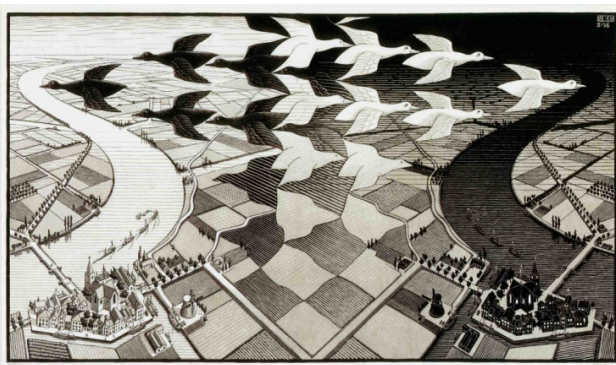


GUÍA N° 1 INTRODUCCIÓN

El artista holandés Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) es considerado uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Sus obras están llenos de mundos imposibles, de metamorfosis y en muchos de ellos Escher muestra una enorme comprensión de aspectos matemáticos como simetrías, el infinito, cintas de Moebius y muchos otros. Te invitamos a que conozcas la obra de este enorme artista, por ejemplo a través de su página oficial www.mcescher.com.



Al observar las obras de Escher, uno no puede dejar de preguntarse: ¿cómo lo hizo? Por ejemplo, aquí ves una xilografía llamada *Día y Noche*, de 1938. (¿Sabes qué es una xilografía? ¡Consúltale a tu profesor/a de artes!)



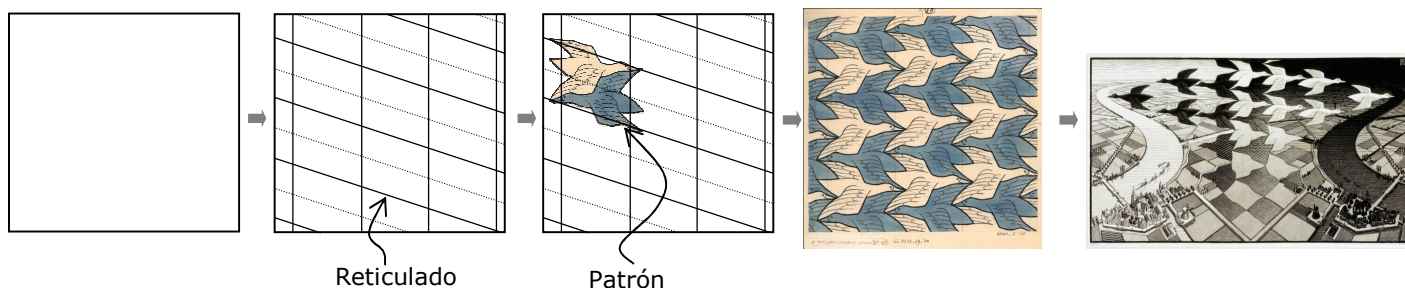
A la izquierda vemos un paisaje de día. Un pequeño poblado a orillas de un río, rodeado de campos sembrados. Sobre el pueblo vuelan aves negras. A la derecha vemos un poblado de noche, sobre el cual vuelan aves blancas. ¡Pero momento! ¡Ambos pueblos son idénticos! Escher pintó ambos pueblos como si fuesen uno el reflejo del otro en un espejo. ¿Pero qué pasa en el centro? Al mirar de abajo hacia arriba, vemos que los campos sembrados se van transformando imperceptiblemente hasta convertirse en las aves. Pero además las aves negras y blancas se

complementan a la perfección. Los espacios dejados por las aves blancas las ocupan las aves negras y viceversa. ¿No te parece asombroso? (Si averiguas lo que significa xilografía te asombrarás aún más).

¿Entonces, cómo lo hizo? Dejando de lado el genio de Escher, su obra muestra gran rigurosidad y planificación. Le dedicó tiempo, paciencia y cariño a lograr lo que pretendía. Antes de empezar una obra como *Día y Noche*, dedicaba mucho tiempo a ensayar. Acá ves un estudio que hizo para dicha obra. Se trata sólo de las aves blancas y negras. Escher estaba estudiando cómo encajarlas para que se complementaran a la perfección. Si observas bien, se puede notar que dibujó líneas verticales y diagonales para irse guiando. De hecho tenía cuadernos llenos de estudios como ese.



