Capítulo 3

Transformaciones

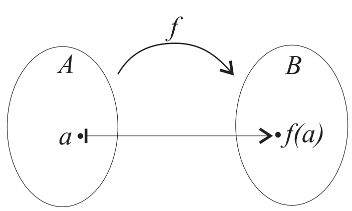
Sin duda, el concepto de función juega un papel fundamental en todas las ramas de la matemática de hoy en día: en la Geometría Elemental (aunque sea viejita), se dice que dos figuras son *Congruentes* si existe una *Transformación Rígida* que lleve una sobre la otra, y que son *Semejantes* si existe una de estas transformaciones que seguida de una *Homotesia* (un cambio de escala) lleve una a la otra; en el Análisis o el Cálculo se estudian las funciones *Integrables* o *Diferenciables*; en la Topología, las funciones *Continuas*; en la Teoría de los Grupos se estudian los *Homomorfismos* (funciones entre grupos que preservan la operación ahí definida); en el Álgebra Lineal se estudian las funciones *Lineales* y las *Afines*; etc., siempre que hay algún tipo interesante de "objetos matemáticos" parece haber una correspondiente noción de "funciones" que los relacionan.

Sin haberlo hecho explicito, los griegos manejaban intuitivamente el concepto de transformación rígida y de semejanza; por ejemplo, en el axioma "todos los ángulos rectos son iguales", en la palabra "iguales" se incluye la idea de que se puede *mover* uno hasta traslaparse sobre el otro, y en sus teoremas de semejanza la noción ya se hace explicita y habla en el fondo de un cierto tipo de funciones. Más adelante, en el surgimiento del Cálculo (Newton y Leibnitz) así como en el de la Geometría Analítica (Descartes) o en el Algebra de los Arabes, las funciones jugaban un papel importante pero debajo del agua o en casos muy concretos (funciones reales de variable real dadas por fórmulas en el Cálculo, por ejemplo). Sin embargo, el aislamiento del concepto de función, la generalidad de la noción —que englobaba cosas al parecer distantes—, es muy reciente: termina de afinarse con la Teoría de los Conjuntos que arranca Cantor en la segunda mitad del XIX. Pero es tan imediata su aceptación (o bien, ya estaba tan madura su concepción) que a principios del Siglo XX, Klein, en una famosísima conferencia (conocida como "El Programa de Erlangen") se avienta el boleto de afirmar que la Geometría es el estudio de un espacio (un conjunto de puntos, piénsese en el plano) junto con un *grupo de transformaciones* (un conjunto específico de funciones del espacio en sí mismo) y de las estructuras que permanecen *invariantes* bajo el grupo. En fin, todavia el estudiante no tiene ejemplos claros de estas nociones y es casi imposible que lo aprecie. Pero el punto es que, de alguna manera, Klein dijo: para hacer geometría es importantísimo estudiar las *transformaciones* (funciones) del plano en sí mismo, conocerlas de arriba a abajo; y en este Capítulo en esas andamos... pues el Siglo XX, al transcurrir, le fué dando más y más razón al visionario.

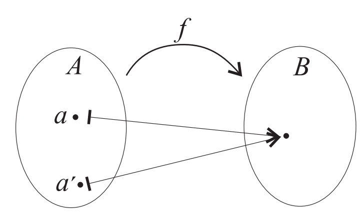
Damos muy rapidamente las nociones generales de función en la primera Sección. Pues, aunque parece que se nos cae el nivel por un ratito, vale la pena establecer cierta terminología muy general que se usa en su manejo y ciertos ejemplos muy particulares que serán de gran interes en el estudio de las transformaciones geométricas, y que a su vez, serviran para familiarizarse con los conceptos básicos. Despues le entramos a las transformaciones geométricas. El orden en que lo hacemos no es el que técnicamente facilita las cosas (empezar por transformaciones lineales), sino el que intuitivamente parece más natural (empezar por transformaciones rígidas); y de ahí, deducir la noción de transformación lineal para regresar de nuevo y desarrollar las fórmulas analíticas.

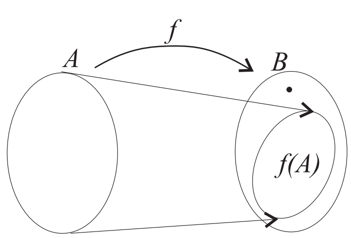
3.1 Funciones y transformaciones

En los siguientes parrafos se usa el tipo de letra *este* para las nociones que se definen formalmente y *este otro* para terminología comoda y coloquial que facilita mucho el manejo de las funciones.



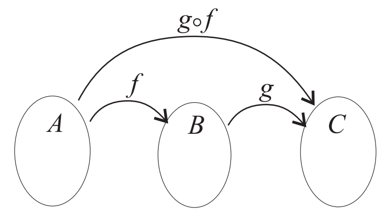
Dados dos conjuntos A y B, una *función* f de A a B, denotado $f : A \to B$, es una manera de *asociar* a cada elemento $a \in A$ un elemento de B, denotado $f(a)$. Por ejemplo, las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se describen comunmente mediante fórmulas como $f(x) = x^2$ o $g(x) = 2x + 3$, que dan la regla para asociar a cada número otro número (e.g., $f(2) = 4$ o $g(-1) = 1$). Otro ejemplo: en el Capítulo 1 vimos las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que describen rectas parametrizadas. Pero en general, y esa es la maravillosa idea generalizadora (valga el pleonasmo), una función no tiene porque estar dada por una fórmula; a veces es algo dado por "Dios", una "caja negra", que "sabe" como asociarle a los elementos del *dominio* (el conjunto A, en la notación con que empezamos) elementos del *contradominio* B.





Se dice que una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$. Es decir, si elementos diferentes de A *van bajo* f a elementos diferentes de B ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$). Se dice que una función $f : A \to B$ es *suprayectiva* o *sobre* si para cada elemento de B hay uno en A que le "*pega*", es decir, si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Y se dice que es *biyectiva*, si es inyectiva y suprayectiva; también se le llama *correspondencia biunívoca*. (Diagramas de funciones **no** inyectiva y **no** sobre en las figuras adjuntas).

Las funciones tienen una noción natural de composición, al aplicarse una tras otra para dar una nueva función. Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, su *composición*, denotada $g \circ f$ y a veces llamada f *seguida de* g o bien "g *bolita* f ", es la función



$$g \circ f : A \to C$$

definida por la fórmula

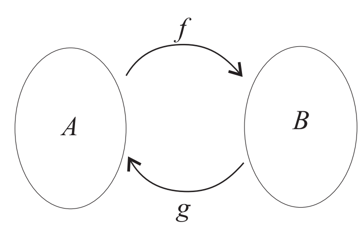
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \ .$$

Hay que resaltar que la composición de funciones está definida sólo cuando el *dominio* de g (es decir, de donde "*sale*" o en donde está definida, el conjunto B en nuestro caso) es igual al *contradominio* de f (es decir, a donde "*llega*", el final de la flecha, donde "*caen*", otra vez B en nuestro caso); si no fuera así, "g no sabría que hacerle a algunos $f(a)$". También hay que resaltar que la dirección de la escritura "g *bolita* f " es la contraria a la de la acción o lectura ("f seguida de g" o bien "f *compuesta con* g"); y esto se ha convenido por la costumbre así, pues la fórmula, que a final de cuentas es quien manda, queda mucho más natural.

Por ejemplo, con las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que definimos con fórmulas unos parrfos arriba se tiene que $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$ mientras que $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 9$, asi que <u>sí</u> importa el orden; la composición está lejos de ser conmutativa; en general, aunque $g \circ f$ esté definida, $f \circ g$ ni siquiera tiene sentido.

Cada conjunto A, trae consigo una función llamada su *identidad* definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : A &\to A \\ \mathrm{id}_A(a) &= a \end{aligned}$$



que es la función que no *hace* nada, que deja a todos en su lugar. Y, aunque parezca inocua, es fundamental darle un nombre, pues entonces podemos escribir mucho, por ejemplo:

Lema 3.1.1 *Dada una función $f : A \to B$, se tiene*

$$\begin{array}{rlclll} \textbf{\textit{i)}} & f \text{ es inyectiva} & \Leftrightarrow & \exists \ \ g : B \to A & \text{tal que} & g \circ f = \mathrm{id}_A \\ \textbf{\textit{ii)}} & f \text{ es suprayectiva} & \Leftrightarrow & \exists \ \ g : B \to A & \text{tal que} & f \circ g = \mathrm{id}_B \end{array}$$

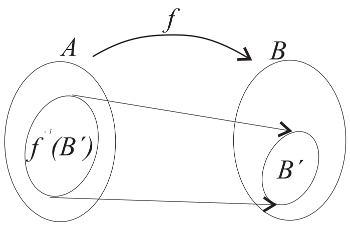
EJERCICIO 3.1 Da ejemplos de funciones inyectivas que no son sobre y a la inversa.

