BAHAN AJAR TRIGONOMETRI

Sebuah Draft yang Belum Jadi

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Untung Trisna Suwaji
untungtrisna@gmail.com

Trigonometri

Trigonometri berasal dari istilah Yunani ”trigonom” (segitiga) dan “metron” (mengukur).

Beberapa peradaban kuno, khususnya Mesir, India, dan Tiongkok, telah memiliki beberapa pengetahuan geometri praktis, termasuk beberapa konsep yang merupakan awal dari trigonometri. Papirus Rhind (± 1800SM) dari Mesir, memuat 84 masalah (aritmetika, aljabar, dan geometri). Lima masalah di antaranya berkaitan dengan istilah “seked”. Dari analisis terhadap teks dan angka-angka yang menyertainya makna dari “seked” adalah perbandingan cotangen. Hipparchus (meninggal ± 127SM) membuat tabel fungsi trigonometri, berbasis talibusur lingkaran) dengan interval $7°30'$. Tabel ini disempurnakan dengan interval $30'$ oleh Ptolemius (meninggal ±145M).

https://www.britannica.com/science/trigonometry-table

Tabel sinus ditemukan pertama kali dalam Aryabhatiya yang ditulis oleh Aryabhata I (± 475-550) menggunakan istilah ardha-jya untuk setengah tali busur). Istilah ardha-jya sering disingkat menjadi jya atau jiva. Istilah ini dipertahankan oleh ilmuwan muslim yang menerjemahkan ke bahasa Arab. Di dunia Arab, istilah jiva ini sering dilafalkan sebagai jiba atau jaib yang artinya fold/melipat atau bay/teluk. Ketika terjemahan Arab ini diterjemahkan ke bahasa Latin, istilah jaib menjadi sinus, bahasa latin dari bay. Kata sinus pertama kali muncul di tulisan Gherardo of Cremona (± 1114-1187).

Tabel tangen dan cotangen dikonstruksi sekitar 860M oleh Habash al-Hasib. Al-Battani (± 858-929M) membuat aturan untuk menentukan sudut elevasi matahari terhadap horison berdasarkan panjang bayangan sebuah gnomon vertikal dengan tinggi h. (gnomon=bagian jam matahari untuk menghasilkan bayangan).

Dalam sejarah perkembangannya, sampai dengan abad ke-16 pembahasan utama trigonometri berkisar pada menentukan nilai unsur-unsur yang belum diketahui pada segitiga (atau bangun-bangun yang dapat dipotong menjadi segitiga-segitiga) jika unsur-unsur yang lain diberikan. Sebagai contoh, jika panjang dua sisi suatu segitiga dan sudut yang mengapit keduanya diketahui, maka sisi ketiga dan dua sudut yang lain dapat ditentukan.

Mulai abad ke-16, karakteristik trigonometri berubah dari penggunaan pendekatan geometri ke aljabar-analitik. Francois Viete (1540-1603) menemukan formula $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$, tahun 1671 James Gregory menemukan deret $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$. Untuk $x = 1$, diperoleh $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. Leonhard Euler (1707-1783) menemukan formula $e^{i\phi} = \cos\phi +$

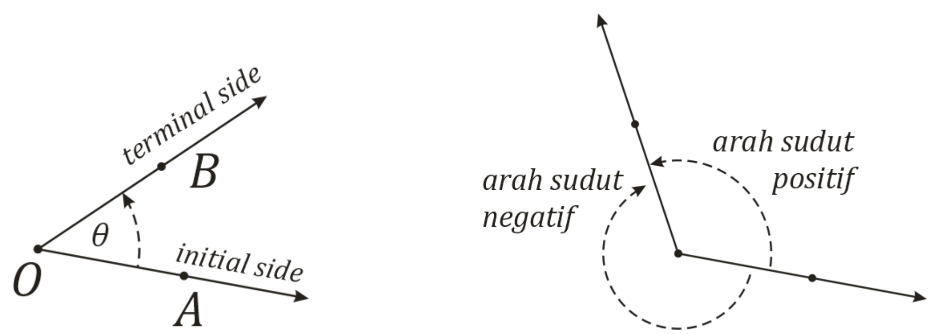
$i \sin \phi$, dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828$. Dengan mengambil $\phi = \pi$ diperoleh formula unik yang menggabungkan bilangan-bilangan istimewa dalam matematika yaitu $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Pengukuran Sudut

Sudut

Sebuah sudut terbentuk oleh dua buah sinar garis yang bersekutu di titik pangkal. Titik persekutuan ini dinamakan titik sudut, sedangkan dua sinar garis disebut sebagai kaki-kaki sudut atau sisi-sisi sudut. Pada gambar di samping, titik O, sinar OA, dan sinar OB berturut-turut merupakan titik sudut dan kaki-kaki sudutnya. Sudut θ dapat ditulis sebagai $\angle AOB$.

Sudut AOB dapat pula dipandang sebagai bangun yang dibentuk dari perputaran sinar OA mengelilingi O dengan posisi akhir berimpit dengan sinar OB. Sinar OA dan OB berturut-turut disebut sebagai *initial side* (sisi awal) dan *terminal side* (sisi batas). Dengan memandang sudut sebagai perputaran sinar, maka dimungkinkan membentuk sudut yang lebih dari 360°, dan membedakan besar sudut negatif dan positif. Suatu sudut bernilai positif jika perputarannya berlawanan arah jarum jam dan negatif jika searah jarum jam.

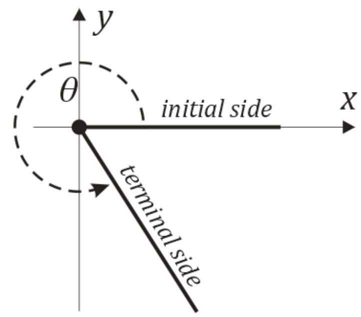


Penamaan sudut dapat dilakukan dengan beberapa cara. Sudut pada gambar di atas dapat dinyatakan sebagai Sudut θ, $\angle\theta$, Sudut AOB, $\angle AOB$, sudut O, atau $\angle O$.

Kedudukan Sudut dalam posisi baku

Pada sistim koordinat kartesius, sudut AOB dikatakan terletak pada kedudukan baku jika titik sudut O dihimpitkan dengan titik pangkal (0,0) pada koordinat kartesius dan *initial side* berimpit dengan sumbu-x positif.

Sudut dalam posisi baku ini akan digunakan untuk mendefinisikan ulang perbandingan trigonometri sehingga berlaku untuk semua sudut.



Dengan menggunakan sudut dalam posisi baku, maka besar suatu sudut dapat dibagi ke dalam empat kelompok yang disebut kuadran

a. Kuadran I : $0 < \alpha < 90°$
b. Kuadran II : $90° < \alpha < 180°$
c. Kuadran III: $180° < \alpha < 270°$
d. Kuadran IV: $270° < \alpha < 360°$

Sementara itu, sudut-sudut yang *terminal side*-nya berimpit dengan sumbu koordinat seperti 0°, 90°, 180°, 270°, dan seterusnya, dinamakan sebagai sudut kuadrantal (*quadrantal angle*). (lihat https://www.mathwords.com/q/quadrantal_angle.htm)

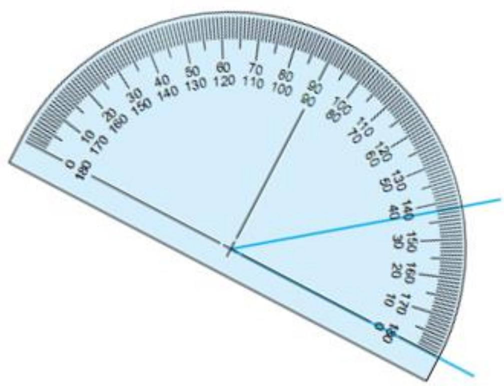
Ukuran Sudut

a. Ukuran Sudut dalam Derajat (Sexagesimal)

Dalam satuan derajat, besar sudut yang dibentuk oleh satu putaran penuh adalah 360 derajat atau ditulis 360°.

Definisi: Satu derajat (1°) adalah besar sudut yang dihasilkan oleh perputaran $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran.

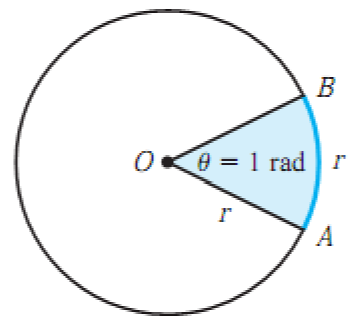
Ukuran sudut yang lebih kecil, $1° = 60'$ (dibaca 60 menit) dan $1' = 60''$ (dibaca 60 detik).



b. Ukuran Sudut dalam Radian

Misalkan titik A dan B pada lingkaran yang berpusat di O, maka besar sudut AOB dalam radian ditentukan oleh $\frac{busur\ AB}{jari-jari}$.