¿Cómo lo hizo? Debe haber hecho algo así:



En esta unidad veremos los aspectos matemáticos básicos que usó Escher. Pero nosotros usaremos puntos, triángulos, cuadrados, etc., es decir figuras simples. Progresivamente iremos complicando los dibujos y, ¿cómo sabes?, tal vez termines sorprendiendo a todos con un dibujo tan bello como los de Escher.

Lo primero que debes observar es que Escher usó un patrón repetitivo: por ejemplo, aves. (El color de ellas es irrelevante y es sólo para darle un efecto al dibujo). Este patrón lo copió tantas veces como fuese necesario, pero sin cambiar su tamaño y luego los "movió" por sobre la superficie del papel. En matemáticas, a esto lo llamamos **transformaciones isométricas**.

Una **transformación isométrica** es una transformación de una figura plana que altera solamente la ubicación de la figura, pero sin alterar por ejemplo su tamaño, ni su área, ni sus ángulos. La palabra isometría proviene del griego: *iso* significa igual (como por ejemplo en la palabra "isósceles"), y *metría* viene de la palabra griega para "medir" (como por ejemplo geometría, trigonometría).

Las transformaciones isométricas son tres: la traslación, la rotación y la reflexión (o simetría axial). A veces se considera también la simetría central como una transformación isométrica, aunque en el fondo se trata de una rotación.

GUÍA N° 2 TRASLACIONES

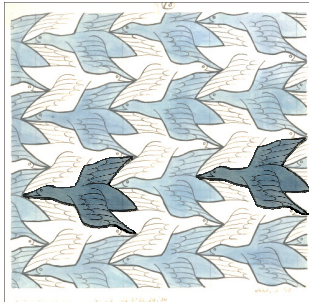


Fig. 1

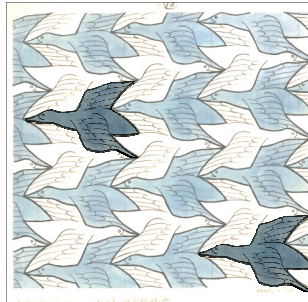


Fig. 2

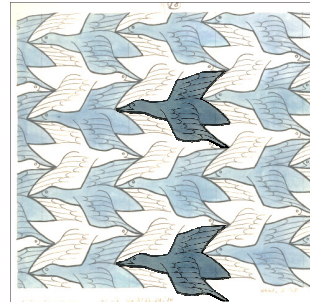


Fig. 3

En las tres figuras anteriores hemos destacado dos de las aves negras. Si comparamos la posición de las dos aves, vemos que "están movidas". En la figura 1, un ave está más a la izquierda de la otra y levemente más abajo. En la figura 2, un ave está arriba a la izquierda respecto de la otra. En la figura 3, un ave está más arriba de la otra.

Como los conceptos "más a la izquierda", "levemente más abajo", "arriba a la izquierda" o "más arriba" son muy vagos (¿cuántos centímetros hacia la izquierda?, ¿en qué ángulo hacia arriba a la izquierda?), necesitamos de un concepto más preciso. Este concepto es el de **vector**. Un vector te lo puedes imaginar como una flecha que indica el movimiento necesario para transformar una figura en otra.

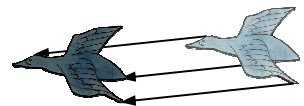
Figura original:



El vector es:



Figura trasladada:



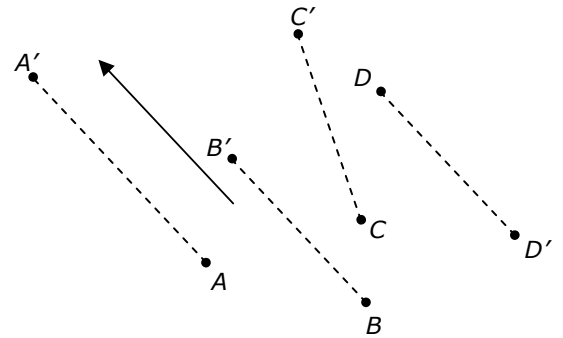
Un vector tiene **dirección, sentido y magnitud**. Dirección y sentido están muy relacionados: La dirección puede ser izquierda-derecha, norte-sur. El sentido en cambio, es "hacia la izquierda" o "hacia el norte".

