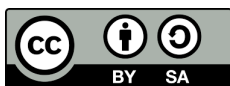


# Simulazione II Prova scritta del 28/02/2019: Licei Scientifici

Prof. G. Forte\*

a. a. 2018/2019

Quest'opera è rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione–Condividi allo stesso modo 3.0 Italia. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/> o spedisci una lettera a: *Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.*



**N. B.= Nelle tracce sono presenti gravi errori dimensionali**

## 1 Problemi

**Problema 1.1.** *Assegnate due costanti reali  $a$  e  $b$  (con  $a > 0$ ), si consideri la funzione  $q(t)$  così definita:*

$$q(t) = ate^{bt} \quad (1)$$

- A seconda dei possibili valori di  $a$  e  $b$ , discutere se nel grafico della funzione  $q(t)$  è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di  $a$  e  $b$  in corrispondenza dei quali il grafico della funzione  $q(t)$ , in un piano cartesiano di coordinate  $(t, y)$ , ha un massimo nel punto  $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$ .*
- Assumendo, d'ora in avanti, di avere  $a = 4$  e  $b = -1/2$ , studiare il grafico della funzione in Eq. (1). Si verifichi, in particolare, che  $q(t)$  è caratterizzata da un flesso nel punto  $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$  e si determini l'equazione della retta tangente al grafico di  $q(t)$  nel punto  $F$ .*
- Supponendo che la funzione  $q(t)$  rappresenti, per  $t \geq 0$ , la carica elettrica (misurata in  $C$ ) che attraversa all'istante di tempo  $t$  (misurato in  $s$ ) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti  $a$  e  $b$  sopra indicate. Sempre assumendo  $a = 4$  e  $b = -1/2^1$ , esprimere l'intensità*

---

\*[gforte@outlook.it](mailto:gforte@outlook.it)

<sup>1</sup> Questo modo di esprimere  $a$  e  $b$ , in questo particolare problema, è sbagliato e rappresenta un errore gravissimo nella dichiarazione delle costanti fisiche numeriche, in quanto conduce immediatamente ad inconsistenze di tipo dimensionale.

di corrente  $i(t)$  che fluisce nel conduttore all'istante  $t$ ; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per  $t_0 \geq 0$ , con  $Q(t_0)$  la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo  $[0, t_0]$ , determinare a quale valore tende  $Q(t_0)$  per  $t_0 \rightarrow +\infty$ . Supponendo che la resistenza del conduttore sia  $R = 3\Omega$ , scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo  $[0, t_0]$ .

## Soluzione

Come commento preliminare e generale, si osservi che il **campo di esistenza** della funzione è tutto  $\mathbb{R}$ . Inoltre, la funzione è **ovunque continua** e, per futura convenienza, riportiamo anche le derivate prima e seconda di  $q(t)$ :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = a(1 + bt)e^{bt} \quad (2)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = ab(2 + bt)e^{bt} \quad (3)$$

dove, per questioni che diverranno chiare fra un attimo, abbiamo chiamato  $i(t)$  la funzione derivata prima.

Possiamo anche discutere la positività della funzione in maniera agevole. Infatti,  $q(t)$  è il prodotto di una funzione sempre positiva ( $e^{bt}$ ) per una funzione ( $at$ ) **negativa** quando  $t \leq 0$  e **positiva** quando  $t > 0$ . Inoltre  $q(0) = 0$  rappresenta l'**unica intersezione** con entrambi gli assi. Dunque, **indipendentemente da  $a$  e  $b$** , il grafico di  $q(t)$  si trova nel primo e nel terzo quadrante e passa per lo zero.

1. Possiamo distinguere tre casi

- (a) **Caso  $b = 0$** . In questo caso la Eq. (1) rappresenta una retta **crescente** (perché  $a > 0$  per ipotesi) di coefficiente angolare  $a$ , passante per l'origine degli assi e dunque non ha né minimi, né massimi.
- (b) **Caso  $b > 0$** . Quando  $t \rightarrow -\infty$ ,  $q(t)$  tende a  $0^-$ , mentre la funzione diverge per  $t \rightarrow +\infty$ . Dunque, senza fare nessun conto e tenendo conto della positività della funzione, è possibile dire che il grafico avrà (almeno) un minimo nel terzo quadrante, risalirà verso lo 0 ed esploderà ad infinito, ovvero il grafico di  $q(t)$  sarà della forma qualitativa data in Fig. 1a.

Verifichiamo in maniera quantitativa la previsione rozza rappresentata in Fig. 1a. Controlliamo per quali valori di  $t$  risulta  $q(t)$  crescente e per quali risulta invece decrescente. Utilizzando Eq. (2) troviamo che

$$i(t) = a(1 + bt)e^{bt} > 0 \quad \rightarrow \quad t > -\frac{1}{b}$$

e che  $\tilde{t} = -1/b$  è l'**unico** punto stazionario (i. e.  $i(\tilde{t}) = 0$ ) per  $q(t)$ <sup>2</sup>. Dunque la funzione  $q(t)$  è strettamente decrescente fino a  $\tilde{t} = -1/b$  e

<sup>2</sup>Il fatto che  $\tilde{t}$  sia unico assicura che  $q(t)$  sia strettamente monotona nei rispettivi intervalli di crescita e decrescenza

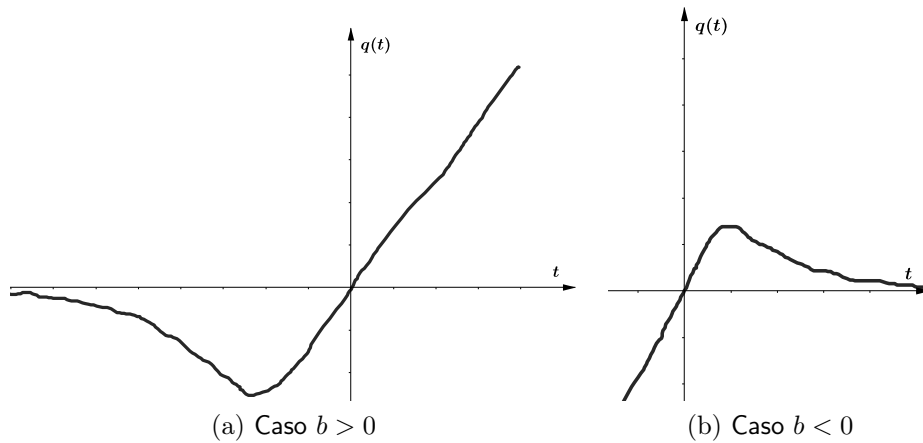


Figura 1

strettamente crescente per  $t > \tilde{t}$ , da cui segue che  $\tilde{t}$  deve necessariamente essere l'**unico punto di minimo** della funzione.