Dengan ketentuan di atas maka satu radian adalah besar sudut pusat lingkaran yang panjang busurnya sama dengan panjang jari-jarinya.



Radian

Untuk sudut satu putaran, maka panjang busur akan menjadi keliling lingkaran, dengan demikian

$$\text{Besar sudut satu putaran} = \frac{keliling\ lingkaran}{jari-jari}\text{ rad}$$

$$= \frac{2\pi r}{r}\text{ rad}$$

$$= 2\pi\text{ rad}$$

Ingat kembali tentang dimensi dan satuan. Kecepatan memiliki rumus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ di mana Δs dan Δt merupakan dimensi panjang dan waktu, dengan satuan meter dan detik. Akibatnya kecepatan memiliki satuan turunan $m/detik$. Perhatikan satuan dalam radian, panjang busur dan jari-jari berdimensi sama, akibatnya satuan dalam radian tidak memiliki dimensi. Akibatnya jika diberikan ukuran suatu sudut tanpa ada satuan sama sekali, maka yang dimaksud adalah satuan radian.

c. Ukuran sudut dalam grade (Centicimal)

Ketika bangsa Perancis mengadopsi sistim metrik, mereka mencoba meninggalkan sistim pembagian lingkaran ke dalam 360 bagian agar sistim pengukuran sudut konsisten dengan ukuran metrik yang lain. Mereka membagi sudut siku-siku menjadi 100 bagian yang sama. Konsekuensinya adalah, satu putaran penuh dibagi menjadi 400 bagian. Satuan pengukuran sudut seperti ini dinamakan grade. Satuan ini sering juga disebut dengan new degree, neugrad, gradian, atau gon.

Dengan demikian besar sudut siku-siku adalah 100 grade (ditulis 100^g)

Untuk satuan yang lebih kecil,

$1^g = 100^c$ (dibaca 100 new minutes atau 100 menit baru)

$1^c = 100^{cc}$ (dibaca 100 new seconds atau 100 detik baru)

d. Satuan sudut lainnya.

Dicari bahannya …. Contoh: milliradian NATO, milliradian Russia, … dll.

e. Hubungan antara satuan-satuan sudut

Berdasar tiga penjelasan di atas, diperoleh hubungan antar satuan sudut

$$360° = 2\pi\ \text{rad}$$

$$360° = 400^g$$

$$400^g = 2\pi\ \text{rad}$$

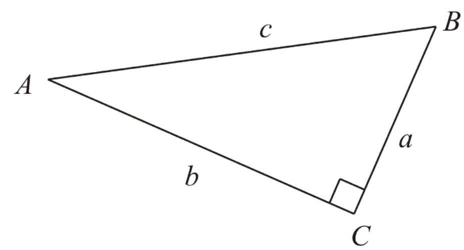
Pertanyaan:

Seorang siswa meminta penjelasan kepada guru, “Pak, yang benar π itu berapa sih? $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 180°$?” Bagaimana penjelasan Anda?

Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-siku

Enam Perbandingan Trigonometri

Diberikan segitiga ABC siku-siku di C dengan $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, dan $\angle ACB = 90°$. Sisi AB dinamakan sisi miring (hipotenusa) sedangkan sisi AC dan BC masing-masing disebut sebagai sisi siku-siku.



Perhatikan posisi sisi-sisi segitiga terhadap titik sudut.

a. Terhadap titik sudut A
   1) Sisi a adalah sisi siku-siku yang terletak di depan sudut A.
   2) Sisi b adalah sisi siku-siku yang berdekatan dengan sudut A atau di samping sudut A.
   3) Sisi c adalah sisi miring.

b. Terhadap titik sudut B
   1) Sisi a adalah sisi siku-siku yang berdekatan dengan sudut B atau di samping sudut B.
   2) Sisi b adalah sisi siku-siku yang terletak di depan sudut B.
   3) Sisi c adalah sisi miring.

Dengan menggunakan segitiga siku-siku di atas, didefinisikan:

$$\text{sinus sudut } A = \frac{\text{sisi di depan sudut } A}{\text{sisi miring}} \quad \text{atau ditulis} \quad \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\text{cosinus sudut } A = \frac{\text{sisi di samping sudut } A}{\text{sisi miring}} \quad \text{atau ditulis} \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangen sudut } A = \frac{\text{sisi di depan sudut } A}{\text{sisi di samping sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotangen sudut } A = \frac{\text{sisi di samping sudut } A}{\text{sisi di depan sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \cot A = \frac{b}{a}$$

$$\text{secan sudut } A = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \sec A = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosecan sudut } A = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depam sudut } A} \quad \text{atau ditulis} \quad \csc A = \frac{c}{a}$$

Teorema:

i. $\csc A = \frac{1}{\sin A}$

ii. $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

iii. $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

Latihan:

Buktikan ketiga teorema di atas.

Perbandingan trigonometri dalam lingkaran satuan

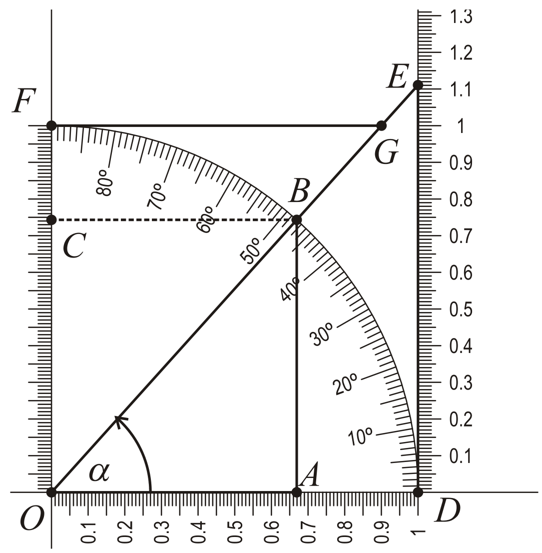
Pada diagram di bawah, besar sudut α adalah 48°. Dengan menggunakan skala pada gambar, dan kalkulator untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri,

a. Tentukan panjang AB dan OA, kemudian cocokkan dengan nilai $\sin 48°$ dan $\cos 48°$.

b. Tentukan panjang DE dan OE, cocokkan dengan nilai $\tan 48°$ dan $\sec 48°$.

c. Tentukan panjang FG dan OG, cocokkan dengan nilai $\cot 48°$ dan $\csc 48°$

Ulangi langkah di atas dengan membuat sudut α yang berbeda-beda, kemudian cocokkan panjang ruas-ruas garis yang bersesuaian dengan enam perbandingan trigonometri sudut tersebut. Apa yang dapat Anda simpulkan?

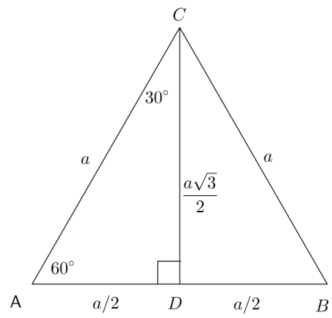


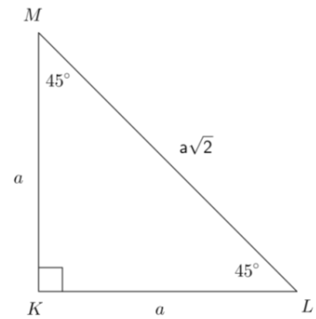
Latihan:

Tunjukkan bahwa panjang ruas garis AB, OA, DE, OE, OF, dan OG menyatakan enam nilai perbandingan trigonometri sudut α.

Perbandingan Trigonometri Sudut 30°, 45°, 60°

Perbandingan trigonometri untuk beberapa sudut tertentu dapat dicari tanpa menggunakan tabel atau kalkulator. Perhatikan segitiga samasisi ABC dengan panjang sisi a. Segitiga tersebut memiliki panjang sisi yang sama dan besar sudut yang sama juga. Tarik garis tinggi melalui C, diperoleh potongan segitiga siku-siku ABD dengan sudut siku-siku di D. Dengan menggunakan teorema Pythagoras dapat ditentukan panjang DA.





Pada segitiga siku-siku samakaki KLM dengan panjang sisi siku-siku a dan K sudut siku-siku, maka sudut yang diapit oleh sisi siku-siku dan besarnya 45°. Dengan teorema Pythagoras dapat dicari panjang sisi miring LM yaitu $a\sqrt{2}$.

Dari ilustrasi di atas diperoleh

Sudut (x) / Perb. trig.	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	…	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	…
$\cot x$	…	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	…
$\sec x$	…	…	…	…	…
$\csc x$	…	…	…	…	…

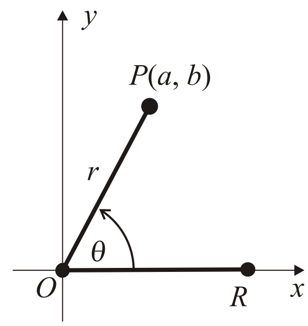
Latihan:

Lengkapi tabel di atas.