EJERCICIO 3.2 Demuestra el lema anterior y el siguiente corolario de él.

Corolario 3.1.1 *Dada una función $f : A \to B$, entonces f es biyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

En este caso, a g se le da el nombre de *inversa* de f y se le denota f^{-1}. Aunque aquí hay que hacer notar que el simbolito f^{-1} se usa también de una manera más general para denotar conjuntos. Pues, para cualquier subconjunto $B' \subset B$ podemos definir su *imágen inversa* $f^{-1}(B') \subset A$ como

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\} \ .$$



Tenemos entonces que f es inyectiva si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que $\sharp f^{-1}(b) \leq 1$ (donde $\sharp$ denota cardinalidad y hemos identificado $f^{-1}(b)$ con $f^{-1}(\{b\})$), es decir, "a cada elemento de B le pega a lo más uno de A"; y que f es sobre si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que $\sharp f^{-1}(b) \geq 1$ (es decir, que $f^{-1}(b)$ no es el *conjunto vacio*). Por lo tanto, f es biyectiva si y sólo si $\sharp f^{-1}(b) = 1$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si f^{-1} es una función bien definida al aplicarla a *singuletes* de B.

También se puede definir la *imágen directa* de subconjuntos $A' \subset A$, o simplemente su *imágen*, como

$$f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\} \subset B \ .$$

Finalmente llegamos a la definición que más nos interesa.

Definición 3.1.1 Una *transformación* de A es una función biyectiva de A en A.

Hay que hacer notar que el término "transformación" se usa de diferentes maneras en otros textos y en otros contextos. Pero aquí estaremos tan enfocados a funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo que lo asignaremos a ellas.

EJERCICIO 3.3 Demuestra que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas entonces $g \circ f$ también es biyectiva. (Demuestra que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$).

EJERCICIO 3.4 Demuestra que si f y g son transformaciones de un conjunto A entonces $(f \circ g)$ también es una transformación de A.

3.1.1 Grupos de Transformaciones

Veremos ahora ejemplos "chiquitos" de ciertos conjuntos de transformaciones, que por su importancia reciben un nombre especial, el de *grupo*.

Consideremos un conjunto con dos elementos, $\{0, 1\}$; llamémoslo Δ_2. Las funciones de Δ_2 en sí mismo son 4:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & \text{id} & & & & c_0 & & & & c_1 & & & & \rho & \\ 0 & \longmapsto & 0 & & 0 & \longmapsto & 0 & & 0 & \longmapsto & 1 & & 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 1 & & 1 & \longmapsto & 0 & & 1 & \longmapsto & 1 & & 1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

donde hemos usado la notación $x \longmapsto y$ para especificar que el elemento x va a dar al elemento y bajo la función en cuestión (no hay que confundir la flechita con "raya de salida” $\longmapsto$ con la flecha $\to$ que denota función; puede inclusive pensarse que esta última ($\to$) es el conjunto de todas las flechitas ($\longmapsto$) entre los elementos). En nuestro ejemplo, las dos funciones de enmedio son *funciones constantes*; y las únicas transformaciones son las de los extremos, id y ρ, donde obsérvese que ρ es su propio inverso, es decir, $\rho \circ \rho = \mathrm{id}$.

Consideremos ahora a $\Delta_3 := \{0, 1, 2\}$, un conjunto con tres elementos. Una función de Δ_3 en sí mismo puede especificarse por una tablita

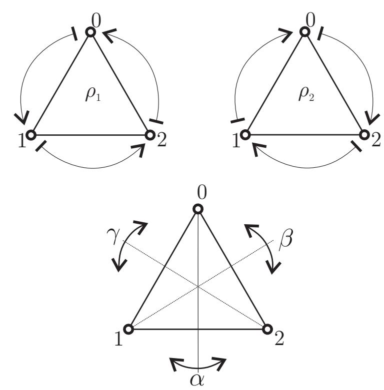
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longmapsto & x \\ 1 & \longmapsto & y \\ 2 & \longmapsto & z \end{array}$$

donde $x, y, z \in \Delta_3$. Como las imágenes ($x, y, z \in \Delta_3$) son arbitrarias, tenemos que hay $3^3 = 27$ funciones en total; pero de estas solamente $3 \times 2 \times 1 = 6$ son transformaciones. Pues si queremos que sea biyectiva, una vez que el 0 *escoje* su imágen, al 1 solo le quedan dos opciones para escoger y cuando lo hace, el 2 ya no le queda más que una opción obligada.

Estas 6 transformaciones son

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{id} & \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \rho_1 & \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \rho_2 & \\ 0 & \longmapsto & 2 \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ 0 & \longmapsto & 2 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \gamma & \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & 2 \end{array}$$



que podemos visualizar como las “simetrías” de un triángulo equilatero. Vistas así, las tres de arriba corresponden a rotaciones (la identidad rota 0 grados), y cumplen que ρ_1 y ρ_2 son inversas, es decir $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = \mathrm{id}$, correspondiendo a que una rota 120° en una dirección y la otra 120° en la dirección contraria. Pero también cumplen que $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_2$ (que podríamos escribir $\rho_1^2 = \rho_2$ si convenimos en que

$$f^n = \overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{n}$$

donde f es cualquier transformación; es decir, f^n es f compuesta consigo misma n-veces, lo cual tiene sentido sólo cuando f sale de y llega a el mismo conjunto). Por su parte, las tres transformaciones de abajo se llaman *transposiciones* y geométricamente se ven como *reflexiones*. Cumplen que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \mathrm{id}$, y además cumplen otras *relaciones* como que $\alpha \circ \beta = \rho_1$, lo cual se ve *persiguiendo* elementos:

$$\begin{array}{ccccc} & \beta & & \alpha & \\ 0 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \end{array} \; ;$$

o bien, que $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta \circ \alpha \circ \beta = \gamma$ (¡compruébelo persiguiendo elementos!). Para poder concluir con elegancia, conviene introducir las siguientes nociones generales. Hay ciertos conjuntos de transformaciones que son tan importantes que conviene darles un nombre específico, el de **grupo:**

Definición 3.1.2 A un conjunto G de transformaciones de un conjunto A se le llama un *grupo de transformaciones* de A si cumple

$$\begin{array}{rl} \textbf{i).-} & \mathrm{id}_A \in G \\ \textbf{ii).-} & f, g \in G \Rightarrow g \circ f \in G \\ \textbf{iii).-} & f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G \end{array}$$

El ejemplo trivial de un grupo sería el conjunto de <u>todas</u> las transformaciones de A.

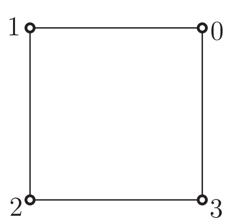
En el caso de $A = \Delta_3$, el grupo de todas sus transformaciones tiene 6 elementos; pero también hay otro grupo de transformaciones que consiste en las tres del primer renglón, las rotaciones; pues contienen a la identidad (es un conjunto no vacio), es *cerrado bajo composición* (cumple **(ii)**) y es *cerrado bajo* inversas (cumple **(iii)).** Y también cada una de las transposiciones (o reflexiones) junto con la identidad forman un grupo (con dos elementos) de transformaciones de Δ_3.

Dado un conjunto cualquiera de transformaciones de A, el grupo que *genera* es el grupo de transformaciones que se obtiene de todas las posibles composiciones con elementos de él o sus inversos.

