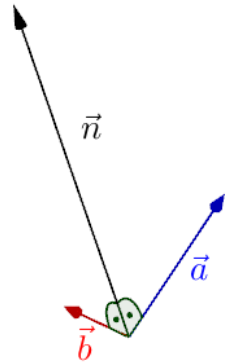


Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



Herleitung: Sämtliche Faktoren bei den Äquivalenzumformungen seien für die Herleitung o.B.a.A. $\neq 0$

$$\begin{array}{lcl} \vec{a} \circ \vec{n} = 0 & \Rightarrow & * \quad a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0 \quad | \cdot b_1 \\ \vec{b} \circ \vec{n} = 0 & & \quad \quad \quad b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0 \quad | \cdot (-a_1) \\ \hline & & a_1 b_1 n_1 + a_2 b_1 n_2 + a_3 b_1 n_3 = 0 \\ & & -a_1 b_1 n_1 - a_1 b_2 n_2 - a_1 b_3 n_3 = 0 \quad | + \\ \hline & & (a_2 b_1 - a_1 b_2) n_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = 0 \quad | - (a_2 b_1 - a_1 b_2) n_2 \\ & & (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) n_2 \quad | : n_2 \quad | : (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ & & \frac{n_3}{n_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \end{array}$$

Der Komponentenvergleich bestätigt n_2 und n_3 aus obiger Formel.

Einsetzen in * ergibt

$$\begin{array}{lcl} a_1 n_1 + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 & | - a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) & | - a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ a_1 n_1 = a_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_3(a_2 b_1 - a_1 b_2) \\ a_1 n_1 = a_1 a_2 b_3 - a_2 a_3 b_1 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_3 b_2 \\ a_1 n_1 = a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 & | : a_1 \\ n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 & & \text{q.e.d.} \end{array}$$

Schema:

$$\begin{array}{l} a_1 - b_1 \\ a_2 \times b_2 \\ a_3 \times b_3 \\ a_1 \times b_1 \\ a_2 \times b_2 \\ a_3 - b_3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Proben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 6 \cdot (-3) = -12 + 30 - 18 = 0 \quad \checkmark$$