Fungsi Trigonometri

Perbandingan trigonometri dengan menggunakan segitiga siku-siku, hanya memungkinkan untuk membahas sudut antara 0° sampai 90°. Sementara itu, dengan memandang sudut α sebagai sebagai perputaran sinar OA mengelilingi O terhadap OB, dimungkinkan terbentuknya sudut yang lebih besar dari 90° atau besar sudut yang negatif. Oleh karena itu, perlu adanya perluasan definisi perbandingan trigonometri.

Perhatikan gambar di samping, pada sudut ROP titik O berada di titik pangkal koordinat, salah satu kaki sudut berada pada sumbu x positif. Sudut θ merupakan hasil perputaran kaki sudut yang lain, dengan arah positif jika berlawan dengan arah perputaran jarum jam, dan negatif jika searah perputaran jarum jam. Sudut dalam posisi tersebut dikatakan sebagai sudut dalam posisi standar (baku). Dengan posisi ini, perbandingan trigonometri diperluas sehingga dapat mencakup sudut negatif dan sudut yang lebih besar dari 90°.



Definisi: Misalkan θ suatu sudut dalam posisi baku dengan $P(a,b)$ suatu titik pada sisi batas (*terminal side*) dan $OP = r$, maka:

$$\sin\theta = \frac{ordinat\ titik\ P}{r} = \frac{b}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{absis\ titik\ P}{r} = \frac{a}{r}$$

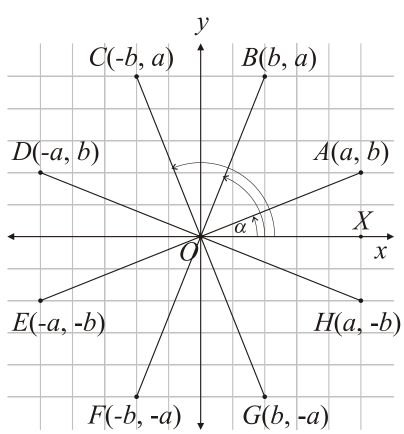
$$\tan\theta = \frac{ordinat\ titik\ P}{absis\ titik\ P} = \frac{b}{a}\ ,\ a \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{ordinat\ titik\ P} = \frac{r}{b},\ b \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{absis\ titik\ P} = \frac{r}{a},\ a \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{absis\ titik\ P}{ordinat\ titik\ P} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

Perbandingan Trigonometri sudut-sudut berrelasi



Pada gambar di samping, sudut α merupakan sudut dalam posisi baku. Dengan demikian, besar sudut-sudut berelasi yang lain adalah sebagai berikut:

a. $\angle XOH = -\alpha$ atau $\angle XOH = 360° - \alpha$
b. $\angle XOB = 90° - \alpha$
c. $\angle XOC = 90° + \alpha$
d. $\angle XOD = 180° - \alpha$
e. $\angle XOE = 180° + \alpha$
f. $\angle XOF = 270° - \alpha$
g. $\angle XOG = 270° + \alpha$

Bedasarkan definisi perbandingan trigonometri untuk sudut α, berlaku:

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a}\ ,\ a \neq 0$$

Pandang $\angle XOH = -\alpha$, berdasarkan definisi perbandingan trigonometri, maka

$$\sin(-\alpha) = \frac{ordinat\ titik\ H}{r} = \frac{-b}{r} = -\sin\alpha, \quad \text{dengan demikian} \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$\cos(-\alpha) = \frac{absis\ titik\ H}{r} = \frac{a}{r} = \cos\alpha,$ dengan demikian $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = \frac{ordinat\ titik\ H}{absis\ titik\ H} = \frac{-b}{a} = -\tan\alpha,$ dengan demikian $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Pandang $\angle XOB = 90° - \alpha$, dan $B(b, a)$ maka

$\sin(90° - \alpha) = \frac{ordinat\ titik\ B}{r} = \frac{a}{r} = \cos\alpha,$ dengan demikian $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \frac{absis\ titik\ B}{r} = \frac{b}{r} = \sin\alpha,$ dengan demikian $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(90° - \alpha) = \frac{ordinat\ titik\ B}{absis\ titik\ B} = \frac{a}{b} = \cot\alpha,$ dengan demikian $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$

Dengan cara seperti di atas, maka perbandingan trigonometri untuk sudut berelasi yang lain adalah:

$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(90° + \alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\theta$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\theta$

$\tan(180° - \alpha) = -\tan\theta$

$\sin(270° - \alpha) = -\cos\theta$

$\cos(270° - \alpha) = -\sin\theta$

$\tan(270° - \alpha) = \cot\theta$

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\theta$

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\theta$

$\tan(180° + \alpha) = \tan\theta$

$\sin(270° + \alpha) = -\cos\theta$

$\cos(270° + \alpha) = \sin\theta$

$\tan(270° + \alpha) = -\cot\theta$

Latihan:

i. Bagaimana cara membuktikan rumus-rumus di atas dan berilah contoh-contoh soalnya?

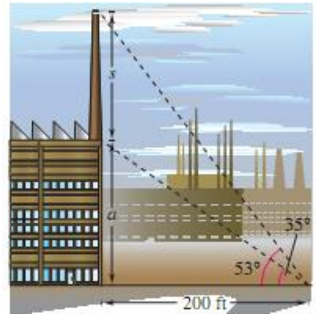
ii. Bagaimana mengingat rumus di atas setelah siswa memahami cara mendapatkannya?

Perhitungan pada segitiga Siku-siku

Selesaikan permasalahan-permasalahan berikut, gunakan kalkulator jika diperlukan:

1. Sebuah petunjuk keselamatan operasional mobil tangga pemadam kebakaran menyatakan bahwa sudut elevasi maksimum tangga adalah 72°. Jika panjang maksimum tangga pada mobil tersebut adalah 30 meter, berapakah batas aman ketinggian yang dapat dicapai?

2. Pada jarak 200 kaki dari dasar sebuah gedung, sudut elevasi bagian bawah cerobong asap adalah 35°, sementara itu sudut elevasi bagian puncaknya adalah 53° seperti terlihat pada gambar. Tentukan tinggi cerobong asap tersebut dihitung dari puncak gedung (s).



Latihan: Selesaikan kedua problem di atas.

Identitas Trigonometri

Identitas merupakan kesamaan yang menghubungkan dua ekspresi. Suatu identitas akan benar jika untuk setiap nilai pengganti untuk peubahnya, ruas kiri bernilai sama dengan ruas kanan. Identitas trigonometri merupakan identitas yang memuat perbandingan atau fungsi trigonometri.

1. Identitas fundamental dan identitas Pythagoras

$\sin A = \frac{1}{\csc A}$

$\cos A = \frac{1}{\sec A}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

2. Langkah-langkah pembuktian
   a. Ubah salah satu sisi (ruas) yang rumit sampai diperoleh sisi yang lain.
   b. Ubah kedua sisi sehingga diperoleh ekspresi yang sama.

3. Strategi Pembuktian
   a. Ubah semua ekspresi ke sinus atau cosinus
   b. Ubah ekspresi menjadi bentuk yang sesederhana mungkin
   c. Kalikan ekspresi yang bernilai 1.
   d. Tambahkan dengan ekspresi yang bernilai nol.
   e. Pergunakan identitas fundamental dan identitas pythagoras serta perbandingan trigonometri sudut yang berrelasi.

Contoh soal:

Buktikan

$$1 + \cos A = \frac{(\sin A)^2}{1 - \cos A}$$

Bukti:

Ruas kiri diuraikan

$1 + \cos A = (1 - \cos A) \times \frac{1-\cos A}{1-\cos A}$ dengan $\cos A \neq 1$

$= \frac{1-(\cos A)^2}{1-\cos A}$

$= \frac{(\sin A)^2}{1-cos\ A}$ terbukti.

Grafik fungsi Trigonometri

Melukis Grafik fungsi trigonometri menggunakan tabel

Langkah-langkah melukis dengan bantuan tabel:

1. Susun tabel nilai untuk beberapa nilai x pada rentang yang diminta, kemudian tentukan nilai y yang bersesuaian (bisa dengan memilih x sudut-sudut istimewa, atau x bebas dan nilai y dicari dengan bantuan kalkulator atau lingkaran satuan)
2. Tentukan titik-titik yang bersesuaian.
3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva mulus.