Por ejemplo, α y β generan todas las transformaciones de Δ_3 (pues ya las hemos descrito como composiciones de α y β); mientras que ρ_1 genera el grupo de rotaciones de Δ_3 (que consiste de id, ρ_1 y $\rho_1^2 = \rho_2$). Las *relaciones* que cumplen α y β son

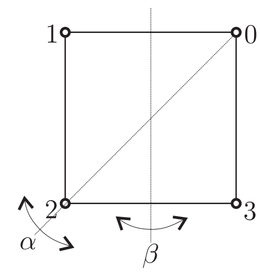
$$\alpha^2 = \beta^2 = (\beta \circ \alpha)^3 = \mathrm{id}$$

Si consideramos ahora a $\Delta_4 := \{0, 1, 2, 3\}$, tendríamos que el conjunto de sus funciones tiene $4^4 = 256$ elementos, mientras que el grupo de todas sus transformaciones tiene $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ elementos (demasiados para escribirlos todos). Pero dentro de este, podemos encontrar otros grupos, que podemos llamar *subgrupos*.



Uno importante es el de aquellas transformaciones que mantienen intacta (que *preservan*) la estructura del cuadrado regular cuyos vétrices se etiquetan $0, 1, 2, 3$ en orden cíclico; por ejemplo, la que mantiene fijos al 0 y al 1 pero que transpone al 2 y al 3 no preserva al cuadrado pues, e.g., la arista del 1 al 2 va a una diagonal, la $1-3$. No es dificil ver que éstas (las *simétrias* del cuadrado) son 8: las cuatro rotaciones (incluyendo a la identidad), y 4 reflexiones.

Pero en vez de escribirlas todas podemos describirlas mediante *generadores*. Sean ahora



$$\begin{array}{ccccccc} & \alpha & & & & \beta & \\ 0 & \mapsto & 0 & \quad & 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 3 & & 1 & \mapsto & 0 \\ 2 & \mapsto & 2 & & 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 & & 3 & \mapsto & 2 \end{array} \tag{3.1}$$

entonces $\beta \circ \alpha$ es la rotación $(0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0)$ y las otras dos rotaciones del cuadrado son $(\beta \circ \alpha)^2$ y $(\beta \circ \alpha)^3$; mientras que las dos reflexiones que faltan describir son $(\alpha \circ \beta \circ \alpha)$ y $(\beta \circ \alpha \circ \beta)$. Podemos entonces concluir que el grupo de simetrías del cuadrado está generado por α y β que cumplen las relaciones

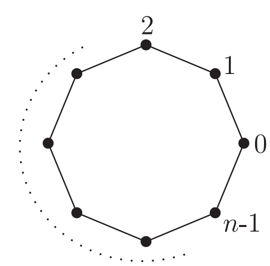
$$\alpha^2 = \beta^2 = (\beta \circ \alpha)^4 = \mathrm{id}$$

mientras que el grupo de rotaciones tiene un solo generador $\rho = (\beta \circ \alpha)$ que cumple $\rho^4 = \mathrm{id}$.

Para referencia posterior, y a reserva de que se estudien con más detenimiento en el caso general en la Sección ??, conviene ponerle nombre a los grupos de transformaciones que hemos descrito.

Al conjunto de todas las transformaciones de un conjunto con n elementos $\Delta_n := \{0, 1, ..., n-1\}$ se le llama el *grupo simétrico de orden* n; se le denota $\mathbf{S}_n$ y consta de $n! := n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ (n factorial) elementos también llamados *permutaciones*.

Dentro de este grupo hemos considerado dos subgrupos (para $n = 3, 4$): el que preserva la estructura del polígono regular con n lados cuyos vértices se etiquetan $0, 1, 2, ..., (n-1)$ en orden cíclico, a quién se le llama el *grupo diedrico de orden* n, y se le denota $\mathbf{D}_n$, que tiene $2n$ elementos; y el subgrupo de éste generado por la *rotación* $(0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto ... \mapsto (n-1) \mapsto 0)$ que tiene n elementos, se le llama *grupo cíclico de orden* n y se le denota $\mathbf{C}_n$. Hay que observar que para $n = 3$ el diédrico y el simétrico coinciden ($\mathbf{S}_3 = \mathbf{D}_3$) pero esto ya no sucede para $n = 4$; y que para $n = 2$, los tres coinciden ($\mathbf{S}_2 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_2$) porque Δ_2 es muy chiquito.



EJERCICIO 3.5 Para el caso $n = 4$, escribe explícitamente (en forma de tabla de asignaciones) las ocho transformaciones del grupo diédrico $\mathbf{D}_4$; su expresión más económica (en el número de símbolos usados) como composición de α y β (definidas por las tablas de asignaciones (3.1)), y también da su representación geométrica.

EJERCICIO 3.6 ¿Puedes encontrar un subgrupo de $\mathbf{S}_4$ "escencialmente igual" a $\mathbf{S}_3$?

EJERCICIO 3.7 ¿Puedes encontrar un subgrupo de $\mathbf{S}_4$ de orden 12? (Piensa en un tetraedro regular en $\mathbb{R}^3$ y describe al grupo geométricamente.)

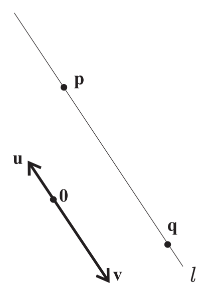
EJERCICIO 3.8 ¿Puedes encontrar una permutacion $\gamma : \Delta_4 \to \Delta_4$ tal que α, β y γ generen todas las permutaciones $\mathbf{S}_4$ (por supuesto que $\gamma_i \notin \mathbf{D}_4$)?

EJERCICIO 3.9 Da explicitamente (con la tabla de asignación $\Delta_n \to \Delta_n$) dos generadores α y β para los grupos diédricos de orden $n = 5$ y $n = 6$ (es decir, para las simetrías del pentágono y el hexágono). ¿Qué relaciones cumplen? ¿Puedes intuir y describir lo equivalente para el caso general?

* EJERCICIO 3.10 Considera un cubo regular Q en $\mathbb{R}^3$. Etiqueta sus vértices con Δ_8. Dentro de $\mathbf{S}_8$ hay un subgrupo que es el que preserva la estructura geométrica del cubo. ¿Cuántos elementos tiene? ¿Puedes describirlo con generadores y relaciones?

3.2 Las transformaciones afines de $\mathbb{R}$

El primer grupo de transformaciones geométrico-analíticas que estudiaremos es el que surge de la ambigüedad en la parametrización de rectas. Recuérdese que nuestra definición original de una recta fué con un parametro real, pero para una sola recta hay muchas parametrizaciones (dependen de escoger un punto base y un vector direccional); la forma de relacionarse de estos parametros serán las transformaciones afínes.



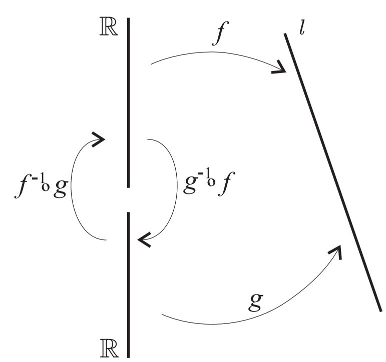
Supongamos que tenemos una misma recta ℓ parametrizada de dos maneras distintas. Es decir, que tenemos

$$\begin{aligned} \ell &= \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\} \\ \ell &= \{\mathbf{q} + s\,\mathbf{u} : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ (aunque también funcione el razonamiento que sigue en cualquier espacio vectorial). Sabemos además que los vectores direccionales, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son distintos de $\mathbf{0}$ para que efectivamente describan una línea recta. La pregunta es ¿cómo se relacionan los parametros t y s?