- (c) **Caso  $b < 0$ .** Quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $q(t)$  tende a  $0^+$ , mentre la funzione tende a  $-\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ . Dunque, senza fare nessun conto, è possibile dire che il grafico passa dal terzo quadrante crescendo fino all'origine degli assi e dall'origine degli assi fino ad (almeno) un massimo nel primo quadrante. A questo punto la funzione decresce a zero per tempi lunghi ( $t \rightarrow +\infty$ ). Con le informazioni che abbiamo acquisito fin ora, abbiamo motivo di ritenere che, nel caso  $b < 0$ ,  $q(t)$  sia della forma qualitativa data in Fig. 1b.

Verifichiamo in maniera quantitativa la previsione rozza rappresentata in Fig. 1b. Controlliamo per quali valori di  $t$  risulta  $q(t)$  crescente e per quali risulta invece decrescente. Ricordiamo che  $b < 0$ , dunque possiamo scrivere  $b = -|b|$ . Utilizzando Eq. (2) troviamo che

$$i(t) = a(1 - |b|t)e^{-|b|t} > 0 \quad \rightarrow \quad t < \frac{1}{|b|}$$

e che  $\tilde{t} = -1/b$  è l'**unico punto stazionario** (i. e.  $i(\tilde{t}) = 0$ ) per  $q(t)$ . Dunque la funzione  $q(t)$  è strettamente **crescente** fino a  $\tilde{t} = -1/b = 1/|b|$  e strettamente **decrescente** per  $t > \tilde{t}$ , da cui segue che  $\tilde{t}$  deve necessariamente essere l'unico (in questo caso) punto di **massimo**.

Affinché  $q(t)$  abbia un massimo in  $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$ ,  $a$  e  $b$  devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2 = -\frac{1}{b} \\ \frac{8}{e} = -\frac{a}{be} \end{cases}$$

ovvero dobbiamo imporre che sia  $a = 4$ ,  $b = -1/2$ .

2. Utilizzando Eq. (3) troviamo che

$$\frac{di(t)}{dt} = -2\left(2 - \frac{1}{2}t\right)e^{-t/2} \quad \rightarrow \quad \left(2 - \frac{1}{2}t\right) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 4$$

e dunque nel punto  $t^* = 4$ ,  $q(t)$  avrà necessariamente un **punto di flesso**<sup>3</sup>. In particolare  $q(t^*) = 16e^{-2}$  e quindi il punto del grafico  $F(4, 16e^{-2})$  rappresenta l'unico (in questo caso) punto in cui la funzione  $q(t)$  si flette, passando da **concava** ( $t < t^*$ ) a **convessa** ( $t > t^*$ ).

La retta tangente al grafico nel punto  $F$  è data dall'equazione

$$y = q(t^*) + m(t - t^*)$$

essendo  $m = i(t^*)$  il valore della derivata prima nel punto  $t^*$ , ovvero  $m = -4e^{-2}$  e quindi l'equazione cercata è

$$y = \frac{16}{e^2} - \frac{4}{e^2}(t - 4)$$

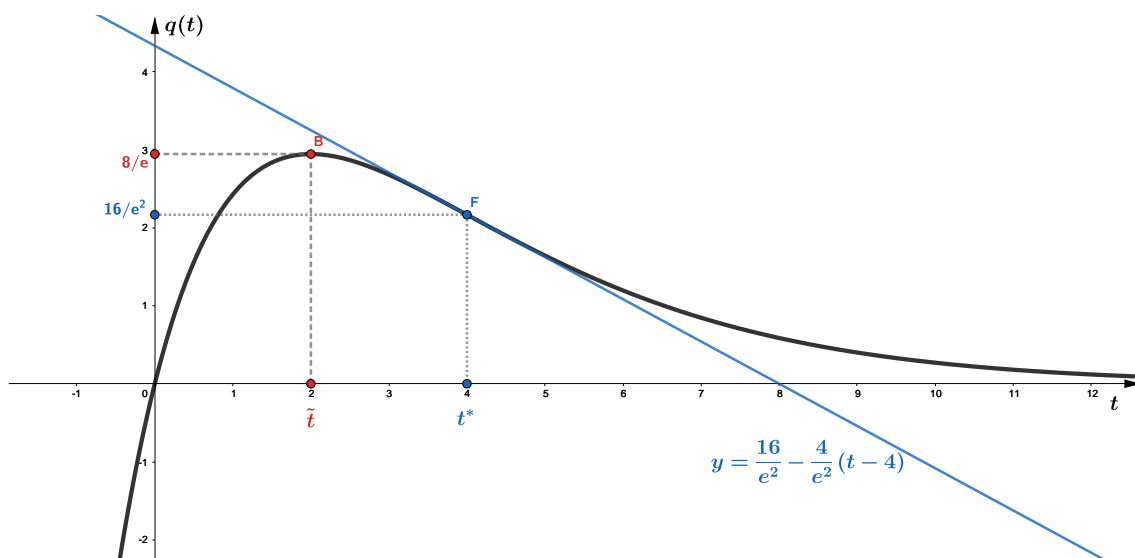


Figura 2: Grafico di  $q(t)$  per  $a = 4$  e  $b = -1/2$ .

L'analisi svolta fin ora può essere riassunta (per  $a = 4$  e  $b = -1/2$ ) nel grafico rappresentato in Fig. 2.

- Per svolgere in maniera corretta questo punto si deve conoscere un minimo di **analisi dimensionale**<sup>4</sup>. L'argomento non può essere esaustivamente riassunto, nè tantomeno accennato. Ci limiteremo dunque a richiamare brevemente alcuni risultati.

Le grandezze fisiche sono in generale espresse attraverso un **numero che moltiplica un certa unità di misura**. L'unità di misura non è altri che un esempio della stessa grandezza fisica in esame, utilizzata come riferimento. Convenzionalmente le grandezze fisiche si organizzano in un sistema di dimensioni per differenziare le une dalle altre, in maniera tale che due grandezze

<sup>3</sup>Si ricordi che il viceversa **non** è sempre vero, ovvero in un punto di flesso non sempre la derivata seconda di una funzione si annulla!

<sup>4</sup>Premere sul link in blu. Nel caso il link non dovesse funzionare, si può copiare ed incollare nel browser di ricerca il seguente link: [https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi\\_dimensionale](https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_dimensionale)

fisiche con dimensioni diverse rappresentino grandezze distinte (sono incommensurabili). Alternativamente, due grandezze fisiche con dimensioni fisiche identiche rappresenteranno la stessa grandezza (sono commensurabili).

Si osservi come **non è ammesso** scrivere una grandezza fisica come  $a = 4$  oppure  $b = -1/2$ , ovvero senza specificarne l'unità di misura. Una simile scrittura rappresenta una **gravissima** violazione delle convenzioni introdotte (e attualmente condivise praticamente in tutto il mondo) dall'ufficio internazionale dei pesi e delle misure<sup>5</sup>. Non accompagnare una grandezza fisica alla sua unità introduce gravi confusioni dimensionali e si corre il rischio di scambiare capre con cavoli!!!.

Esistono sistemi di unità di misura in cui alcune grandezze fisiche sono espresse in maniera adimensionale, ovvero sono dei numeri puri, privi di dimensione fisica. Tuttavia, se così fosse, in questo particolare problema, avremmo che la carica elettrica dovrebbe potersi misurare in secondi (contro l'esplicita ipotesi che essa debba essere misurata in  $C$  (Coulomb)).