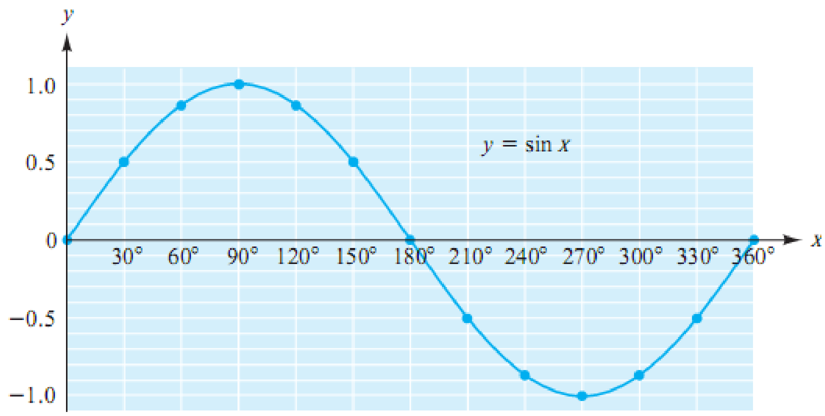
Contoh:

1. Grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 360°$

   Untuk grafik $y = \sin x$, lengkapi tabel di bawah,

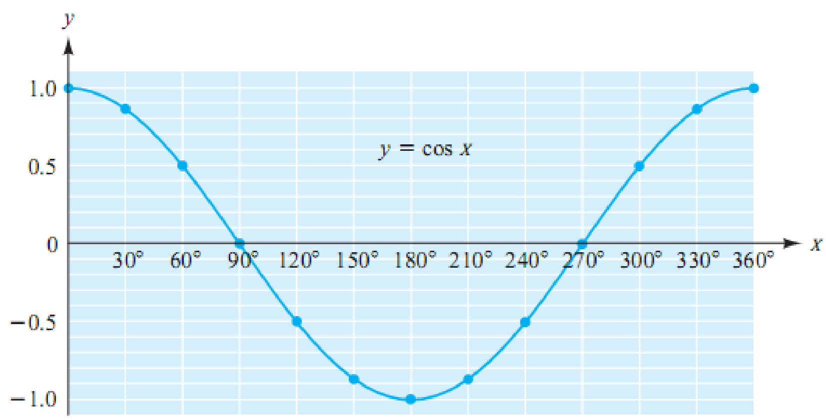
x	0	30°	45°	60°	90°	…	…	…	…	360°
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$ 0,71	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx$ 0,87	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx$ 0,87	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$ 0,71	$\frac{1}{2}$	…	0

Setelah nilai x dan y yang bersesuaian pada tabel di atas dipindahkan ke sistem koordinat kartesius dan dihubungkan dengan kurva mulus, diperoleh grafik $y = \sin x$.



Untuk grafik $y = \cos x$ (lengkapi tabel di bawah)

x	0	30°	45°	60°	90°	...	...	...	...	360°
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx$ 0,87	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$ 0,71	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$ −0,71	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx$ −0,87	...	0

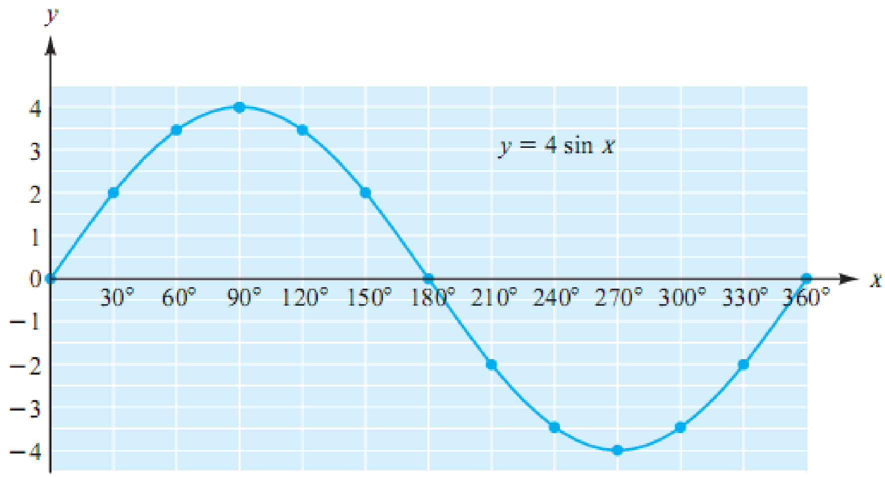


2. Grafik $y = 4 \sin x$ untuk $0 \leq x \leq 360°$

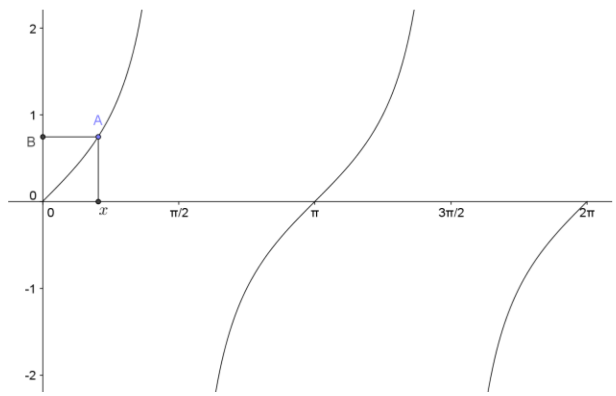
   Tabel nilai-nilai y untuk beberapa nilai x adalah sebagai berikut.

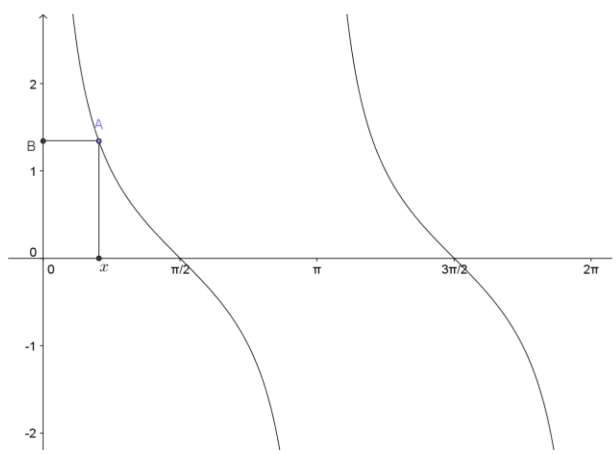
x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	0	2.0	3.5	4	3.5	2.0	0	−2.0	−3.5	−4	−3.5	−2.0	0

   Dari tabel di atas, diperoleh grafik



3. Dengan cara serupa dengan cara memperoleh grafik di atas, grafik $y = \tan x$ dan $y = \cot x$ adalah seperti gambar berikut.