La magnitud, en palabras simples, es cuánto mide el vector.

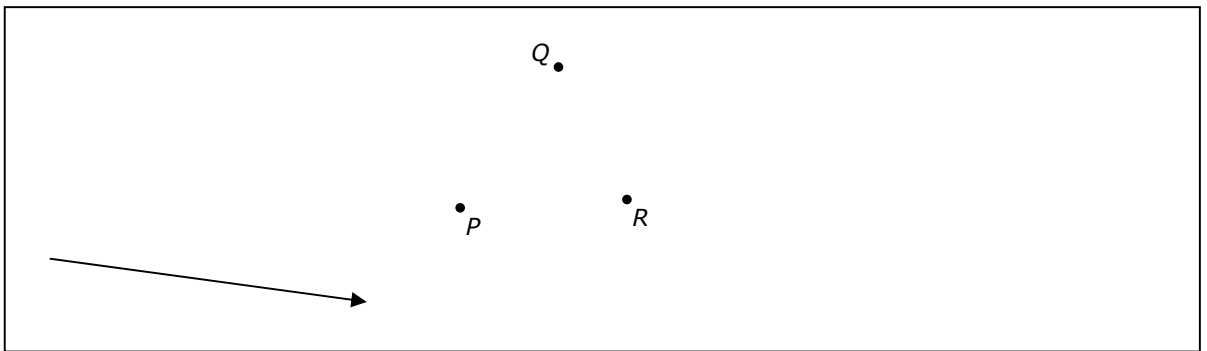
ACTIVIDADES

- Es muy común que si el punto original se llama P , entonces su **imagen**, es decir el punto obtenido al trasladarlo según un vector, se llame P' .

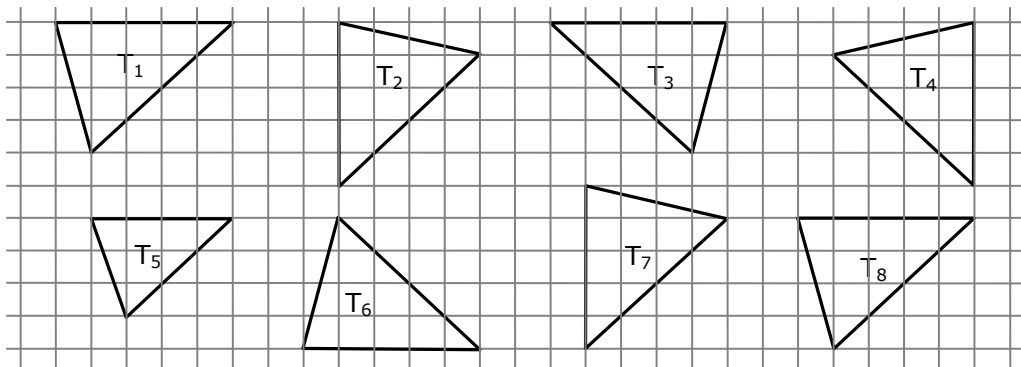
Pedro debía trasladar los puntos A, B, C y D según el vector dado, pero cometió tres errores. ¿Cuáles fueron?



- Dados los puntos P, Q y R y el vector de traslación de la figura,
 - Traza el segmento \overline{PQ} y construye el segmento trasladado $\overline{P'Q'}$.
 - Dibuja la recta QR y construye la recta trasladada $Q'R'$.
 - ¿Qué relación hay entre el segmento \overline{PQ} y su imagen y entre la recta QR y su imagen, respectivamente? Conversa con tu compañero.



- Observa los siguientes triángulos. ¿Cuáles son el resultado de alguna traslación? Dibuja el vector traslación (usa diferentes colores).



ACTIVIDADES

Vimos que la traslación de segmentos y rectas produce, a su vez, segmentos y rectas, y que estas son paralelas a las originales. Ahora estudiaremos las traslaciones en relación a los sistemas de coordenadas.