Per determinare le dimensioni fisiche di  $a$  e  $b$  dobbiamo ricorrere all'analisi dimensionale, ricordando che le funzioni **trascendenti ed i loro argomenti sono sempre quantità adimensionali**.

Tabella 1: Grandezze fisiche fondamentali, unitamente alle relative unità di misura nel Sistema Internazionale (S. I.) ed il simbolo suggerito dall'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure per le dimensioni fisiche ad esse associate. Fino a qualche anno fa era uso comune utilizzare per il simbolo dimensionale delle parentesi quadre e scrivere ad esempio  $[M]$  per indicare un grandezza fisica con le dimensioni di una massa,  $[\Theta]$  per indicare una grandezza fisica con le dimensioni di una temperatura e così via.

Grandezza Fondamentale	Unità di misura S. I.	Simbolo dimensionale
Lunghezza	metro ( $m$ )	$L$
Massa	chilogrammo ( $kg$ )	$M$
Tempo	secondo ( $s$ )	$T$
Corrente Elettrica	ampere ( $A$ )	$I$
Temperatura	kelvin ( $K$ )	$\Theta$
Quantità di sostanza	mole ( $mol$ )	$N$
Intensità luminosa	candela ( $cd$ )	$J$

La dimensione fisica di ogni grandezza fisica può essere rappresentata attraverso una opportuna combinazione delle dimensioni delle **grandezze fisiche fondamentali**<sup>6</sup> riportate in Tab. 1, definite in maniera operativa, ovvero attraverso operazioni eseguibili in laboratorio. In generale, data una grandezza fisica  $\mathcal{G}$ , la sua dimensione, i. e.  $\dim \mathcal{G}$ , sarà espressa in uno ed un sol modo attraverso una combinazione del tipo

$$\dim \mathcal{G} = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\epsilon N^\zeta J^\eta$$

dove gli esponenti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$  sono detti *esponenti dimensionali* e possono assumere un qualunque valore razionali, zero incluso. In particolare, quando

<sup>5</sup>[https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si\\_brochure\\_8\\_en.pdf](https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si_brochure_8_en.pdf)

<sup>6</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Grandezza\\_fisica](https://it.wikipedia.org/wiki/Grandezza_fisica). Si veda anche il sito dell'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure: <https://www.bipm.org/en/about-us/>

tutti gli esponenti nell'equazione precedente sono nulli, si dice che la grandezza  $\mathcal{G}$  è *adimensionale*, oppure un *numero puro*.

Per quello che interessa il presente esercizio, ricordiamo che la carica elettrica  $q$  ha le seguenti dimensioni fisiche:

$$\dim q = IT \quad (4)$$

ovvero è data dal prodotto di una corrente elettrica (simbolo  $I$ ) per un tempo (simbolo  $T$ ). In questo modo si può agevolmente definire il coulomb come  $1C = 1As$  (dove  $A = \text{ampere}$  è l'unità di misura S. I. della corrente elettriche, mentre  $s = \text{secondo}$  è l'unità di misura S. I. del tempo).

Quando scriviamo una relazione fra grandezze fisiche come in Eq. (1), il simbolo di uguaglianza implica anche l'uguaglianza fra le dimensioni fisiche del primo membro e del secondo membro e quindi possiamo scrivere

$$IT = \dim q = \dim [ate^{bt}]$$

Abbiamo tuttavia ricordato sopra che le funzioni trascendenti (ed i loro argomenti) devono essere adimensionali e quindi nell'equazione dimensionale scritta qui sopra possiamo sbarazzarci dell'esponenziale e scrivere

$$IT = \dim q = \dim [at] \quad \rightarrow \quad IT = \dim a \times T$$

ovvero, semplificando il tempo ad entrambi i membri dell'equazione dimensionale segue

$$\dim a = I$$

e quindi abbiamo trovato che  $a$  ha dimensioni fisiche di una corrente elettrica, ovvero nel S. I. possiamo esprimere  $a$  come  $a = 4A$  e non  $a = 4$ . Ricordando la Eq. (4), possiamo esprimere una corrente come una carica elettrica diviso un tempo, ovvero  $I = \dim q \times T^{-1}$  e quindi, nel sistema di unità di misura considerato nell'esercizio (S. I.),  $a$  può essere espresso nella maniera equivalente  $a = 4Cs^{-1}$  e **non**  $a = 4$ . Per determinare le dimensioni fisiche di  $b$ , ricordiamo ancora una volta che gli argomenti di funzioni trascendente devono essere adimensionali, ovvero il prodotto  $bt$  **non deve avere** dimensioni fisiche (deve essere un numero puro). Questo si ottiene imponendo

$$\dim [bt] = \dim b \times T = L^0 M^0 T^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0 = 1 \quad \rightarrow \quad \dim b = T^{-1}$$

e quindi abbiamo trovato che  $b$  ha dimensioni fisiche di un inverso del tempo e nel sistema di unità di misura considerato nell'esercizio (S. I.),  $b$  si misura in  $s^{-1}$  (secondi alla meno uno). Possiamo dunque scrivere  $b = -2^{-1}s^{-1}$  e **non**  $b = -1/2$ .

Nel seguito, indichiamo con  $a = 4Cs^{-1}$  e  $|b| = 2^{-1}s^{-1}$ . Possiamo allora scrivere simbolicamente  $q(t)$  come

$$q(t) = ate^{-|b|t}$$

Per evitare di portarsi dietro le unità di misura e le dimensioni fisiche, il modo corretto di procedere **non è** ignorare le unità di misura, bensì inglobarle in una qualche trasformazione che può consentire di passare da una descrizione

dimensionale ad una puramente matematica. Si analizza poi la descrizione puramente matematica e alla fine si ritorna alla descrizione originale. Matematicamente è un problema interessante, si chiama *cambio di variabile*. Tale procedura in buona sostanza non è altri che l'applicazione diretta della teoria derivante dalle funzioni composte.

Introduciamo la nuova variabile (adimensionale)  $\tau = |b|t$  e definiamo  $\tilde{q}(\tau)$  come

$$\tilde{q}(\tau) = \frac{|b|}{a}q(\tau/|b|) = \tau e^{-\tau} \quad (5)$$

Si osservi che,  $\tilde{q}(\tau)$  è completamente adimensionale, una pura funzione matematica. Per comodità definiamo anche la “corrente” adimensionale  $\mathcal{I}(\tau)$  come

$$\mathcal{I}(\tau) = \frac{d\tilde{q}}{d\tau} = (1 - \tau)e^{-\tau} \quad (6)$$

Passare dalla descrizione adimensionale alla descrizione fisica dimensionale non è complicato. Infatti abbiamo le seguenti corrispondenze

$$q(t) = \frac{a}{|b|}\tilde{q}(|b|t) \quad (7)$$

$$i(t) = a\mathcal{I}(|b|t) \quad (8)$$

Possiamo dunque analizzare le funzioni puramente matematiche in Eq. (5) ed Eq. (6) e poi ripristinare le dimensioni fisiche utilizzando le equazioni di trasformazione riportate in Eq. (7) ed Eq. (8).