Otra manera de pensar estas rectas es como la imagen de funciones cuyo dominio son los reales, es decir, tenemos dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \\ g(s) &= \mathbf{q} + s\,\mathbf{u} \end{aligned}$$



cuya imagen es la misma recta ℓ. Puesto que son ambas biyecciones sobre ℓ, podemos restringir el codominio y pensarlas a ambas como funciones de $\mathbb{R}$ en ℓ. Y entonces tiene sentido hablar de sus inversas $f^{-1} : \ell \to \mathbb{R}$ y $g^{-1} : \ell \to \mathbb{R}$. La pregunta es entonces ¿quiénes son las funciones $(g^{-1} \circ f)$ y $(f^{-1} \circ g)$ que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Puesto que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos (definen la misma recta), existe un número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = a\,\mathbf{v}$; de hecho $a = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,/\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$, y obsérvese que $a \neq 0$. Y además como $\mathbf{q} \in \ell$ se puede expresar en términos de la primera parametrización; es decir, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{q} = f(b) = \mathbf{p} + b\,\mathbf{v}$. Tenemos entonces que para cualquier $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(s) &= \mathbf{q} + s\,\mathbf{u} \\ &= \mathbf{p} + b\,\mathbf{v} + s(a\,\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{p} + (as+b)\,\mathbf{v} \\ &= f(as+b) \end{aligned}$$

aplicando la función f^{-1} a ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$(f^{-1} \circ g)(s) = as + b$$

Para obtener la otra composición, podemos proceder más directamente, tomando a esta última expresión como la que da al parametro t. Es decir

$$t = as + b$$

de donde, como $a \neq 0$, podemos despejar

$$s = a^{-1}t - ba^{-1}$$

Definición 3.2.1 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *afín* si se escribe como

$$f(x) = ax + b \tag{3.2}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$; y cuando $a \neq 0$ la llamaremos *transformación afín.*

Nuestro uso de el término transformación se justifica por el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.11 Demuestra que la función afín (3.2) es biyectiva sí y sólo sí $a \neq 0$.

EJERCICIO 3.12 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = -x+2$. Encuentra las fórmulas para f^{-1}, g^{-1}, f^2, $f \circ g$ y $g \circ f$.

EJERCICIO 3.13 Demuestra que las transformaciones afines son cerradas bajo inversas y composición.

Obsérvese que las gráficas de las funciones afines son las rectas no verticales, pues estas están dadas por la ecuación $y = ax+b$. Y que de estas las rectas no horizontales corresponden a las transformaciones afines.

Al conjunto de todas las transformaciones afines de $\mathbb{R}$, que por el ejercicio anterior forman un grupo, lo denotaremos $\mathbf{Af}(1)$.

Podemos ahora resumir lo que hicimos en los parrafos anteriores.

Lema 3.2.1 *Dos parametrizaciones de una misma recta se relacionan por una transformación afín entre los parámetros.* $\square$

Así como las parametrizaciones de rectas dependen de escoger dos puntos en ellas, las transformaciones afines dependen unicamente de dos valores. Pues las constantes que la definen, a y b en nuestro caso (3.2), se obtienen como

$$\begin{aligned} b &= f(0) \\ a &= f(1) - f(0) \end{aligned}$$

y representan un cambio de escala (multiplicar por a) y luego una translación (sumarle b). De tal manera que si nos dicen que f es una función afín que manda al 0 en b ($f(0) = b$) y al 1 en c ($f(1) = c$), recuperamos toda la función por la fórmula

$$f(x) = (c - b)\,x + b$$

y obsérvese que es transformación cuando $f(0) \neq f(1)$ y si no es constante. Si el 0 y el 1 pueden ir a cualquier pareja de números por una transformación afín, entonces cualquier pareja de números (distintos) puede ser enviada al 0, 1 (por la inversa) y de ahí a cualquier otra pareja. Hemos demostrado:

Teorema 3.2.1 (Dos en Dos) *Dados dos pares de puntos x_0, x_1 y y_0, y_1 en $\mathbb{R}$, (donde por par se entiende que son distintos, i.e., $x_0 \neq x_1$ y $y_0 \neq y_1$), existe una única transformación afín $f \in \mathbf{Af}(1)$ que manda una en la otra, i.e., tal que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$.* □

EJERCICIO 3.14 Encuentra la transformación afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

a). $f(2) = 4$ y $f(5) = 1$
b). $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$
c). $f(-1) = 0$ y $f(3) = 2$

EJERCICIO 3.15 Encuentra la fórmula explicita (en términos de x_0, x_1,y_0, y_1) de la función f del Teorema anterior.

EJERCICIO 3.16 Discute qué pasa en el Teorema (y en la fórmula del ejercicio) anterior si se permite que en los pares se de la igualdad.

3.2.1 Isometrías de $\mathbb{R}$

Hemos dicho que las transformaciones afines de la recta consisten de un "cambio de escala" (determinado por la constante a) y luego una translación (determinada por b). Pero podemos ser más precisos. Como la distancia en $\mathbb{R}$ se mide por la fórmula $d\,(x, y) = |x - y|$, podemos demostrar que todas las distancias cambian por el mismo factor bajo la transformación afín $f\,(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} d\,(f(x), f(y)) &= |ax + b - (ay + b)| = |ax - ay| \\ &= |a(x - y)| = |a|\,|x - y| = |a|\,d(x, y) \end{aligned}$$

Tenemos entonces una familia distinguida de transformaciones afines que son las que **no** cambian la escala, las que mantienen rígida a la recta real y que llamaremos *isometrías* de $\mathbb{R}$ pues preservan la métrica (la distancia). Denotemos

$$\mathbf{Iso}(1) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \quad \text{con} \quad |a| = 1\}$$

(dejamos como ejercicio fácil demostrar que es un grupo de transformaciones).

Tenemos que $\mathbf{Iso}(1)$ se divide naturalmente en dos clases de transformaciones: las *translaciones*, cuando $a = 1$ (y la función es entonces $f(x) = x + b$) que consisten en deslizar a la recta rígidamente hasta que el 0 caiga en b; o bien las *reflexiones*, cuando $a = -1$ y que entonces se escriben $g(x) = -x + b$. Veámos que estas últimas tienen un *punto fijo*, es decir, un punto que se queda en su lugar bajo la transformación. Este debe satisfacer la ecuación $g(x) = x$ que es

$$x = -x + b$$

y que implica $x = b/2$. Entonces, lo que hacen las reflexiones es intercambiar rígidamente los dos lados de un punto que podemos llamar su *espejo* (pues por ejemplo, $g(b/2 + 1) = b/2 - 1$ y en general se tiene que $g(b/2 + x) = b/2 - x$), y de ahí el nombre de “reflexión”.

EJERCICIO 3.17 Demuestra que $\mathbf{Iso}(1)$ es un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.18 Demuestra que las translaciones de $\mathbb{R}$, que denotaremos $\mathbf{Tra}(1)$, forman un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 3.19 Demuestra que si $f \in \mathbf{Af}(1)$ no tiene puntos fijos, es decir, que $f(x) \neq x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces es una translación no trivial (la trivial es transladar por 0, que es la identidad y tiene a todo $\mathbb{R}$ como puntos fijos).

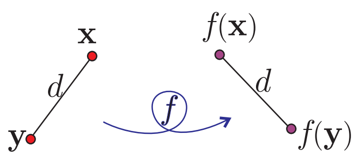
EJERCICIO 3.20 Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión es ella misma.

EJERCICIO 3.21 Demuestra que la composición de dos reflexiones es una translación del doble de la distancia (dirigida) entre sus espejos.

3.3 Isometrías y Transformaciones Ortogonales

En esta sección se estudian las transformaciones más importantes para la geometría euclidiana en su sentido estricto, pues son las que preservan la métrica, la noción de distancia, y por lo tanto la estructura rígida de las figuras geométricas. Puesto que la definición general es intuitivamente nítida, partiremos de ella y deduciremos las propiedades básicas de las isometrías que nos llevarán, en las secciones siguientes, a obtener las fórmulas explicitas que las definen y que entonces nos facilitarán la obtención de nuevos resultados y su comprensión cabal.

Es importante señalar que muchos de los resultados de esta sección, asi como las definiciones, solo dependen de las nociones de distancia y producto interior en un espacio vectorial. Asi que procederemos en general, (para $n = 1, 2, 3$, puede pensarse) y hasta el final de la sección, salvo por los ejemplos, concretaremos los resultados al plano.



Definición 3.3.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *isometría* si preserva distancia. Es decir, si para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \ .$$

También se les llama *transformaciones rígidas* (aunque cobré sentido esta terminología hasta que demostremos que son biyectivas). Se denota por $\mathbf{Iso}(n)$ al conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$.

Nótese que la definición tiene sentido en cualquier espacio métrico, y que coincide para $n = 1$ con las de la sección anterior. Las isometrías mandan al espacio en sí mismo de manera tal que cualquier estructura rígida se mantiene. Estas funciones o transformaciones las vemos a diario. Por ejemplo, mover una silla de un lugar a otro induce una isometría si pensamos que el espacio euclidiano se puede generar y definir en relación a ella; el efecto de esta isometría en la silla es ponerla en su destino.