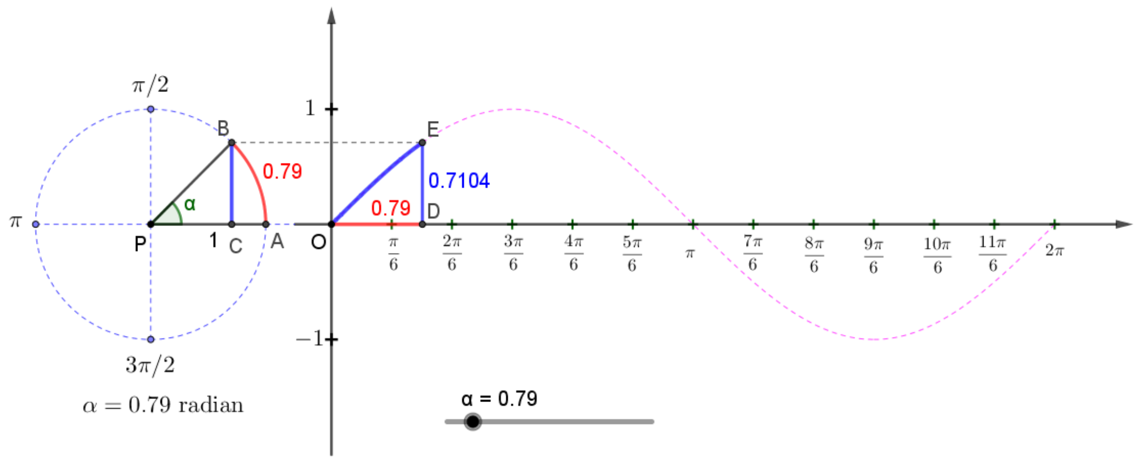


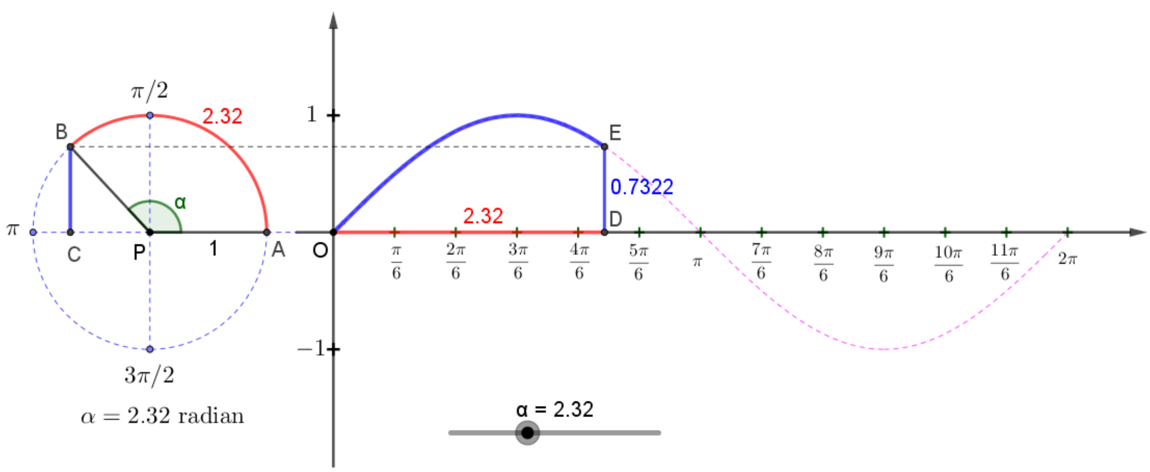


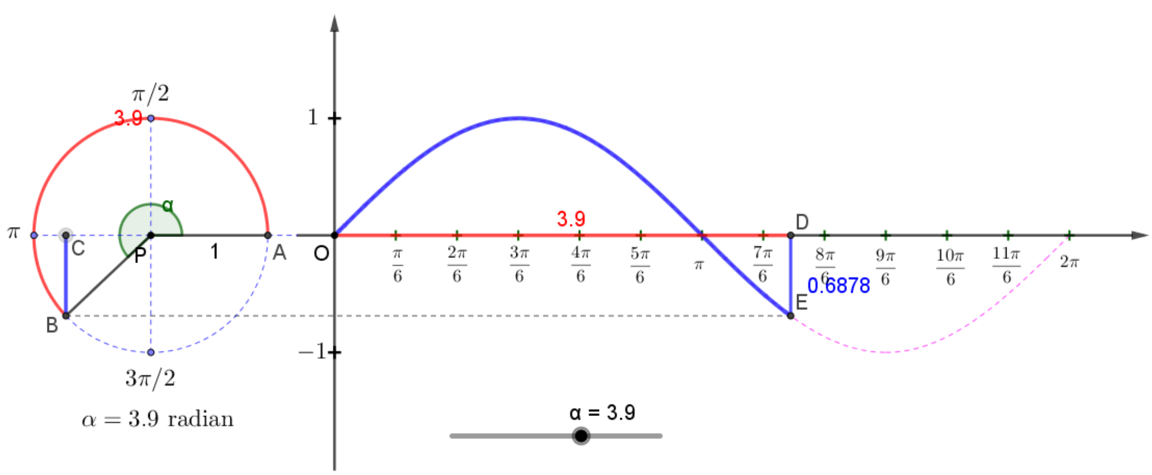
Melukis grafik fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan

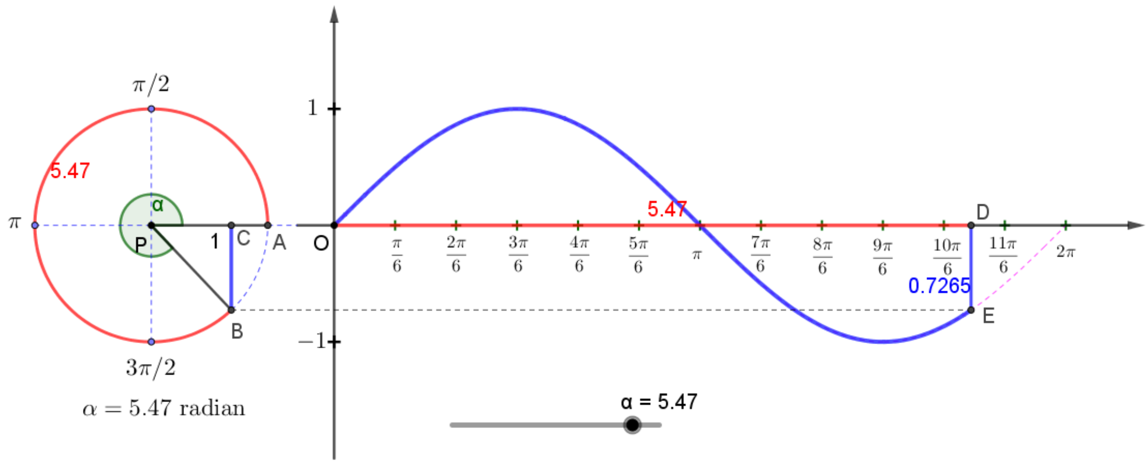
Nilai y pada grafik fungsi trigonometri dapat juga ditentukan dengan menggunakan lingkaran satuan.

Perhatikan ilustrasi berikut.