- En un sistema de coordenadas marca los puntos $A = (2, 5)$ y $B = (6, 4)$. Dibuja el vector que traslada A a B . A este vector lo designaremos por \overrightarrow{AB} (se lee: "vector AB ")
 - Los siguientes puntos se trasladan según el vector \overrightarrow{AB} . Determina sus imágenes.
b₁) $C = (1, 4)$ b₂) $D = (0, 3)$
 - La imagen de un punto P según el vector \overrightarrow{AB} es $P' = (1, 2)$. ¿Cuál es el punto P ?
- Dibuja el triángulo de vértices $A = (1, 3)$, $B = (6, 1)$ y $C = (5, 6)$. Construye la imagen del triángulo ABC obtenida mediante una traslación según el vector \overrightarrow{PQ} . (Usa diferentes colores).
 - $P = (0, 0)$; $Q = (-5, 0)$ b) $P = (0, 0)$; $Q = (-1, -3)$

Para designar un vector \overrightarrow{PQ} , se necesita conocer las coordenadas del punto inicial P y del punto final Q , como vimos en los ejercicios anteriores. Sin embargo, es muy común que el punto inicial sea $P = (0, 0)$, como en los ejercicios 2a) y 2b). En este caso basta sólo con dar el punto final Q y en vez de \overrightarrow{PQ} usamos una letra minúscula (generalmente u, v, w) para designar al vector. Así, en el ejemplo 2a), en vez de decir " $P = (0, 0)$; $Q = (-5, 0)$ " podríamos haber dicho simplemente $\vec{u} = (-5, 0)$.

- Un punto $A = (2, 1)$ se traslada según el vector $\vec{u} = (3, 1)$, obteniendo el punto A' . A' se traslada según el vector $\vec{v} = (1, 4)$, obteniendo A'' .
 - Dibuja los tres puntos y los vectores en un sistema de coordenadas.
 - Si se desea trasladar el punto A directamente hasta el punto A'' , ¿qué vector se debe usar?



GUÍA N° 3 SIMETRÍA AXIAL

La segunda transformación isométrica que estudiaremos es la **reflexión** o **simetría axial**. En la figura 1 ves otro estudio que hizo Escher, para una xilografía llamada *Límite Circular IV*, de 1960 (figura 2). En esta obra, en vez de aves, Escher mezcla ángeles y demonios.

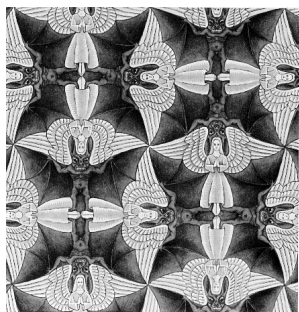


Fig. 1



Fig. 2

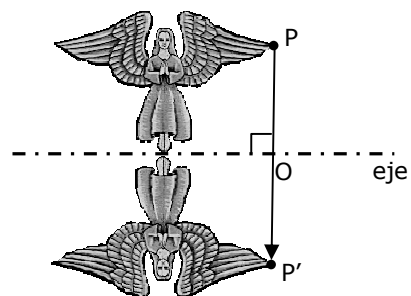


Fig. 3

En la figura 3 hemos destacado dos de los ángeles. Al compararlos, vemos que uno es el reflejo del otro, según la línea punteada.

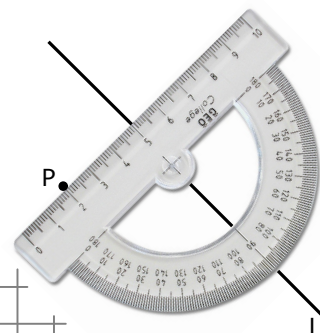
Una **reflexión** o **simetría axial** es una transformación respecto de un eje, llamado **eje de simetría**. Cada punto P de la figura se refleja en su imagen o punto **homólogo** P', cumpliéndose las siguientes propiedades:

1. PP' es perpendicular al eje de simetría.
2. $PO = OP'$.

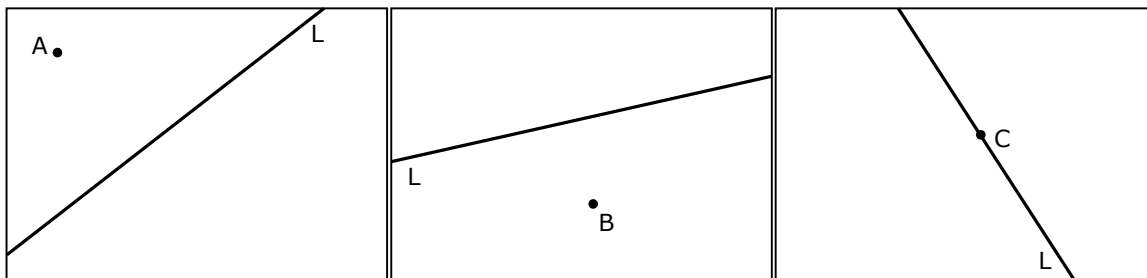
ACTIVIDADES

- La imagen de la derecha te muestra cómo usar un transportador para reflejar un punto P respecto de un eje L .

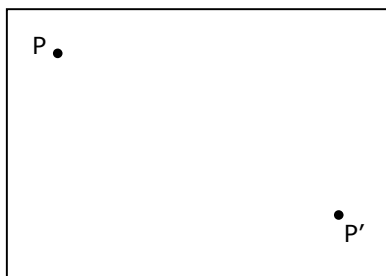
- Marca el punto P' .
- ¿Qué relación hay entre el segmento PP' y la recta L ? ¿Qué relación hay entre la distancia de P a L y la distancia de P' a L ? (Responde aquí)



- Refleja los puntos A , B y C respecto del eje L .



- En la figura aparece un punto P y su imagen P' según una reflexión. Construye el eje de simetría. Describe los pasos que realizaste para encontrar dicho eje.

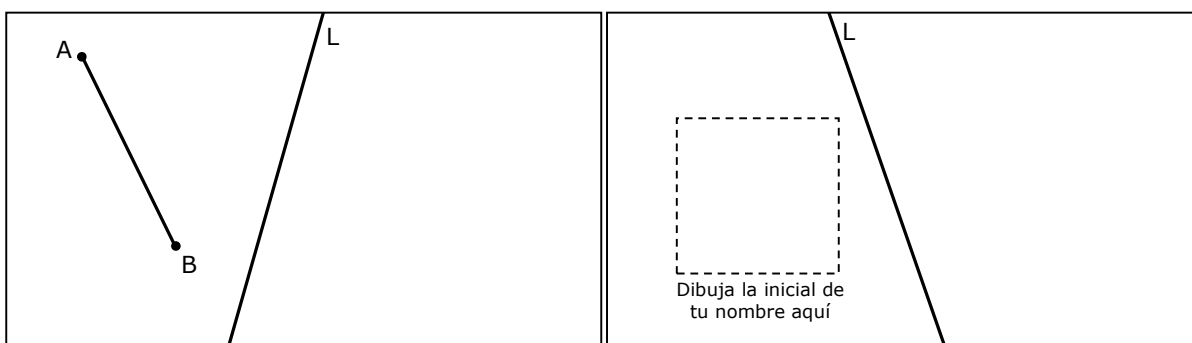


Descripción de la construcción	
Primero...	

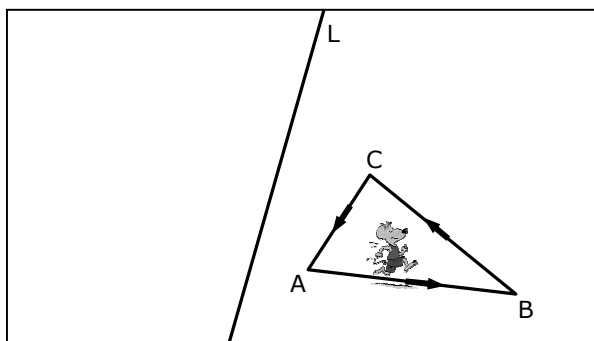
ACTIVIDADES

Si en vez de reflejar un punto, deseamos reflejar toda una figura, elegimos puntos clave de dicha figura. Por ejemplo, en el caso de un segmento podríamos elegir los extremos; en el caso de un polígono, los vértices; en el caso de una circunferencia, el centro, etc. (Nótese que dice "podríamos". Esto quiere decir que no hay una única forma de elegir los puntos). Una vez reflejados los puntos elegidos construimos la imagen de la figura.