Antes de ver más ejemplos en detalle, demostraremos tres lemas generales que usan solamente la definición de isometría y tienden hacía la demostración de que las isometrías forman un grupo de transformaciones.

Lema 3.3.1 *Una isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva.*

Demostración. Esto se debe a que la distancia entre puntos diferentes es estrictamente positiva. Formalmente, supongamos que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son tales que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. Esto implica que $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$. Como f es isometría, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$ y por lo tanto que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. $\square$

Lema 3.3.2 *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son isometrías entonces $g \circ f$ también lo es.*

Demostración. Usando la regla de composición y la definición de isometría dos veces (primero para g y luego para f), se obtiene que para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(\mathbf{x}), (g \circ f)(\mathbf{y})) &= d(g(f(\mathbf{x})), g(f(\mathbf{y}))) \\ &= d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

y por tanto $g \circ f \in \mathbf{Iso}(n)$. $\square$

Lema 3.3.3 *Si $f \in \mathbf{Iso}(n)$ y tiene inversa f^{-1}, entonces $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(n)$.*

Demostración. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $d(f^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(\mathbf{y})) = d(f(f^{-1}(\mathbf{x})), f(f^{-1}(\mathbf{y})))$ pues f es isometría; pero la última expresión es $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, lo cual demuestra que $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(n)$. □

Nos falta entonces demostrar que las isometrías son suprayectivas para concluir que $\mathbf{Iso}(n)$ es un grupo de transformaciones. Aunque esto sea intuitivamente claro ("una transformación rígida del plano no puede dejar partes descobijadas"), la demostración sería ahorita complicada; con un poco más de técnica será muy sencilla. Así que vale suponer que es cierto por un rato, desarrollar los ejemplos, la intuición y la técnica y luego volver a preocuparnos.

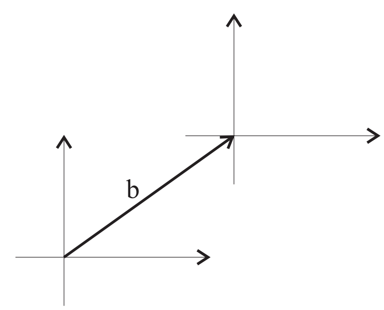
3.3.1 Ejemplos

Ya hemos visto los ejemplos en la recta (cuando $n = 1$), que son translaciones y reflexiones. Ejemplos en el plano serían rotar alrededor de un punto fijo, reflejar en una recta o bien, transladar por un vector fijo a todo el plano. Estas últimas son muy fáciles de definir:

Translaciones

Dado un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la *translación por* $\mathbf{b}$, es la función

$$\tau_{\mathbf{b}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$



que claramente es una transformación (inyectiva, pues $\mathbf{x}+\mathbf{b} = \mathbf{y} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$; y sobre, puesclaramente $\tau_{\mathbf{b}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{b}}$). Y además es una isometría ($\tau_{\mathbf{b}} \in \mathbf{Iso}(n)$) pues

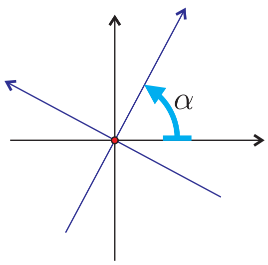
$$\begin{aligned} d(\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}),\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})) &= |\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) - \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})| \\ &= |(\mathbf{x}+\mathbf{b}) - (\mathbf{y}+\mathbf{b})| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ . \end{aligned}$$

De hecho las translaciones forman un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^n$, al que denotaremos $\mathbf{Tra}(n)$. Que puede identificarse con el grupo aditivo $\mathbb{R}^n$, en lenguaje de grupos "son *isomorfos*", pues hay una translación por cada elemento de $\mathbb{R}^n$, y su regla de composición es claramente

$$\tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{\mathbf{a}} = \tau_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})} \ .$$

Rotaciones

Definir explicitamente a las rotaciones es más dificil, aunque intuitivamente sea claro a que nos referimos: "clavar una tachuela en algún punto y luego rotar al plano alrededor de ella un cierto ángulo". Usando coordenadas polares sí es fácil definir la rotación de un ángulo α alrededor del origen, pues al ángulo de cualquier vector simplemente le sumamos el ángulo de rotación. Así que podemos definir la *rotación de un ángulo* α alrededor del origen como

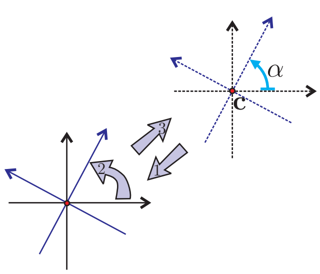


$$\begin{array}{rcll} \rho_\alpha & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & \\ \rho_\alpha(\theta, r) & = & (\theta + \alpha, r) & \text{(en coordenadas polares)} \end{array}$$

Nótese que entonces $\rho_0 = \rho_{2\pi} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ y se cumple, como en las translaciones, que

$$\rho_\beta \circ \rho_\alpha = \rho_{(\alpha+\beta)}$$

pero ahora sumando ángulos. Además son transformaciones (biyectivas, insistimos una vez más) pues tienen inversa $\rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha}$ de tal manera que las rotaciones alrededor del origen forman un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ (isomorfo al de los ángulos con la suma: los elementos de este grupo —transformaciones por definición, que más adelante denotaremos por $\mathrm{SO}(2)$— están en correspondencia uno a uno con los puntos del círculo unitario $\mathbb{S}^1$ de tal manera que la composición correponde a la suma de ángulos.)



Ahora, usando a las translaciones podemos definir las rotaciones con centro en cualquier otro lado con un truco llamado *conjugación*. Para obtener la rotación de un ángulo α con centro en el punto $\mathbf{c}$, denotémosla $\rho_{\alpha,\mathbf{c}}$, podemos llevar al centro $\mathbf{c}$ al origen por medio de la translación $\tau_{-\mathbf{c}}$, rotamos ahí y luego regresamos a $\mathbf{c}$ a su lugar; es decir, podemos definir

$$\rho_{\alpha,\mathbf{c}} = \tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_\alpha \circ \tau_{-\mathbf{c}}$$

Aunque sea intuitivamente cristalino que las rotaciones son isometrías (se puede rotar un vidrio), no tenemos aún una demostración formal de ello; y con coordenadas polares se ve "en chino" pues expresar distancias (o translaciones) en términos de ellas está idem. Mejor nos esperamos a tener buenas expresiones cartesianas de las rotaciones para demostrar que preservan distancias y que al componer dos rotaciones cualesquiera se obtiene otra (el problema ahorita es encontrar su centro). Y entonces veremos que junto con las translaciones forman el grupo de *movimientos rígidos del plano*, llamados asi pues se puede llegar a cualquiera de estas transformaciones *moviendo* continuamente (poco a poco) al plano.

EJERCICIO 3.22 Demuestra formalmente (con las definiciones anteriores) que el conjunto de rotaciones alrededor de un punto dado $\mathbf{c}$ es un grupo.

EJERCICIO 3.23 ¿Puedes encontrar el centro de la rotación de 90° que se obtiene rotando 45° en el origen y luego rotando otros 45° en el punto $(2, 0)$? (Haz dibujos —o juega con tachuelas y un acetato sobre un papel cuadriculado— y busca a un punto que se quede en su lugar despues de las dos rotaciones.) ¿Cuál es el centro de rotación si se invierte el orden de la composición?

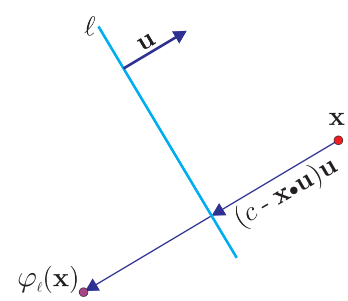
EJERCICIO 3.24 En base a tu experiencia con el ejercicio anterior, y sin preocuparte de formalidades, ¿puedes dar una receta geométrica para encontrar el centro de rotación de la composición de dos rotaciones (con centros distintos, por supuesto)?

EJERCICIO 3.25 ¿Puedes conjeturar qué transformación es $\rho_{-\alpha,\mathbf{b}} \circ \rho_{\alpha,\mathbf{c}}$? ¿Puedes demostrarlo? Si no ¿qué hace falta?