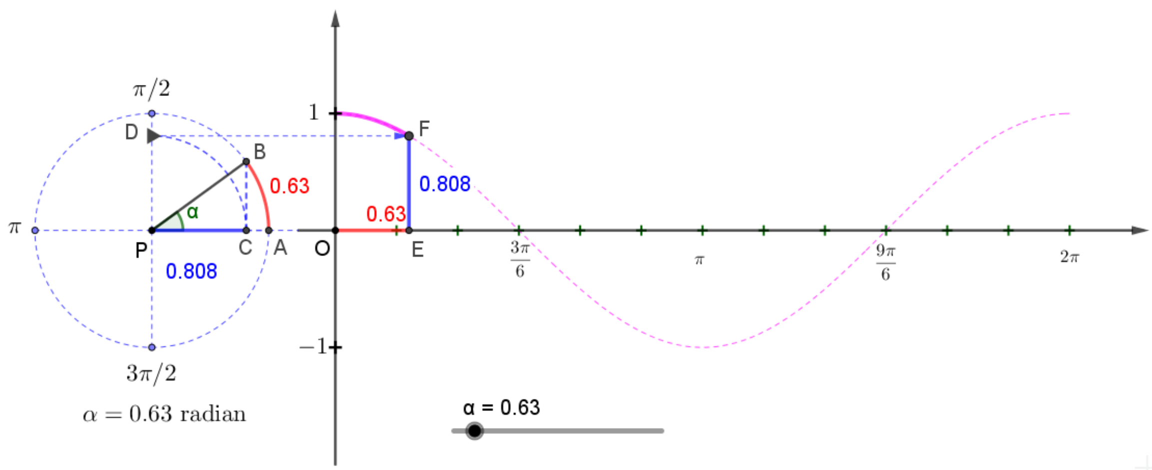


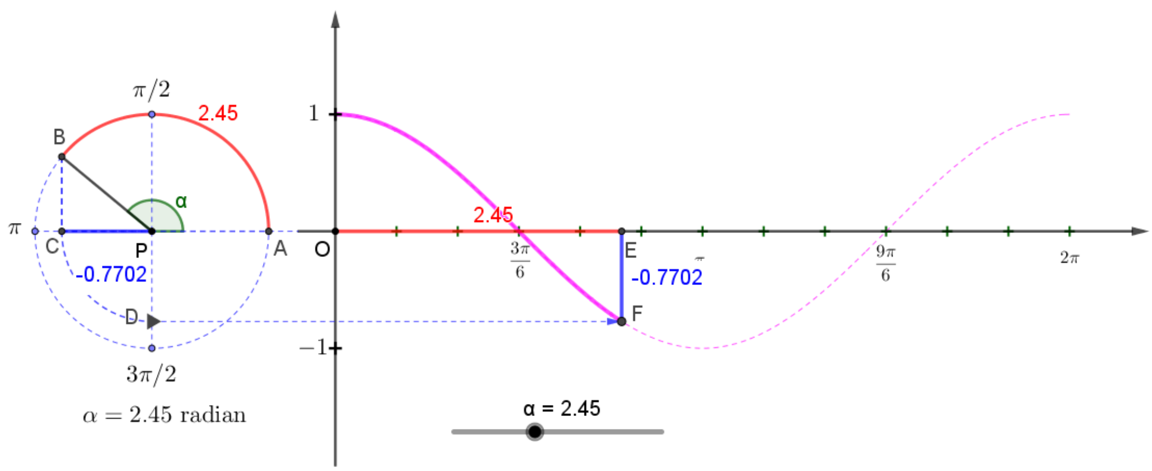


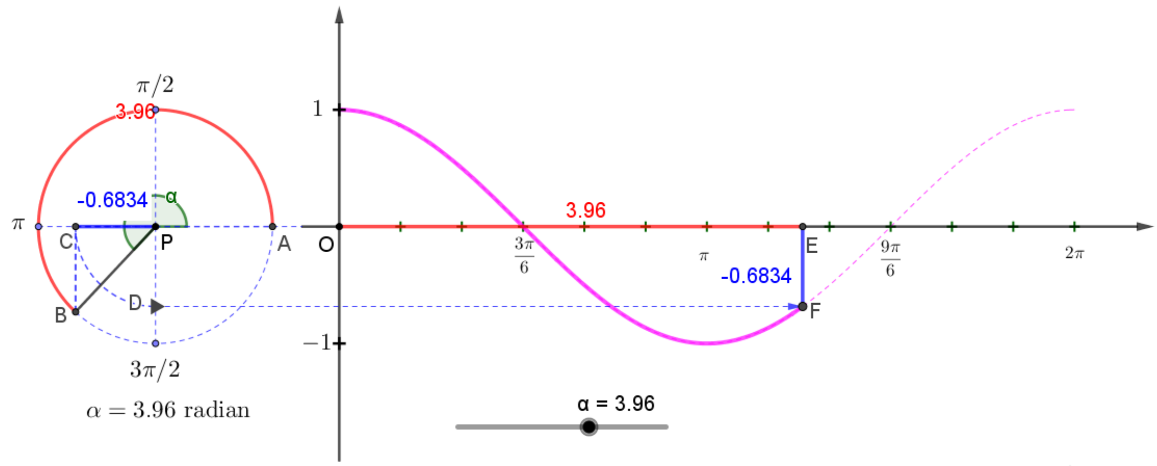


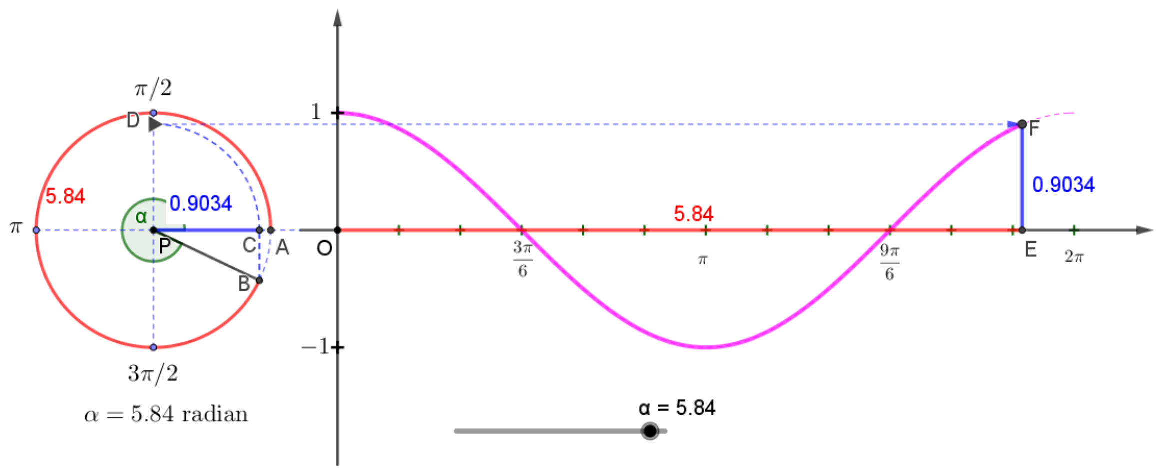


Grafik $y = \cos x$







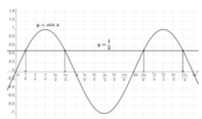


Grafik $y = \tan x$

Tugas: Buatlah sketsa untuk dua grafik berikut:

1. Grafik $y = \sec x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$
2. Grafik $y = \csc x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Persamaan Trigonometri Sederhana



Gambar di atas merupakan grafik $y = \sin x$ dan $y = 1/2$. Perhatikan bahwa kedua grafik berpotongan di $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, dan seterusnya berulang secara periodik. Secara umum, penyelesaian persamaan trigonometri yang sederhana adalah sebagai berikut:

1. Bentuk $\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ atau $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$
2. Bentuk $\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \pm\alpha + k \cdot 2\pi$
3. Bentuk $\tan x = \tan \alpha$ maka $x = \alpha + k \cdot \pi$
4. Bentuk $\sin x = a$, $\cos x = a$, dan $\tan x = a$ maka nilai a harus diubah menjadi bentuk perbandingan trigonometri yang sesuai terlebih dahulu.

Koordinat Kutub

Dalam sistim koordinat kartesius, posisi suatu titik T pada bidang dinyatakan dengan pasangan berurutan (a, b) dengan a dan b berturut-turut menyatakan posisi titik terhadap sumbu-x dan sumbu-y. Alternatif lain untuk menyatakan posisi titik T pada bidang adalah dengan menggunakan koordinat kutub (polar). Perhatikan gambar di samping, lokasi suatu titik P dinyatakan dalam (r, α) dimana r menyatakan jarak P terhadap titik O, dan α menyatakan sudut yang dibentuk oleh OP terhadap sinar OX.

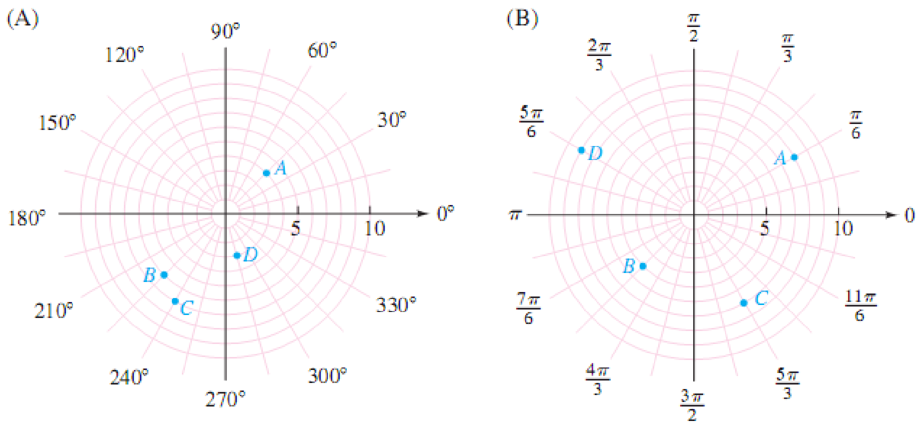
Dalam beberapa bidang, penggunaan sistim koordinat kutub lebih menguntungkan dibandingkan koordinat kartesius.

Contoh:

Tentukan posisi titik-titik berikut pada sistem koordinat kutub

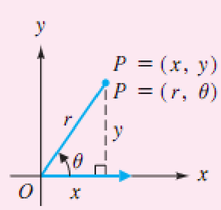
i. $A(4,45^\circ)$, $B(-6,45^\circ)$, $C(7,240^\circ)$, $D(3,-75^\circ)$

ii. $A(4,\ \frac{\pi}{6})$, $B\left(-6,\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $C(7,\ \frac{5\pi}{6})$, $D(3,\ \frac{5\pi}{12})$



Mengubah koordinat kutub ke koordinat kartesius dan sebaliknya.

Pada gambar di bawah, perhatikan posisi titik P. Jika panjang $OP = r$, maka berlaku hubungan:



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad x = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Dengan demikian

1. Jika diketahui koordinat kartesius titik P adalah (x, y) maka koordinat kutub titik P adalah (r, α) dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.
2. Jika diketahui koordinat kutub titik P adalah (r, θ) maka koordinat kartesius titik P adalah (x, y) dengan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.

Contoh:

Tentukan koordinat Kartesius titik-titik berikut:

a. $P(6, 30^\circ)$ b. $Q(4, \frac{2\pi}{3})$

Penyelesaian

a. Diketahui titik $P(6, 30°)$, maka $r = 6$ dan $\alpha = 30°$. Sehingga

$x = r \cdot \cos\alpha = 6 \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$y = r \cdot \sin\alpha = 6 \cdot \sin 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

Jadi koordinat Kartesius titik P adalah $P(3\sqrt{3}, 3)$

b. Diketahui titik $Q(4, \frac{2\pi}{3})$, maka $r = 4$ dan $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Sehingga

$x = r \cdot \cos\alpha = 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

$y = r \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Jadi koordinat Kartesius titik Qadalah $Q(-2, 2\sqrt{3})$.

Contoh:

Tentukan koordinat Kutub dari titik-titik berikut:

a. $A(3, 3\sqrt{3})$ b. $B(-4, 3)$

Penyelesaian

a. Diketahui $A(3, 3\sqrt{3})$ maka $x = 3$ dan $y = 3\sqrt{3}$, sehingga

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, sehingga $\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$, karena A di kuadran I, diperoleh $\alpha = 60°$.

Jadi, koordinat kutub titik A adalah $(6, 60°)$ atau $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$.

b. Diketahui $B(-4, 3)$ maka $x = -4$ dan $y = 3$, sehingga

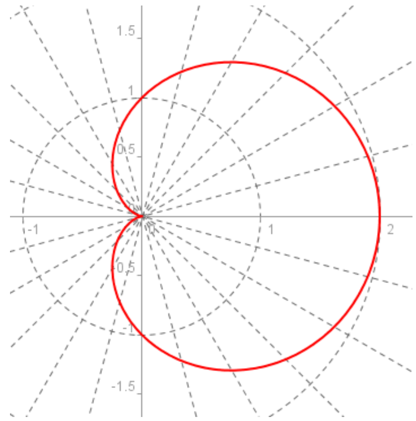
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}$, sehingga $\tan\alpha = -\tan 36{,}87°$ (gunakan kalkulator). Karena B di kuadran II, diperoleh $\alpha = 180° - 36{,}87° = 143{,}13°$.