La corrente che all'istante  $\tau$  attraversa la sezione del conduttore in esame, per definizione, è data da Eq. (6), ovvero dalla derivata rispetto al tempo della carica elettrica. Dall'espressione di Eq. (6) si ricava immediatamente

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathcal{I}(\tau) = 0$$

ovvero  $\mathcal{I}(\tau)$  tende asintoticamente a zero (e così anche la corrente fisica  $i(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ , basta utilizzare Eq. (8)). In maniera più precisa, per  $\tau \rightarrow +\infty$ , risulta  $\mathcal{I}(\tau) \rightarrow 0^-$ , inoltre  $\mathcal{I}(\tau) \geq 0$  per  $\tau \leq 1$  (ovvero  $\mathcal{I}(\tau) < 0$  per  $\tau > 1$ ). Il grafico della funzione  $\mathcal{I}(\tau)$  si trova dunque nel primo e nel quarto quadrante, parte da  $\mathcal{I}(0) = 1$  al tempo  $\tau = 0$ , deve necessariamente decrescere nel quarto quadrante e avvicinarsi asintoticamente a zero dalla sinistra. Avrà dunque (almeno) un minimo. Per determinare il minimo imponiamo

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau} = -(2 - \tau)e^{-\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = 2$$

da cui si trova che  $\tau = 2$  è l'unico minimo della funzione  $\mathcal{I}(\tau)$ . Risulta inoltre che  $\mathcal{I}(\tau) > 0$  per  $\tau > 2$ , ovvero  $\mathcal{I}(\tau) < 0$  per  $0 \leq \tau < 2$ . Il segno della derivata prova definitivamente che  $\tau = 2$  è il minimo (assoluto in questo) di  $\mathcal{I}(\tau)$  (per  $\tau \geq 0$ ).

Utilizzando l' Eq. (7) ed Eq. (8) possiamo ripristinare agevolmente le unità fisiche di partenza. In particolare abbiamo

$$i(0) = a = 4 \frac{C}{s} \quad (\text{e non } i(0) = 4)$$

che rappresenta anche il valore massimo (per  $t \geq 0$ ) della corrente. A partire dal valore massimo iniziale, la corrente comincia a decrescere fino al minimo assoluto quando  $\tau = 2 = |b|t$ , ovvero  $t = 2/|b| = 4s$ . Al tempo  $t = 4s$  si trova

$$i(t) = -\frac{4}{e^2} \frac{C}{s} \approx -0.54 \text{ A}$$

Dunque, la corrente parte dal valore  $a = 4Cs^{-1}$ , si annulla quando  $t = 2s$  ( $\tau = 1$ ), raggiunge il minimo assoluto quando  $t = 4s$  ( $\tau = 2$ ) e decresce a zero per tempi lunghi. Il grafico della corrente  $\mathcal{I}(\tau)$  è mostrato in Fig. 3. Chiaramente è banale risalire al grafico di  $i(t)$ , si tratta di effettuare opportuni cambiamenti di scala sugli assi coordinati (potrebbe essere un utile esercizio imparare a farlo).

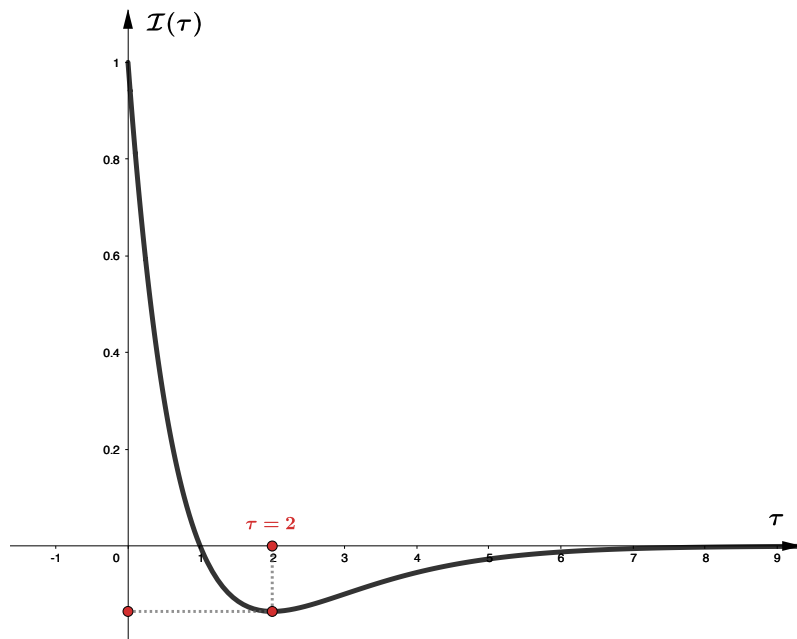


Figura 3: Grafico di  $\mathcal{I}(\tau)$ .

4. In questo caso la traccia non è chiarissima. La carica che attraversa una sezione del conduttore nell'intervallo di tempo  $dt$  è data da

$$dq(t) = i(t)dt$$

da cui segue che la carica totale che attraversa il conduttore nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_0 - 0 = t_0$  è data da

$$q(t_0) - q(0) = Q(t_0) = \int_0^{t_0} a(1 - |b|t)e^{-|b|t} dt = \frac{a}{|b|} \int_0^{\tau_0} \mathcal{I}(\tau) d\tau$$

avendo posto  $\tau_0 = |b|t_0$ . L'integrale, ovviamente, restituisce  $\tilde{q}(|b|t_0)$  e quindi  $Q(t_0) = \frac{a}{|b|} \tilde{q}(|b|t_0)$ , che tende a zero quando  $t_0 \rightarrow +\infty$ . Chiaramente questa



soluzione non ha tanto senso ai fini del problema, in quanto abbiamo integrato una funzione di cui era già nota la primitiva.

Una possibilità potrebbe essere che la traccia in effetti chieda la quantità di carica **per** secondo (e non **al** secondo). In tale caso Si deve valutare il seguente integrale

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} q(t)dt = \frac{a}{|b|^2} \int_0^{\tau_0} \tilde{q}(\tau)d\tau = \frac{a}{|b|^2} \int_0^{\tau_0} \tau e^{-\tau} d\tau$$

L'integrale può essere risolto facilmente per parti, ottenendo

$$Q(t_0) = \frac{a}{|b|^2} \left[ 1 - e^{-|b|t_0} (|b|t_0 + 1) \right]$$

da cui si trova

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} Q(t_0) = \frac{a}{|b|^2} = 16 \text{ Cs} \quad (\text{e non } 16)$$

Per finire, l'energia  $d\mathcal{E}$  dissipata dal resistore nell'intervallo di tempo  $dt$  è data da

$$d\mathcal{E} = p(t)dt = Ri^2(t)dt \quad (p(t) = \text{potenza dissipata})$$

ovvero, integrando ambo i membri otteniamo

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) = \Delta\mathcal{E} = \frac{Ra^2}{|b|} \int_0^{\tau_0} \mathcal{I}^2(\tau)d\tau$$

A questo punto il problema è finito e visto che la traccia chiede solo di impostare l'integrale senza risolverlo, non è necessario fornire il valore di  $R$ . L'integrale può tuttavia essere effettuato. Riportiamo qui il risultato senza discutere lo svolgimento.