Reflexiones

Las reflexiones (que intercambian rígidamente los dos lados de una “linea espejo”) las podemos definir usando la proyección ortogonal a una recta. Dada una recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$, se le puede definir por la ecuación normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ con $\mathbf{u}$ un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$ una constante (lo que habíamos llamado ecuación unitaria). Sabemos que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ el vector que lleva a $\mathbf{x}$ ortogonalmente a la recta ℓ es

$$(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\, \mathbf{u}$$



pues

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} + (c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + (c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = c\ .$$

Entonces, el reflejado de $\mathbf{x}$ en el *espejo* ℓ será *empujarlo* otro tanto del otro lado de ℓ. Asi que definimos la *reflexión* de $\mathbb{R}^2$ a lo largo de $\ell : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ (con $|\mathbf{u}| = 1$) como

$$\begin{aligned} \varphi_\ell \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_\ell(\mathbf{x}) \quad &= \quad \mathbf{x} + 2\,(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\, \mathbf{u}\ . \end{aligned}$$

Obsérvese que no nos preocupamos de las propiedades de grupo respecto a las reflexiones porque **no** lo son. Ni siquiera contienen a la identidad.

EJERCICIO 3.26 Usando coordenadas (x, y) da fórmulas más sencillas para las reflexiones en los ejes coordenados y verífica que coinciden con la fórmula anterior.

EJERCICIO 3.27 Usando coordenadas da fórmulas sencillas para las reflexiones en las rectas $x = y$ y $x = -y$.

EJERCICIO 3.28 Usando coordenadas da fórmulas sencillas para las reflexiones en las rectas $x = c$ y $y = c$ donde c es cualquier constante.

EJERCICIO 3.29 Define reflexiones en planos de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 3.30 Demuestra que las reflexiones son isometrías.

EJERCICIO 3.31 Demuestra que si φ es una reflexión, entonces $\varphi^{-1} = \varphi$.

EJERCICIO 3.32 Demuestra que si φ_ℓ es la reflexión en la recta ℓ, entonces $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo de φ_ℓ, i.e. $\varphi_\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, si y sólo si $\mathbf{x} \in \ell$.

3.3.2 Grupos de Simetrías

Supongamos por un ratito (luego lo demostraremos) que las isometrías de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) forman un grupo (algo que no es dificil de creer). Entonces podemos definir los "grupos de simetrías" de las figuras, en el plano o de los cuerpos en el espacio, correspondiendo a nuestra intuición milenaria de lo que queremos decir cuando decimos que algo "tiene simetría", por ejemplo al hablar de una flor, de un dibujo o de un edificio.

Para fijar ideas, pensemos en una figura en un papel, y al papel como el plano $\mathbb{R}^2$. La abstracción más elemental es que la figura es un subconjunto F de $\mathbb{R}^2$: los puntos del plano están en F (pintados de negro) o no (de blanco como el papel). Si nos ponemos quisquillosos, podríamos distinguir colores en los puntos (algo que hacen las computadoras hoy día) y tener entonces una función $\gamma : F \to \{Colores\}$ para ser más precisos. Pero quedémonos con el bulto, una *figura* F es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (de una vez englobamos a los sólidos en $\mathbb{R}^3$). Una *simetría* de F (y hasta el termino "sí-metría" lo indica) es una transformación que preserva la métrica y la figura, es decir una $f \in \mathrm{Iso}(n)$ tal que $f(F) = F$ (donde estamos aplicando la transformación a un conjunto para obtener un nuevo conjunto). Podemos definir entonces al *grupo de simetrías* de la figura $F \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto

$$\mathrm{Sim}(F) := \{f \in \mathrm{Iso}(n) \mid f(F) = F\} \tag{3.3}$$

Debemos demostrar entonces que además de ser un conjunto de transformaciones de $\mathbb{R}^n$ cumple con las propiedades que lo hacen grupo; que estamos usando los términos con propiedad:

i) Claramente $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Sim}(F)$ pues $\mathrm{id}(F) = F$. De tal manera que cualquier figura tiene al menos la simetría trivial; y si la figura F no tiene otra simetría diríamos coloquialmente que **no** tiene simetrías, que es asimétrica.

ii) Supongamos que $f \in \mathrm{Sim}(F)$, entonces sustituyendo $F = f(F)$ obtenemos que

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = \left(f^{-1} \circ f\right)(F) = \mathrm{id}(F) = F$$

donde estamos usando nuestra suposición de que $\mathrm{Iso}(n)$ es un grupo y entonces $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(n)$ ya existe.

iii) Si $f, g \in \mathrm{Sim}(F)$ entonces usando que cada una no cambia a la figura se obtiene que

$$(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$$

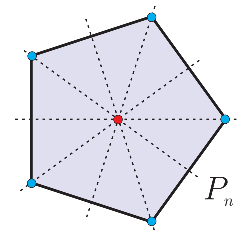
Que dice lo obvio, si un movimiento deja una figura en su lugar le podemos aplicar otro que la deja en su lugar y sigue en su lugar.

De tal manera que cualquier figura o cuerpo tiene asociado un grupo de isometrías; qué tan grande es ese grupo es nuestra medida intuitiva de "su simetría". Por ejemplo, el cuerpo humano (abstracto, por supuesto) tiene como simetría no trivial a una reflexión, que al ser su propia inversa forma, junto con la identidad, un grupo. Y ahora sí, podemos definir formalmente a los grupos que esbozamos (para $n \geq 5$, y definimos para $n = 3, 4$) en la primera Sección.

Grupos Diédricos.

Consideremos al polígono regular de n lados P_n, con $n \geq 2$, cuyos vértices son el conjunto

$$\{\mathbf{v}_{k,n} := (\cos(2\pi k/n), \mathrm{sen}(2\pi k/n)) \mid k = 0, 1, \cdots, n-1\}$$



y que consiste de los segmentos entre puntos sucesivos $\overline{\mathbf{v}_{k,n}\mathbf{v}_{k+1,n}}$ llamados sus *caras*, *lados* o *aristas*; y si se quiere se puede pensar que también lo de adentro es parte de P_n. Definimos entonces al *grupo diédrico de orden n* como su grupo de simetrías:

$$\mathbf{D}_n := \mathrm{Sim}(P_n)$$

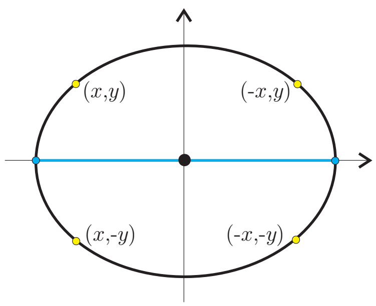
Es claro que $\mathbf{D}_n$ contiene a las n rotaciones en el origen $\rho_{2\pi k/n}$ que incluyen a la identidad ($k = 0$ o $k = n$). Pero además tiene reflexiones cuyos espejos son las lineas por el origen y los vertices y las lineas por el origen y el punto medio de sus lados (que para n impar ya estaban contados). En cualquier caso, son exactamente n reflexiones pues en nuestro conteo hubo repeticiones. De tal manera que $\mathbf{D}_n$ tiene $2n$ elementos.

Esta clase de simetría es la que tienen los rosetones de las iglesias (por lo que también se les conoce como "grupos de rosetas o bien de rosetones"); muchas de las figuras de papel picado que se obtienen doblando radialmente y luego cortando con tijeras; algunas plazas y edificios famosos y multiples flores asi como las estrellas de mar.