Jadi, koordinat kutub titik B adalah $(5,\ 143{,}13°)$.

Diskusikan:

Gambar di samping merupakan grafik dengan persamaan $r = 1 + \cos\theta$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Bagaimana langkah-langkah melukis grafik tersebut?



Aturan-aturan dalam Segitiga

Luas Segitiga

Diberikan segitiga ABC, dengan panjang sisi $AB = c$, $AC = b$, dan $BC = a$, dan AD garis tinggi dari titik A ke BC. Misalkan L_{ABC} menyatakan luas segitiga ABC, dengan memandang BC sebagai alas dan AD sebagai garis tinggi, maka $L_{ABC} = \frac{a \cdot AD}{2}$. Sementara itu dengan menggunakan definisi sinus pada segitiga siku-siku, AD dapat dinyatakan dalam dua cara, yaitu $AD = c \cdot \sin B$ atau $AD = b \cdot \sin C$. Akibatnya

$$L_{ABC} = \frac{BC \ \cdot AB \sin B}{2} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

Atau

$$L_{ABC} = \frac{BC \ \cdot AC \sin C}{2} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

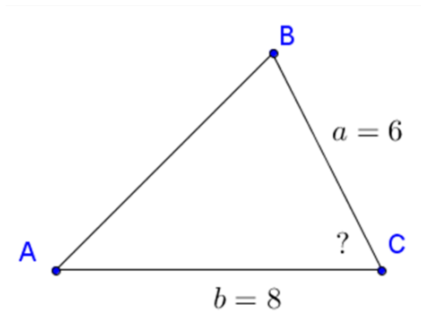
Dengan memandang AC sebagai alas, dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$$L_{ABC} = \frac{AC \ \cdot AB \sin A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Contoh:

Diketahui sebuah segitiga ABC dengan $a = 6$, dan $b = 8$. Jika luas segitiga ABC adalah $12\sqrt{3}$, hitunglah besar sudut C.

Penyelesaian:



$$Luas = \frac{1}{2} \cdot ab \sin C$$
$$12\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin C$$
$$\sin C = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$C = 60^\circ \text{ atau } C = 120^\circ$$

Jadi besar sudut C adalah 60° atau 120°.

Aturan Sinus

Dari rumus luas segitiga diperoleh hubungan

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Jika seluruhnya dikalikan dengan $\frac{2}{abc}$ akan diperoleh

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

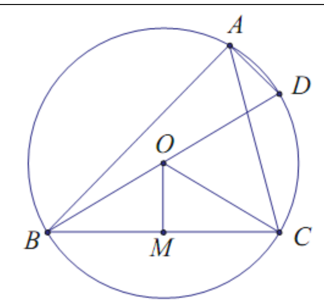
Atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan di atas dinamakan sebagai aturan sinus.

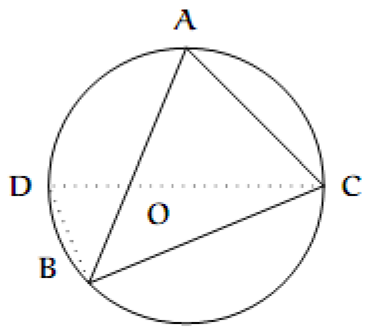
Pandang segitiga ABC dengan lingkaran luarnya seperti pada gambar di samping. Misalkan O adalah titik pusat lingkaran, maka $\angle BOC = 2\angle CAB$. Perhatikan bahwa OB=OC, sehingga segitiga BOC sama kaki dan $\angle OBC = \angle OCB$. Ambil M titik tengah BC, akibatnya $a = 2 \cdot BM$ dan $\angle CAB = \angle BOM$ (mengapa?). Dengan demikian pada segitiga siku-siku BOM berlaku $BM = OB \cdot \sin(\angle BOM) = OB \cdot \sin A$.

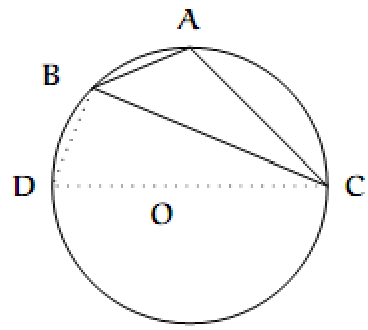
Diperoleh $\frac{a}{\sin A} = \frac{2 \cdot BM}{\sin A} = 2 \cdot OB = 2R$, dengan R jari-jari lingkaran luar segitiga ABC.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Alternatif lain:





Untuk kasus segitiga ABC lancip. Buat lingkaran luar, misalkan berjari-jari R.

DC diameter lingkaran, dengan demikian DC=2R . Karena DC diameter, maka segitiga DBC siku-siku di B. Dengan demikian $\sin D = \frac{a}{2R}$. Sudut BDC dan BAC menghadap busur yang sama, akibatnya $\sin A = \frac{a}{2R}$. Sehingga diperoleh hubungan $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Sebagai latihan, buktikan juga untuk kasus segitiga ABC tumpul.

(junior_problem_seminar-complete.pdf)

Contoh:

Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 2$, panjang sisi $AC = 1$ dan $\angle CBA = 30°$. Tentukan

a. Besar sudut C.
b. Besar sudut A.
c. Panjang sisi BC.

Penyelesaian:

Diketahui $AB = c = 1$, $AC = b = 2$, dan $\angle B = 30°$.

a. Besar sudut C dicari dengan

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{2}{\sin 30°} = \frac{1}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{\sin 30°}{2}$$

$$\sin C = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Dengan bantuan kalkulator diperoleh besar sudut $C = \arcsin \frac{1}{4} = 14{,}48°$.

b. Besar $\angle A$ dicari dengan sifat jumlah sudut segitiga adalah 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$\angle A + 30° + 14{,}48° = 180°$$
$$\angle A = 135{,}52°$$

Jad besar sudut A adalah 135,52°

c. Panjang sisi BC dicari dengan $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

Dengan demikian $a = \frac{\dot{b}}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{1}{(1/2)} \cdot \sin 135{,}52° = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4$. Jadi panjang sisi BC adalah 1,4.

Aturan Cosinus

Pandang segitiga ABC, dengan AB sebagai alas dan CD garis tinggi dari titik C. Pada segitiga BCD, $BD = a\cos B$ dan $CD = a\sin B$, akibatnya $AD = c - a\cos B$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$\begin{aligned} b^2 &= CD^2 + AD^2 = a^2 \sin B + (c - a\cos B)^2 \\ &= a^2 \sin^2 B + c^2 + a^2 \cos^2 B - 2ac\ \cos B \\ &= c^2 + a^2 - 2ac\cos B \end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, dapat ditemukan hubungan untuk sisi-sisi dan sudut-sudut yang lain sehingga pada setiap segitiga ABC berlaku:

a. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
b. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
c. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Contoh soal 7

Pada ΔABC diketahui panjang $a = 6, b = 3$ dan $\angle ACB = 60°$. Tentukan panjang sisi c.

Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi di samping.

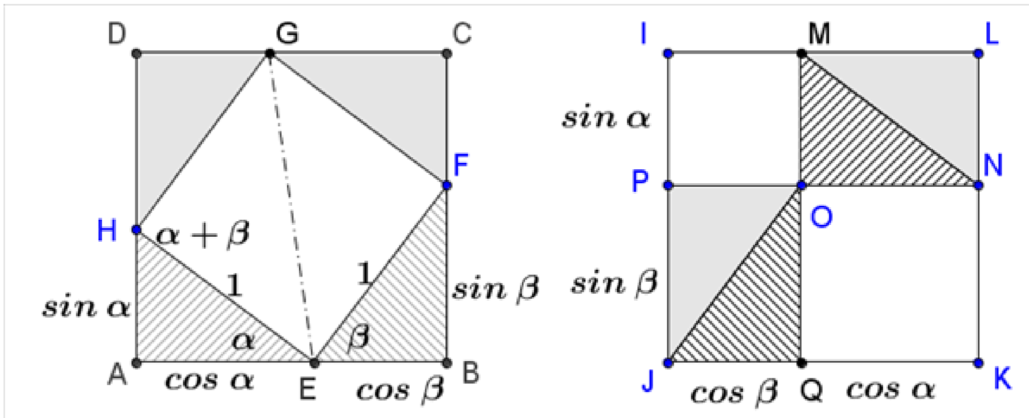
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ &= 6^2 + b^3 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 60° \\ &= 36 + 9 - 18 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$c = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Jadi panjang sisi c adalah $3\sqrt{3}$

