung des Patienten auszuschließen sollte eine Wirkstoffkonzentration von mehr als 14 mg/L vermieden werden. Ermitteln Sie die Dosis  $a$ , die nicht überschritten werden sollte.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. Begründen Sie, dass dieser Zeitpunkt unabhängig von der Wirkstoffdosierung ist.

d) Untersuchen Sie, ob  $b$  und  $c$  so gewählt werden können, dass  $F_6$  mit  $F_6(t) = b \cdot (t + c) \cdot e^{-0,25t}$  eine Stammfunktion von  $f_6$  ist.

e) Die Funktion  $F_a$  mit  $F_a(t) = -4a \cdot (t + 4) \cdot e^{-0,25t}$  ist eine Stammfunktion von  $f_a$ . Berechnen Sie für  $a = 5$  die mittlere Wirkstoffkonzentration des Medikaments in den ersten 24 Stunden.

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten  $s$  Stunden nach der Einnahme des Medikaments wird mit  $m_a(s)$  bezeichnet. Bestimmen Sie  $m_a(s)$  in Abhängigkeit von  $s$ .

Bestimmen Sie die Dosierung  $a$  so, dass die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden 5 mg/L beträgt.

f) Im Folgenden soll die Funktion  $f_{10}$  mit  $f_{10}(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0,25t}$  betrachtet werden. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion  $f_{10}$  für  $t \rightarrow +\infty$ . Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den langfristigen Abbau des Wirkstoffs.

Für  $t > 24$  soll der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration durch eine lineare Funktion  $g$  beschrieben werden. Bestimmen Sie eine Gleichung der linearen Funktion  $g$  so, dass die zusammengesetzte Funktion  $h$  mit

$$h(t) = \begin{cases} f_{10}(t) & \text{für } 0 \leq t \leq 24 \\ g(t) & \text{für } t > 24 \end{cases}$$

an der Stelle  $t = 24$  differenzierbar ist. Berechnen Sie für diese Modellierung den Zeitpunkt, zu dem das Medikament im Blut vollständig abgebaut ist.