L'energia dissipata è data in definitiva da

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{Ra^2}{4|b|} \left\{ 1 - e^{-2\tau_0} [1 + 2\tau_0(\tau_0 - 1)] \right\}$$

che, nel limite di tempi lunghi diventa

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{Ra^2}{4|b|} = 24 \text{ J}$$

(In questo caso  $J = \text{joule}$  indica l'unità di misura dell'energia nel sistema internazionale. Il contesto dovrebbe essere sufficiente per far comprendere che  $J$  non è il simbolo dell'intensità luminosa riportata in Tab. 1).

Il grafico della funzione  $q(t)$  e della sua derivata ( $i(t)$ ) possono anche essere visualizzati in maniera interattiva al sito <https://ggbm.at/en2egq4x>.

**Problema 1.2.** Una carica puntiforme  $Q_1 = 4q$  ( $q > 0$ ) è fissata nell'origine  $O$  di un sistema di riferimento nel piano  $Oxy$  (dove  $x$  e  $y$  sono espressi in  $m$ ). Una seconda carica elettrica puntiforme  $Q_2 = q$  è vincolata a rimanere sulla retta  $r$  di equazione  $y = 1m$  (e non  $y = 1$ )

1. Supponendo che la carica  $Q_2$  sia collocata nel punto  $A(0,1m)$ , provare che esiste un unico punto  $P$  del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche  $Q_1$  e  $Q_2$  è nullo. Individuare la posizione del punto  $P$  e discutere se una terza carica collocata in  $P$  si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.
2. Verificare che, se la carica  $Q_2$  si trova nel punto della retta  $r$  avente ascissa  $x$ , l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da  $Q_1$  e  $Q_2$  è data da

$$\mathcal{U}(x) = k \frac{4q^2}{\sqrt{1m^2 + x^2}} \quad (9)$$

con  $k$  una costante positiva (unità di misura:  $Nm^2C^{-2}$ )

3. Studiare la funzione  $\mathcal{U}(x)$  per  $x \in \mathbb{R}^7$ , specificandone eventuali simmetrie, asintoti, punti stazionari e flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle rette tangenti ad  $\mathcal{U}(x)$  nei punti di flesso?
4. A partire dal grafico della funzione  $\mathcal{U}$ , tracciare il grafico della funzione  $\mathcal{U}'(x)$ , specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di  $\int_{-m}^m \mathcal{U}'(x)dx$  (dove  $m > 0$  indica l'ascissa del punto di minimo di  $\mathcal{U}'(x)$ ).

## Soluzione

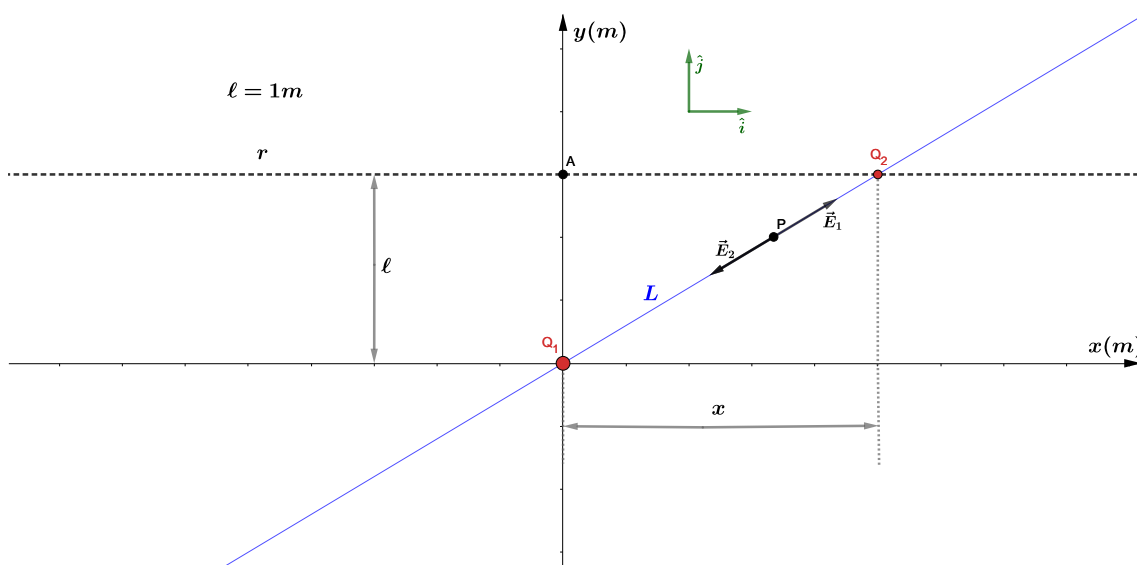


Figura 4

La situazione descritta nella traccia è mostrata in Fig. 4.

1. Le linee di forza del campo elettrostatico generato dal sistema di cariche  $Q_1$  e  $Q_2$  tendono a respingersi, essendo le cariche dello stesso segno. In particolare esse sono parallele e discordi solo lungo il segmento che congiunge le due cariche

<sup>7</sup>Ovviamente se  $x$  rappresenta una lunghezza, dire che  $x$  è un numero reale puro non ha senso.

e che si trova sulla retta blu. Dunque, l'unico punto del piano  $P$  dove il campo può annullarsi appartiene a tale segmento.

Nel caso in cui  $Q_2$  si trovi in  $A$ , avremo  $L = \ell$ , il campo elettrostatico nel punto  $P(0, y)$  si annulla se e soltanto se

$$\frac{Q_1}{y^2} = \frac{Q_2}{(\ell - y)^2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\ell}{1 + \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}}$$

da cui segue, essendo  $Q_2/Q_1 = 1/4$  che

$$y = \frac{2}{3}\ell \approx 0.7 \text{ m}$$

ed il punto di equilibrio cercato è  $P(0, \frac{2}{3}\ell)$ .