1. Construye las imágenes de las siguientes figuras respecto del eje señalado.



2. a) Refleja el triángulo ABC respecto del eje L .
b) Heriberto corre a lo largo de los lados del triángulo en sentido antihorario. ¿En qué sentido corre la imagen de Heriberto a lo largo del triángulo reflejado?



ACTIVIDADES

Veamos la simetría axial usando sistemas de coordenadas.

- En un sistema de coordenadas dibuja la recta L que pasa por los puntos $(0, 4)$ y $(4, 0)$.
 - Los siguientes puntos se reflejan según la recta L . Determina sus imágenes.
b₁) $A = (1, 2)$ b₂) $B = (5, 1)$
 - La imagen de un punto P al reflejarlo respecto del eje L es $P' = (-3, 2)$. ¿Cuál es P ?
- La recta L pasa por los puntos $(2, 6)$ y $(6, 0)$.
Refleja el segmento PQ , con $P = (2, 7)$; $Q = (7, 5)$, respecto de L .
- Dibuja los puntos $P = (3, 2)$, $Q = (7, 1)$ y $P' = (2, 3)$.
 - Construye la recta L , de manera que P' sea la imagen de P al reflejarlo respecto de L .
 - ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen de Q al reflejarlo respecto de L ?
- Dibuja el cuadrilátero $ABCD$ con vértices $A = (2, 1)$, $B = (5, 0)$, $C = (6, 4)$ y $D = (3, 5)$.
 - Refleja el cuadrilátero respecto del eje dado por la recta de ecuación $y = 0$.
 - Refleja el cuadrilátero respecto de una recta que forme 45° con el eje x y pase por el origen.

ACTIVIDADES

Si tras aplicar una reflexión respecto de algún eje, la figura resultante coincide con la figura original, diremos que la figura presenta **simetría axial**.

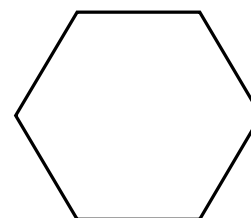
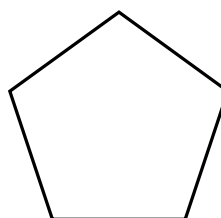
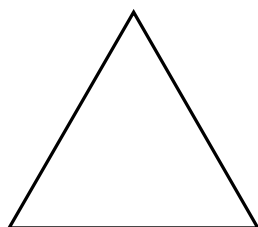
Por ejemplo, la mariposa de la figura tiene un eje de simetría. (¿Cuál?)



1. Señala qué imágenes presentan simetría axial. En caso de haber simetría axial, dibuja el o los ejes de simetría.



2. En las figuras ves algunos polígonos regulares: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular y un hexágono regular.
a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada figura? ¡Dibújalos!



- b) Generaliza: ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular de n lados?
(Responde aquí)



3. En cada uno de los siguientes ejercicios, dibuja algunos ejemplos y luego escribe una respuesta. Compara con tu compañero/a.

- a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo?
- b) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo isósceles?
- c) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un paralelogramo?
- d) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un rombo?

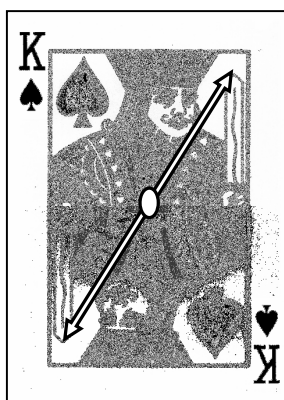
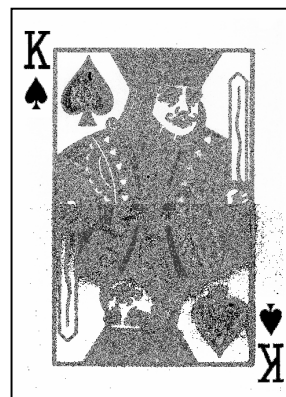
GUÍA N° 4 SIMETRÍA CENTRAL

La tercera transformación isométrica que estudiaremos es la **simetría central** o **puntual**.