Más cercano al corazoncito de este libro, podemos considerar a las cónicas. Sea $\mathcal{E}$ la elipse dada por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a > b$ (aunque lo que importa es que $a \neq b$). Es claro del dibujo que $\mathcal{E}$ tiene como simetrías a las reflexiones en los ejes. Pero lo podemos demostrar formalmente pues, como se debió haber respondido al ejercicio correspondiente, la reflexión en el eje-x está dada por la fórmula



$$\varphi_x(x,y) = (x,-y)$$

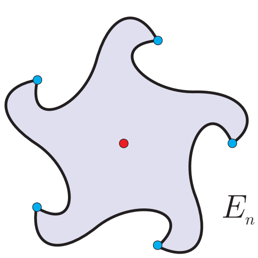
Y análogamente, la reflexión en el eje-y es $\varphi_y(x,y) = (-x,y)$, de tal manera que su composición (en cualquier orden) es la rotación de π en el origen ($(x,y) \mapsto (-x,-y)$). Si el punto (x,y) está en la elípse, satisface la ecuación y entonces los otros tres puntos que se obtienen al cambiarle el signo a una o las dos coordenadas también la satisfacen pues cambiar el signo no afecta a los cuadrados. Esto implica que $\mathcal{E}$ va en sí misma al reflejar en cualquiera de los ejes, que en adelante llamaremos sus *ejes de simetría*. Falta ver que no tiene ninguna otra simetría y esto se sigue de que su *diametro* (el segmento máximo entre sus puntos, que mide $2a$) es único. Y puesto que $\mathbf{D}_2$ es, por definición, el grupo de simetrías de un segmento, entonces

$$\mathrm{Sim}(\mathcal{E}) = \mathbf{D}_2$$

Analogamente, el grupo de simetrías de una hipérbola es el diédrico de orden 2. Las parábolas tienen menos simetrías, sólo una reflexión, que junto con la identidad forma un grupo que podemos llamar $\mathbf{D}_1$ para completar la definición de los diédricos (finitos). Nótese que este tipo de simetría (el de una sola reflexión, junto con la identidad) es muy común, el cuerpo humano (en abstracto, por supuesto), casi todos los animales, una silla, etc.

Grupos Cíclicos.

Son el subgrupo del diédrico correspondiente que consiste de tomar unicamente a las rotaciones. Pero lo importante es que también son grupos de simetría de figuras. Para obtener una, podemos reemplazar a las aristas del poligono P_n por curvas que distingan entre salida y llegada, por ejemplo, un símbolo de "integral" para obtener a la "Estrella Ninja de n picos" E_n. Y entonces el *grupo cíclico de orden* n es



$$\mathbf{C}_n := \mathrm{Sim}(E_n)$$

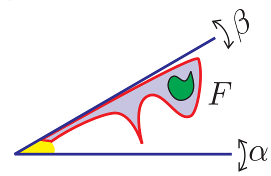
El grupo cíclico de orden n, $\mathbf{C}_n$, tiene n elementos. Se puede identificar con el grupo de residuos módulo n, denotado $\mathbb{Z}_n$, donde la composición corresponde a la suma.

Parece que el gran Leonardo Da Vinci notó que cualquier figura plana que se pueda dibujar en una hoja de papel (traducido a una figura $F \subset \mathbb{R}^2$ acotada) y que no tenga todas las simetrías de un circulo (que no sea un conjunto de anillos concéntricos), tiene como grupo de simetrías a alguno de estos dos tipos; es decir, o es diédrico o es cíclico. Una versión de este resultado la demostraremos hacía el final del capítulo, aunque desde ahora se puede entender su enunciado. Dice que si G es un grupo finito de Isometrías, es decir que como conjunto es finito, entonces es cíclico o es diédrico; que con estos dos ejemplos ya acabamos.

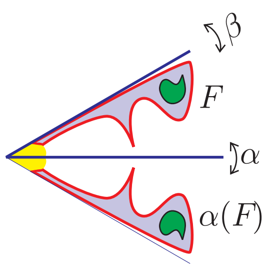
Sin embargo, hay otros grupos de simetría interesantes. Si pensamos en figuras no acotadas; por ejemplo, una cuadrícula o un mosaico (un cubrimiento del plano con copias de unas cuantas piezas), M digamos, entonces $\mathrm{Sim}\,(M)$ es lo que se llama un grupo cristalográfico. De estos solamente hay 17, pero no lo demostraremos en este libro.

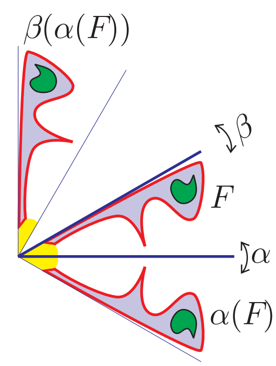
Diédrico y cíclico infinitos.

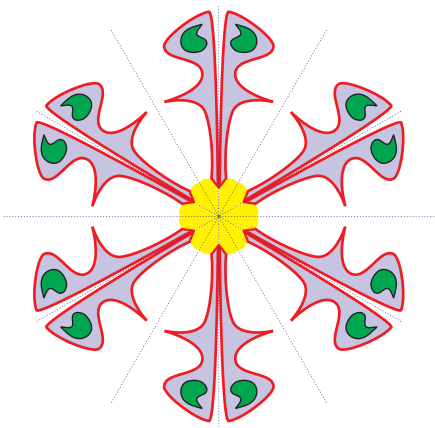
Para entender el porqué del nombre en sus versiones infinitas, vale la pena retomar la idea de generadores de un grupo usada en la primera sección. Para generar una figura con simetría diédrica (que quizá, como veremos, debía llamarse *caleidoscópica*) basta poner dos espejos en un ángulo π/n y colocarlos sobre cualquier dibujo; la porción de este que queda entre ellos se "reproduce" caleidoscópicamente y forma alrededor de la arista donde se juntan los espejos una figura con simetría $\mathbf{D}_n$.



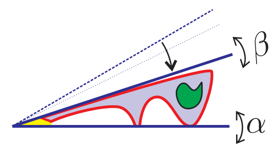
Consideremos esta situación en el plano del dibujo. Sean α y β las reflexiones en los dos espejos (que ahora son líneas en el plano y los de deveras son los planos que emanan perpendicularmente de ellas) y sea F la figura que queda en el ángulo relevante. La figura $\alpha\,(F)$ tiene la orientación contaria a F, es un reflejado de ella. Al volverla a reflejar en $\beta\,(\alpha\,(F))$ esta nueva copia de F ya tiene la orientación original y se obtiene rotando a F el doble del ángulo entre los espejos, a saber, $2\pi/n$ alrededor de su punto de intersección. Pero esto no se cumple sólo para la figura F: es una propiedad de las transformaciones, es decir, $\beta \circ \alpha$ es dicha rotación. La composición en el otro orden, $\alpha \circ \beta$, resulta ser la rotación inversa (de $-2\pi/n$ en el punto de intersección). Así, a cada copia o imagen de la figura F que se ve en el ángulo de espejos le corresponde un elemento del grupo diédrico que es justo la transformación que lleva a F ahí y que se obtiene componiendo sucesivamente a las dos reflexiones originales α y β. La figura con simetría diédrica o caleidoscópica que se genera es la unión de todas estas copias (justo $2n$) de lo que se podría llamar la *figura fundamental* que habíamos denotado F.





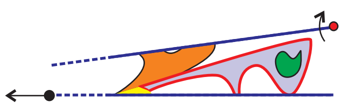


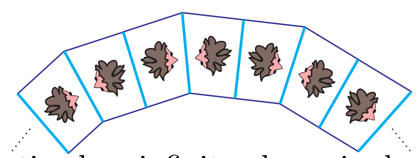
Hemos visto que, como en los casos $n = 3, 4$, los grupos diédricos estan generados por dos reflexiones; a saber, $\mathbf{D}_n$ está generado por dos reflexiones cuyos espejos se encuentran en un ángulo π/n (en las figuras tomamos $n = 6$). ¿Qué pasa si hacemos crecer n? Es claro que la figura fundamental F tenderá a hacerse más flaca y astillada, mientras que la figura caleidoscópica que generan (F y las reflexiones α y β), que podemos denotar $\mathbf{D}_n(F)$, pues resulta natural definir



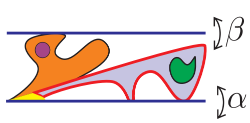
$$\mathbf{D}_n(F) := \bigcup_{g\in\mathbf{D}_n} g\,(F)\,,$$

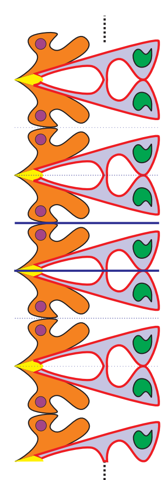
se hará más pesada y confusa, pues el ángulo π/n disminuye. Sin embargo, podemos evitar este tumulto si al mismo tiempo que n crece y π/n disminuye, alejamos al punto de intersección de los espejos; es decir, podemos girar a uno de los espejos (el correspondiente a β, digamos) alrededor de algún punto fijo y esto produce que el punto de intersección se aleje. La figura $\mathbf{D}_n(F)$ que se genera entonces es un anillo cuyo radio es grande: es como esos pasillos circulares que se generan en un baño o closet con espejos encontrados pero no perfectamente paralelos; aunque los espejos se acaben, los planos que definen se intersectan en una línea (imaginaria) que es el eje, el centro, del pasillo circular donde están nuestras imágenes viendo alternadamente en ambos sentidos y girando poco a poco.