Per determinare se una terza carica posta nel punto  $P$  sia in un punto di equilibrio stabile si può, ad esempio, considerare la risultante delle forze agenti su una carica di prova  $q_1$ , quando la stessa viene posta in  $P$  e spostata di una quantità  $\delta y$  dal punto di equilibrio, tale che  $\delta y/\ell \rightarrow 0^+$  (v. Fig. 5). Se la carica, lasciata libera di muoversi sotto l'influsso delle forze elettrostatiche, può essere descritta con buona approssimazione dal modello di oscillatore armonico semplice, caratterizzato da un'opportuna costante elastica, allora il punto di equilibrio può considerarsi stabile. In questo caso si trova che la forza totale

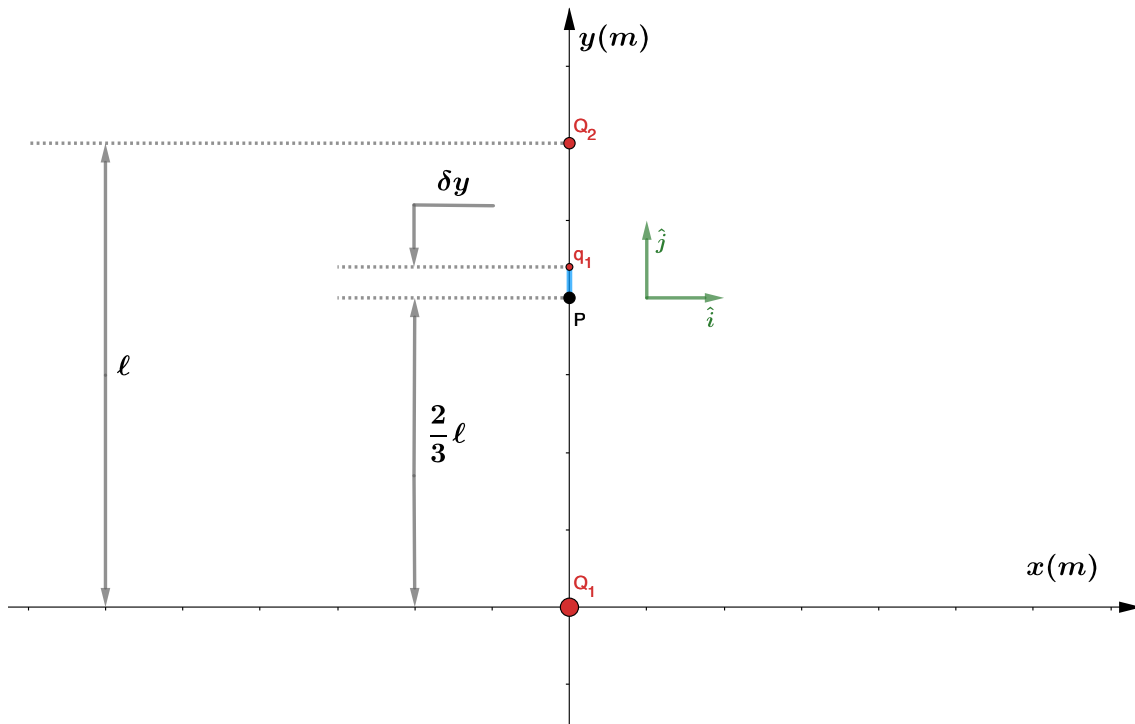


Figura 5: La carica di prova  $q_1$  è posta leggermente al di sopra del punto  $P$  (nel disegno  $\delta y$  è stato ingrandito per questioni di chiarezza. in realtà è una quantità che tende a zero)

agente su  $q_1$  può scriversi, nel limite dello spostamento  $\delta y$  che tende a  $0^+$ , come

$$\mathbf{F} \approx -\frac{81q|q_1|}{4\pi\epsilon_0\ell^3}\delta y\hat{\mathbf{j}} \quad (10)$$

valida sia nel caso che  $q_1$  sia positiva, sia che risulti negativa. Ci troviamo dunque in un punto di equilibrio stabile.

In effetti nessuno ci vieta di fare uno spostamento fuori asse, ad esempio spostare la carica di un vettore  $\delta \mathbf{r} = \delta x \hat{\mathbf{i}} + \delta y \hat{\mathbf{j}}$  e dunque comporre uno spostamento infinitesimo lungo  $x$  con uno infinitesimo lungo  $y$ . In questo caso il discorso diventa molto più complicato da trattare analiticamente. Tuttavia un attimo di riflessione convince che le componenti del campo (e dunque della forza) fuori asse, possono essere trascurate rispetto alle componenti assiali, il che ci ricondurrebbe al caso di spostamento assiale lungo  $y$ .

2. L'energia elettrostatica fra le due cariche è data da

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{L}$$

ovvero, ponendo  $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$  ed utilizzando il teorema di Pitagora otteniamo

$$\mathcal{U}(x) = k \frac{4q^2}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}$$

Anche in questo caso, come nel Problema 1.1 possiamo introdurre il cambio di variabile (*adimensionale*)  $z = x/\ell$  e le pure funzioni matematiche  $\mathcal{U}(z)$  ed  $\mathcal{F}(z)$ , definite come

$$\mathcal{U}(z) = \frac{\ell}{4kq^2} \mathcal{U}(\ell z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad (11)$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{d\mathcal{U}(z)}{dz} = -\frac{z}{(1+z^2)^{3/2}} \quad (12)$$

Come nel Problema 1.1 anche in questo caso possiamo facilmente legare le funzioni puramente matematiche introdotte nelle equazioni (11) e (12) con le rispettive grandezze fisiche, ovvero rispettivamente l'energia potenziale elettrostatica  $\mathcal{U}(x)$  e la sua derivata  $\mathcal{F}(x) = \mathcal{U}'(x)$ . Le equazioni di trasformazione sono

$$\frac{4kq^2}{\ell} \mathcal{U}(x/\ell) = \mathcal{U}(x) \quad (13)$$

$$\frac{4kq^2}{\ell^2} \mathcal{F}(x/\ell) = \mathcal{F}(x) \quad (14)$$

Possiamo dunque lavorare con le funzioni puramente matematiche definite in Eq. (11) ed Eq. (12) ed utilizzare alla fine le equazioni di trasformazione in Eq. (13) ed Eq. (14) per riottenere tutte le grandezze fisiche di interesse.

3. La funzione  $\mathcal{U}(z)$  è **definita su tutto**  $\mathbb{R}$ . Il radicando al denominatore infatti non si annulla mai (essendo somma di due quantità positive) e dunque il denominatore rimane sempre diverso da zero. La funzione è anche **pari** (in quanto dipende solo da  $z^2$ ) e dunque simmetrica rispetto all'asse  $y$ . Risulta inoltre che  $\mathcal{U}(z)$  è **sempre positiva** (in quanto rapporto di due quantità sempre positive) e che **tende asintoticamente a zero dalla destra** per  $|z| \rightarrow +\infty$

(i. e.  $\mathcal{U}(z) \rightarrow 0^+$  per  $z \rightarrow \pm\infty$ ). La funzione è anche **ovunque continua** in quanto composizione di funzioni continue e dunque dovrà annullarsi ad infinito ed i due andamenti asintotici devono essere uniti da un tratto continuo. Questo implica che la funzione avrà (almeno) un massimo, ovvero cresce per  $z$  che va da meno infinito fino al massimo e poi decresce dal massimo fino al valore asintoticamente nullo per  $z$  che tende a più infinito. Inoltre, **non interseca mai** l'asse delle ascisse, mentre **interseca** l'asse delle ordinate nel punto  $z = 0$ , dove vale  $\mathcal{U}(0) = 1$  e la presenza della simmetria suggerisce che il grafico della funzione sarà qualcosa di simile ad una campana. Verifichiamo tutto quantitativamente.