Aparece comúnmente en los naipes, como en el rey de pik que ves en la figura.

Sin duda que este naipe tiene presenta simetría, pero no es una simetría axial. (¿Por qué no?).

El tipo de simetría que presenta esta imagen se comprende si se unen puntos homólogos. Por ejemplo al unir las puntas de las espadas vemos que esta unión pasa por un punto muy especial: el "óvalo" ubicado justo en el centro del naipe. Si unes otros puntos homólogos, verás que el segmento que los une siempre pasa por dicho punto. (¡Házlo!)



Una simetría central es una transformación isométrica en la que a cada punto le corresponde una imagen respecto de un punto llamado **centro** o **centro de simetría**.

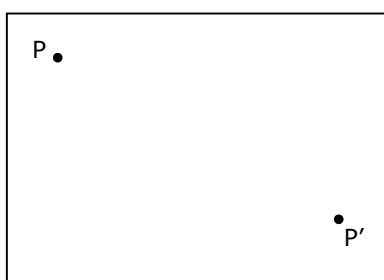
Se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. La distancia del punto al centro debe ser igual que la distancia de la imagen al centro.
2. Los tres puntos (el punto, su imagen y el centro) deben ser colineales, es decir, pertenecer a una misma recta.

ACTIVIDADES

- En un sistema de coordenadas marca el punto $O = (0, 0)$.
 - Determina las imágenes de los siguientes puntos respecto del centro O .
 $b_1) A = (0, 3)$ $b_2) B = (-4, 0)$
 - La imagen de un punto P respecto del centro O es $P' = (3, -5)$. ¿Cuál es P ?

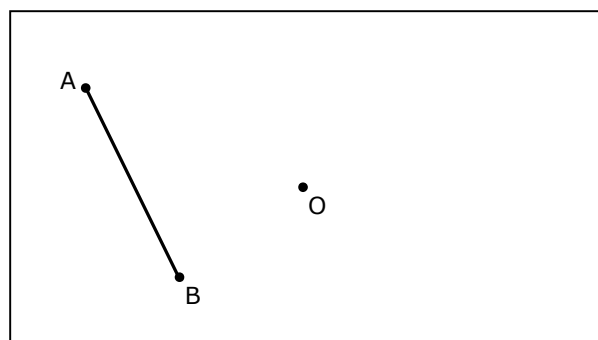
- En la figura aparece un punto P y su imagen P' respecto de un centro O . Construye el centro de simetría. Describe los pasos que realizaste para encontrar dicho punto.



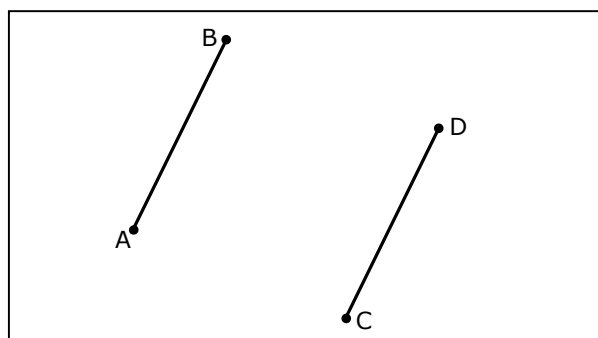
Descripción de la construcción

Primero...

- Construye la imagen del segmento AB respecto del centro O .
 - ¿Qué relación hay entre el segmento AB y su imagen?



- En la figura aparecen dos segmentos paralelos, AB y CD , que miden lo mismo. ¿Existe alguna simetría central mediante la cual uno se transforme en el otro? En caso de ser afirmativa tu respuesta, construye el centro de simetría e identifica los puntos homólogos.



5. a) Refleja el triángulo ABC respecto del centro O .
b) Matilde corre a lo largo de los lados del triángulo en sentido antihorario. ¿En qué sentido corre la imagen de Matilde a lo largo de la imagen del triángulo?