Perbandingan Trigonometri Jumlah dan selisih dua Sudut

Perhatikan ilustrasi berikut:



Segitiga AEH kongruen dengan CGF, BEF kongruen dengan DGH. Panjang $EH = FE = 1$, besar sudut FEB dan AEH berturut-turut β dan α. Panjang sisi FB, BE, EA, dan AH berturut-turut dapat dinyatakan dalam $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$, dan $\sin\alpha$. Dapat ditunjukkan juga bahwa $\angle EHG = \alpha+\beta$. Dengan menggunakan rumus luas segitiga, diperoleh

$$Luas\ EFGH = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot EH\cdot GH\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

Selanjutnya segitiga-segitiga seperti gambar sebelah kiri digeser sehingga menjadi gambar kanan, maka diperoleh hubungan

$$Luas\ EFGH = Luas\ IMOP + Luas\ ONKQ$$

Sehingga

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Dengan mengubah $(\alpha-\beta) = \alpha + (-\beta)$ dapat diturunkan rumus

$$\sin\,(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

Ingat kembali rumus $\sin(90° - \theta) = \cos\ \theta$, maka

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \sin\big(90° - (\alpha+\beta)\big)\\ &= \sin\big((90°-\alpha)-\beta\big)\\ &= \sin(90°-\alpha)\cos\beta - \cos(90°-\alpha)\cos\beta\end{aligned}$$

Jadi

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Untuk rumus kosinus selisih dua sudut,

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta)$ sehingga

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Rumus perbandingan trigonometri jumlah dan selisih dua sudut

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
3. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
4. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$
5. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

Latihan:

i. Buktikan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut di atas.
ii. Adakah syarat yang harus dipenuhi untuk masing-masing rumus di atas?
iii. Buatlah rumus-rumus untuk perbandingan trigonometri sudut ganda.

Contoh:

Tanpa menggunakan tabel dan kalkulator, tentukan nilai

a. $\sin 75°$
b. $\cos 15°$

Penyelesaian:

a. $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

b. $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

Soal Latihan

Kerjakan soal-soal berikut lengkap dengan penjelasannya.

1. Penampang kuda-kuda atap sebuah rumah tampak seperti gambar di samping

   Panjang BC adalah …

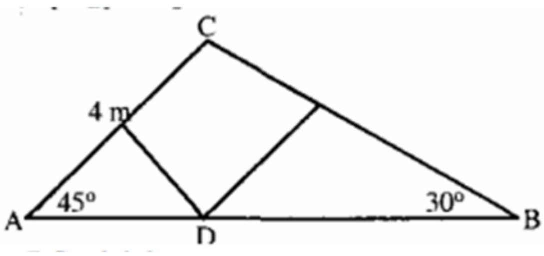
   A. $\sqrt{2}$ m

   B. $2\sqrt{2}$ m

   C. $3\frac{1}{2}\sqrt{2}$ m

   D. $3\sqrt{2}$ m

   E. $4\sqrt{2}$ m



2. Di antara pilihan berikut, manakah besar sudut yang sama dengan $120°$?

   A. $\frac{\pi}{5}$ radian

   B. $\frac{\pi}{3}$ radian

   C. $\frac{2\pi}{5}$ radian

   D. $\frac{3\pi}{5}$ radian

   E. $\frac{2\pi}{3}$ radian

   Catatan soal asli: “Nilai dari $120° = \cdots$.

3. Diketahui $\sin\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$, $0° < \alpha < 90°$. Nilai $\cos\alpha = \cdots$.

A. 1
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{1}{8}$

4. Nilai dari $\frac{\sin 30° + \cos 330° + \sin 150°}{\tan 45° + \cos 120°} = \cdots$.

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
B. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
C. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
D. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
E. $\frac{1+2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$

5. Diketahui $\tan A = \frac{1}{3}$ dengan $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, maka nilai $\sin A \cdot \cos A = \cdots$.

A. $-\frac{2}{3}$
B. $-\frac{1}{5}$
C. $-\frac{2}{7}$
D. $-\frac{2}{5}$
E. $-\frac{3}{5}$

6. Nilai dari $\sin 300°$ adalah ....

A. $\sqrt{3}$
B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
C. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
D. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
E. $-\sqrt{3}$

7. Nilai $\sin 75° + \sin 15°$ adalah ....

A. -1
B. 0
C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
E. 1

8. Diketahui $\cos A = \frac{4}{5}$, $0° < A < 90°$, maka $\cos 2A = \cdots$.

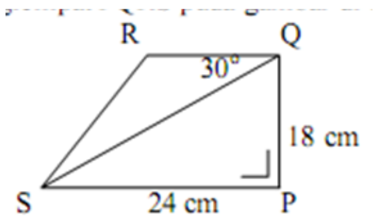
A. $\frac{24}{25}$
B. $\frac{8}{10}$
C. $\frac{6}{10}$
D. $\frac{7}{25}$
E. $\frac{4}{25}$

9. Jika $\sin A = \frac{3}{5}$, A sudut pada kuadran II, maka $\cos A = \cdots$.

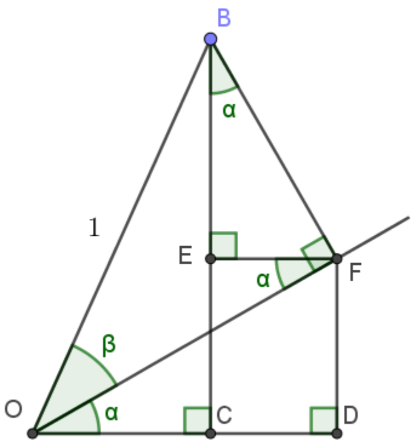
   A. -1
   B. $-\frac{4}{5}$
   C. 0
   D. $\frac{4}{5}$
   E. 1

10. Luas segiempat PQRS pada gambar berikut adalah …

    A. 120 cm^2.
    B. 216 cm^2.
    C. 324 cm^2.
    D. 336 cm^2.
    E. 900 cm^2.



11. Berikut salah satu proses untuk mendapatkan rumus $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ menggunakan sifat-sifat bangun geometri yang dipelajari di SMP dan konsep perbandingan trigonometri.



$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{1} = BC$$
$$= BE + EC = BE + FD$$
$$\angle OFE = \alpha \Rightarrow \angle EFB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle EBF = \alpha$$
$$FB = OB \cdot \sin\beta = \sin\beta$$
$$OF = OB \cdot \cos\beta = \cos\beta$$
$$BE = FB \cdot \cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$$
$$FD = OF \cdot \sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$
$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Bukti di atas mudah dipahami, namun memiliki keterbatasan. Tunjukkan di mana keterbatasan tersebut.

12. Diketahui ΔABC dengan sudut-sudut $\alpha, \beta,$ dan γ. Jika berlaku $\sin\gamma = \tan\beta\,(1 - \cos\gamma)$, buktikan bahwa ΔABC sama kaki.

    Pembahasan:

    Diketahui:

ΔABC dan berlaku $\sin \gamma = \tan \beta\,(1 - \cos \gamma)$

Diminta bukti:

ΔABC sama kaki.

Bukti

Karena ΔABC sama kaki, akan ditunjukkan bahwa $\alpha = \beta$.

Jumlah sudut segitiga adalah 180°, akibatnya $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

Dengan substitusi ke $\sin \gamma = \tan \beta\,(1 - \cos \gamma)$ diperoleh:

$$\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = \tan \beta\,(1 - \cos\big(180° - (\alpha + \beta)\big)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot (1 + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin \beta\,(1 + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \beta \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \sin \beta \cdot (1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$\sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta = \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \beta - \sin \alpha \sin^2 \beta$$

$$\sin \alpha \cos^2 \beta + \sin \alpha \sin^2 \beta = \sin \beta$$

$$\sin \alpha\,(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \sin \beta$$

$$\sin \alpha \cdot 1 = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$\alpha = \beta$ atau $\alpha = 180° - \beta$

Untuk $\alpha = 180° - \beta \rightarrow \alpha + \beta = 180°$ tidak dipenuhi, karena $\gamma = 0°$.

Karena $\alpha = \beta$, maka ΔABC sama kaki.

Daftar Pustaka

Dale Ewen & C. Robert Nelson, 2007, *Elementary Technical Mathematics (10th Edition)*, Belmont, CA: Brooks/Cole

Husein Tampomas, 2007, *Seribu Pena Matematika SMA kelas X*, Jakarta: Erlangga

Husein Tampomas, 2007, *Seribu Pena Matematika SMA kelas XI*, Jakarta: Erlangga

Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen & Dave Sobecki, 2009, *Analytic Trigonometry with Applications (10th Edition)*, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Titu Andreescu & Zuming Feng, 2005, *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*, Boston: Birkhäuser