La derivata prima di  $\mathcal{U}(z)$  è data da Eq. (12). Anche in questo caso la funzione  $\mathcal{F}(z)$  è definita per ogni  $z \in \mathbb{R}$ . Il denominatore è sempre positivo e non si annulla mai, mentre  $\mathcal{F}(z) = 0$  se e solo se  $z = 0$ . Abbiamo dunque un unico candidato come punto stazionario. In particolare, dato che il denominatore non si annulla mai, avremo  $\mathcal{F}(z) > 0$  per  $z < 0$  (la funzione  $\mathcal{U}$  cresce), ovvero  $\mathcal{F}(z) < 0$  per  $z > 0$  (la funzione  $\mathcal{U}$  decresce) e **quindi  $z = 0$  è l'unico punto di massimo** della funzione  $\mathcal{U}(z)$ .

Per finire valutiamo i punti di flesso:

$$\frac{d\mathcal{F}(z)}{dz} = \frac{2z^2 - 1}{(1 + z^2)^{5/2}} = 0 \quad \rightarrow \quad z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui, essendo il denominatore sempre positivo, si ricava che **la funzione  $\mathcal{U}(z)$  è convessa per  $z < -\sqrt{2}/2$  oppure per  $z > \sqrt{2}/2$  e concava per  $-\sqrt{2}/2 < z < \sqrt{2}/2$ .**

I coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico nei punti di flesso sono dati da  $\mathcal{F}(\pm\sqrt{2}/2)$ , ovvero

$$\mathcal{F}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mp \frac{2}{9}\sqrt{3} \quad (15)$$

Possiamo a questo punto tracciare il grafico della funzione  $\mathcal{U}(z)$ , esso è dato dal tratto nero in Fig. 6.

Passare dalla descrizione adimensionale a quella dimensionale è semplice, basta ricordarsi che  $z = x/\ell$  (ovvero tutti i punti dell'asse  $z$  vanno riscalati per il fattore  $\ell$ ) e che i punti dell'asse delle ordinate vanno riscalati per il fattore  $4q^2k/\ell$ . Dunque  $\mathcal{U}(x)$  ha un massimo in  $x = 0$ , dove l'energia elettrostatica vale  $\mathcal{U}(0) = 4kq^2/\ell$ , due flessi in  $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \approx \pm 0.7 m$ , dove l'energia elettrostatica assume lo stesso valore ed è data da  $\mathcal{U} = \frac{8\sqrt{6} q^2 k}{3 \ell}$ .

- Il grafico di  $\mathcal{F}(z)$  segue direttamente dal grafico di  $\mathcal{U}(z)$ . Infatti, le proprietà di convessità e concavità di  $\mathcal{U}(z)$ , sono direttamente legate alla crescita e decrescenza di  $\mathcal{F}(z)$ . In particolare,  $\mathcal{F}(z)$  **cresce** per  $z < \sqrt{2}/2$  **oppure**  $z > \sqrt{2}/2$  e **decresce** per  $-\sqrt{2}/2 < z < \sqrt{2}/2$ , dunque  $\mathcal{F}(z)$  ha un **massimo** in  $z = -\sqrt{2}/2$  ed un **minimo** in  $\sqrt{2}/2$ . Inoltre,  $\mathcal{F}(z)$  è **definita per tutto  $\mathbb{R}$ , positiva** per  $z < 0$ , **negativa** per  $z > 0$ , **continua** in quanto composizione di funzioni continue ed **interseca** gli assi nell'unico punto  $z = 0$ , con  $\mathcal{F}(0) = 0$  (come è giusto che sia, visto che  $z = 0$  è a sua volta un massimo per

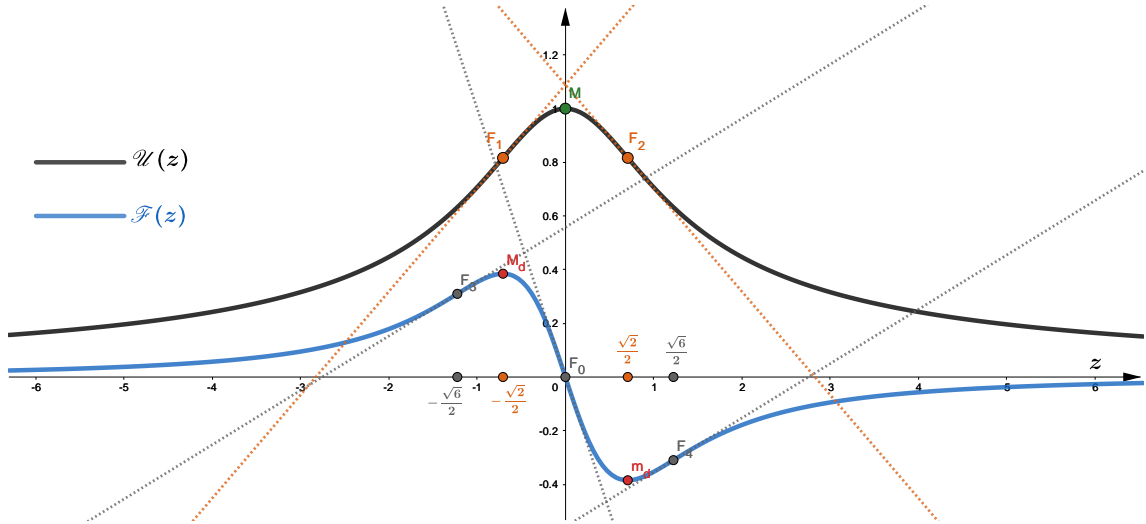


Figura 6: Nella figura sono mostrati il grafico di  $\mathcal{U}(z)$  come funzione di  $z$  (tratto nero) ed il grafico di  $\mathcal{F}(z)$  come funzione di  $z$  (tratto blu). Si osservi come i punti di flesso di  $\mathcal{U}$  diventano automaticamente punti di massimo ( $-\sqrt{2}/2$ ) e minimo ( $\sqrt{2}/2$ ) per  $\mathcal{F}(z)$ . Si osservi che  $\mathcal{U}(x)$  ed  $\mathcal{F}(x)$  non sono grandezze fisiche commensurabili e quindi non possono essere mostrate sullo stesso grafico (l'asse  $y$  non può rappresentare due grandezze fisiche diverse), al contrario delle loro "cugine" adimensionali  $\mathcal{U}(z)$  ed  $\mathcal{F}(z)$

$\mathcal{U}(z)$ ). Per finire si verifica agevolmente che  $\mathcal{F}(z)$  è una funzione **dispari** (i. e.  $\mathcal{F}(-z) = -\mathcal{F}(z)$ ) e quindi presenta una simmetria rispetto all'origine degli assi. La funzione va asintoticamente a zero dalla destra per  $z$  negativi ed asintoticamente a zero dalla sinistra per  $z$  positivi. Dunque, partendo da  $z$  negativi, la funzione cresce fino al massimo in  $z = -\sqrt{2}/2$ , decresce, passando per l'origine ed assumendo valori negativi, fino al punto  $z = \sqrt{2}/2$ , dopo di che cresce nuovamente per andare asintoticamente a zero dalla sinistra per  $z$  positivi. I flessi di  $\mathcal{F}(z)$  si possono calcolare dallo studio della sua derivata seconda, che si può ottenere a partire dalla Eq. (15)

$$\frac{d^2 \mathcal{F}(z)}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{2z^2 - 1}{(1 + z^2)^{5/2}} \right] = -3z \frac{2z^2 - 3}{(1 + z^2)^{7/2}}$$

Considerando che il denominatore non si annulla mai, gli eventuali punti di flesso saranno  $z = 0$  e  $z = \pm\sqrt{6}/2$ . Sapendo già che la funzione è un unico tratto continuo e che i punti  $z = \pm\sqrt{2}/2$  sono, rispettivamente, un massimo ed un minimo, possiamo immediatamente arguire che  $\mathcal{F}(z)$  sarà **convessa** per  $z < -\sqrt{6}/2$  **oppure** per  $0 < z < \sqrt{6}/2$ , mentre invece per  $z > \sqrt{6}/2$  **oppure** per  $-\sqrt{6}/2 < z < 0$ , la funzione sarà **concava** (quest'ultimo argomento dovrebbe in effetti essere reso più solido, andando a studiare il segno della derivata seconda di  $\mathcal{F}(z)$ , che tuttavia, una volta individuati i punti di massimo e minimo, non è del tutto necessario; lo studio quantitativo è lasciato come esercizio). Il grafico di  $\mathcal{F}(z)$  è rappresentato in Fig. 6 (tratto blu).

Per riassumere, in Tab. 2 riportiamo i punti stazionari e flessi determinati per le funzioni  $\mathcal{U}(z)$  ed  $\mathcal{F}(z)$ , insieme ad i rispettivi valori delle grandezze fisiche da esse si ricavano utilizzando le relazioni in Eq. (13) ed Eq. (14) e ricordando che  $z = x/\ell$ .

Tabella 2: Riassunto dei punti di massimo e minimo delle funzioni  $\mathcal{U}(z)$ ,  $\mathcal{F}(z)$  e delle rispettive grandezze fisiche ottenute da esse tramite l' Eq. (13) ed Eq. (14)

	Massimi	Minimi	Flessi
$\mathcal{U}(z)$	$M(0, 0)$	//	$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$
$\mathcal{U}(x)$	$M(0, 0)$	//	$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{4\sqrt{6}}{3}\frac{kq^2}{\ell}\right), F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{4\sqrt{6}}{3}\frac{kq^2}{\ell}\right)$
$\mathcal{F}(x)$	$M_d\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$	$m_d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$	$F_0(0, 0), F_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{25}\right), F_4\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)$
$\mathcal{F}(x)$	$M_d\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{kq^2}{\ell^2}\right)$	$m_d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{kq^2}{\ell^2}\right)$	$F_0(0, 0), F_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\ell, \frac{8\sqrt{5}}{25}\frac{kq^2}{\ell^2}\right),$ $F_4\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\ell, \frac{8\sqrt{5}}{25}\frac{kq^2}{\ell^2}\right)$

Si osservi che le due funzioni  $\mathcal{F}(x)$  ed  $\mathcal{U}(x)$  **non** possono essere disegnate sullo stesso grafico in quanto i loro valori (asse delle ordinate) rappresentano grandezze fisiche differenti (rispettivamente una forza ed un'energia). Una volta ristabilite tutte le unità di misura, i due grafici **vanno separati** e disegnati come due grafici **distinti**.

Per finire, osserviamo che, essendo  $\mathcal{U}(z)$  una primitiva di  $\mathcal{F}(z)$ , si trova immediatamente che

$$\int_{-m}^{+m} \mathcal{F}(z)dz = \mathcal{U}(m) - \mathcal{U}(-m) = 0$$

che segue immediatamente dalla parità di  $\mathcal{U}(z)$  (lo stesso vale per  $\mathcal{U}(x)$ ). Si osservi che il risultato qui sopra vale per ogni  $m \in \mathbb{R}$ , in particolare per il punto richiesto nella traccia, i. e.  $m = \sqrt{2}/2$ .

### Derivazione dell'Eq. (10)

Supponiamo che la carica di prova  $q_1$ , che poniamo poco al disopra del punto  $P$  (v. Fig. 5), sia negativa. La forza totale che agisce su di essa è data da

$$\mathbf{F} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\ell + \delta y\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\ell - \delta y\right)^2} \right] \hat{\mathbf{j}} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-\frac{4}{9}\ell^2 - 4\delta y^2 + \frac{8}{3}\ell\delta y + \frac{4}{9}\ell^2 + \delta y^2 + \frac{4}{3}\ell\delta y}{\left(\frac{2}{3}\ell + \delta y\right)^2 \left(\frac{1}{3}\ell - \delta y\right)^2} \right] \hat{\mathbf{j}} =$$

Mettendo in evidenza  $\ell^2$  sia al numeratore che al denominatore ed introducendo la variabile adimensionale  $z = \delta y/\ell$ , risulta

$$= \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0\ell^2} \left[ \frac{-3z^2 + 4z}{\left(\frac{2}{3} + z\right)^2 \left(\frac{1}{3} - z\right)^2} \right] \hat{\mathbf{j}}$$

A questo punto ricordiamo che dobbiamo considerare  $\delta y/\ell \rightarrow 0^+$ . Tale ipotesi implica che al numeratore del fattore in parentesi quadra possiamo trascurare il termine in  $z^2$  rispetto al termine in  $z$  (ad esempio, se  $z = 10^{-3}$ , allora  $z^2 = 10^{-6}$ , ovvero ben **tre** ordini di grandezza inferiore rispetto a  $z$ <sup>8</sup>); al denominatore possiamo trascurare invece  $z$  (che sta andando a zero) rispetto ai termini **finiti**  $2/3$  ed  $1/3$ . Tali approssimazioni sono tanto più affidabili quando più  $z$  si avvicina allo zero. Se

<sup>8</sup>Tecnicamente  $z^2$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $z$

spostiamo dunque  $q_1$  da  $P$  di una quantità molto più piccola rispetto ad  $\ell$ , possiamo scrivere  $\mathbf{F}$  approssimativamente come

$$\mathbf{F} \approx -\frac{81q|q_1|}{4\pi\epsilon_0\ell^2}z\hat{\mathbf{j}} = -k\delta y\hat{\mathbf{j}}$$

dove  $k > 0$  è data da

$$k = \frac{81q|q_1|}{4\pi\epsilon_0\ell^3}$$

Abbiamo dunque ottenuto la legge dell'oscillatore armonico semplice di costante elastica  $k$ , il che prova che la carica di prova negativa  $q_1$  rimarrebbe stabilmente "ancorata" al punto di equilibrio  $P$ , oscillando intorno ad esso, con frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{81q|q_1|}{4\pi m\epsilon_0\ell^3}}$$

dove con  $m$  si è indicata la massa della carica elettrica  $q_1$ . Il caso con  $q_1 > 0$  si analizza in maniera analoga. Anche in quel caso  $q_1$  oscilla intorno al punto di equilibrio stabile  $P$ , con la stessa frequenza angolare.