Es claro que este proceso tiene un limite, cuando n tiende a infinito el espejo de β llega sin problemas a una paralela al espejo de α; y en ese momento generan al *grupo diédrico infinito* $\mathbf{D}_\infty$. Es el grupo que aparece en las peluquerías donde ponen espejos en paredes opuestas y, en teoría, paralelas. Cada elemento de este grupo es una composición (*palabra*) del estilo $\alpha\beta\alpha\beta\cdots\beta\alpha$, aunque puede empezar y terminar con cualesquiera de α o β. El subgrupo que consiste de palabras pares (incluyendo a la vacia que representa a la identidad) que son composición de un número par de reflexiones, es el *cíclico infinito*, $\mathbf{C}_\infty$: consta de puras translaciones y está generado por la más chica de ellas, $\alpha\beta$ o $\beta\alpha$ da lo mismo. De tal manera que naturalmente se identifica con los enteros ($\mathbb{Z}$) y la suma corresponde a la composición.





Pero el grupo diédrico infinito, como la figura con su simetría lo indica, realmente vive en la recta. Cualquier par de reflexiones distintas en $\mathbf{Iso}(1)$ lo generan. Y si lo definimos como subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^2$, fué porque gráficamente es más fácil de ver y para argumentar la naturalidad de su pomposo nombre.

Nótese por último, que aunque al escoger distintas reflexiones para generar al diédrico infinito (o a cualquiera de los finitos, para este caso) se pueden obtener subconjuntos (estrictamente) distintos de isometrías, pero la estructura algebráica de ellos (cómo se comportan bajo composición) es escencialmente la misma. De tal manera que los grupos diédricos y cíclicos que hemos definido deben pensarse como algo abstracto que tiene muchas instancias de realización geométrica. Así que, estrictamente hablando, cuando decimos que el grupo generado por tal par de reflexiones es **el** diédrico fulano, realmente deberíamos decir "es **un** diédrico de zutanito orden".

EJERCICIO 3.33 Sean α y β las dos reflexiones de $\mathbb{R}$ con espejos en el 0 y en el 1 respectivamente, y sea (para este y los siguientes ejercicios) $\mathbf{D}_\infty \subset \mathbf{Iso}(1)$ el grupo de transformaciones que generan α y β. Da las fórmulas explicitas de α, β, $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$ y $\alpha \circ \beta \circ \alpha$.

EJERCICIO 3.34 ¿Cuál es el grupo $\mathbf{D}_\infty \cap \mathbf{Tra}(1)$? Da la fórmula explicita de todos sus elementos y su correspondiente expresión como generado por α y β. *(El proximo ejercicio te puede ayudar.)*

EJERCICIO 3.35 Demuestra que las reflexiones en $\mathbf{D}_\infty$ son precisamente las reflexiones con espejo entero. Es decir, cuyo espejo está en $\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\} \subset \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.36 ¿Cuáles son los generadores del grupo diédrico infinito cuyo subgrupo de translaciones corresponde precisamente a las translaciones por números enteros $\mathbb{Z}$.

3.3.3 Transformaciones ortogonales

Hemos definido isometrías, visto los ejemplos básicos y desarrollado la importante noción de simetría —y no sólo importante en las matemáticas sino en la naturaleza donde parece ser muy abundante—, pero tenemos aún muy pocas herramientas técnicas para demostrar cosas tan elementales como que $\mathbf{Iso}(n)$ es un grupo. Para esto serán fundamentales las transformaciones ortogonales. Pero su motivación más natural viene de recapitular en cómo introdujimos la noción de distancia: como una consecuencia natural del producto interior que era más elemental y fácil de trabajar; y a este lo hemos tenido olvidado. Si las isometrías se definieron como las funciones que preservan distancia, algo similar se debe poder hacer con el producto interior.

Definición 3.3.2 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *transformación ortogonal* si preserva al producto interior. Es decir, si para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$$

Se denota por $\mathbf{O}(n)$ al grupo de *transformaciónes ortogonales* de $\mathbb{R}^n$.

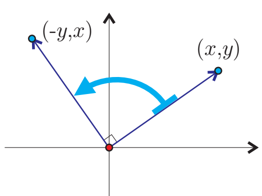
El lector observador debió haber notado que nos estamos adelantando al usar los términos "transformación" y "grupo" en la definición anterior. Estrictamente hablando, deberíamos usar los términos más modestos "función" y "conjunto", pero como sé (autor) que sí va a tener sentido, vale la pena irse acostumbrando; además, me suenan horrible los términos modestos en este caso, no me hallo usándolos. Por lo pronto, para limpiar un poco la conciencia, le dejamos al lector quisquilloso que cumpla los primeros trámites hacía la "liberación total" de los términos verdaderos.

EJERCICIO 3.37 Demuestra que la composición de funciones ortogonales es ortogonal.

EJERCICIO 3.38 Demuestra que si una función ortogonal tiene inversa entonces ésta también es ortogonal.

EJERCICIO 3.39 Demuestra que $\mathbf{O}(1) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$, donde $(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})(x) = -x$. Recuerda que el producto interior en $\mathbb{R}$ es el simple producto. Observa que entonces las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}$ son sus isometrías que dejan fijo al origen.

Antes de entrar a las demostraciones, veamos un ejemplo que nos ha sido muy útil, el compadre ortogonal en $\mathbb{R}^2$. Hemos usado al compadre ortogonal de un vector dado, pero, como lo indicamos en el momento de su presentación, si pensamos en todas las asignaciones al mismo tiempo obtenemos una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, que podemos designar como $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y que está dada por la fórmula explicita



$$\rho(x, y) = (-y, x) \ .$$

Para demostrar que el compadre ortogonal es una transformación ortogonal (valga y explíquese la redundancia), hay que escribir la fórmula para $\rho(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{y})$ con (conviene cambiar a subindices) $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ cualquier par de vectores:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{y}) &= (-x_2, x_1) \cdot (-y_2, y_1) \\ &= (-x_2)(-y_2) + x_1 y_1 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

(de hecho esto fué el inciso **(iii)** del Lema 1.7.1 que presentaba sus monerias en sociedad). Si el compadre ortogonal que, como función, consiste en girar 90° alrededor del orígen es ortogonal, es de esperarse que todas las rotaciones en el orígen también lo sean, y así será. Pero antes, relacionemos a las transformaciones ortogonales con las isometrías.

Puesto que la distancia se define en términos del producto interior, debe cumplirse que una función ortogonal también es isometría.

Lema 3.3.4 $\mathbf{O}(n) \subset \mathbf{Iso}(n)$

Demostración. Sea $f \in \mathbf{O}(n)$. Debemos demostrar que preserva distancias sabiendo que preserva producto interior. Pero esto es fácil pues la distancia se escribe en términos del producto interior. Dados $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, la definición de distancia es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

Elevando al cuadrado y usando las propiedades del producto interior se tiene entonces

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \tag{3.4}$$

Como esto se cumple para cualquier par de puntos, en particular para $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{y})$, tenemos

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))^2 &= f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\cdot f(\mathbf{y}) - 2f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \\ &= d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \end{aligned}$$

donde usamos que $f \in \mathbf{O}(n)$ en la segunda igualdad. Puesto que las distancias son positivas, de aquí se sigue que

$$d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

y por tanto que $f \in \mathbf{Iso}(n)$. □

EJERCICIO 3.40 Demuestra que las funciones ortogonales son inyectivas.

Ahora veremos que lo único que le falta a una isometría para ser ortogonal es respetar al orígen. Para que tenga sentido, hay que remarcar que una función ortogonal $f \in \mathbf{O}(n)$ preserva al orígen pues este es el único vector cuyo producto interior consigo mismo se anula, es decir, $f(\mathbf{0})\cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lema 3.3.5 *Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$ tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, entonces $f \in \mathbf{O}(n)$.*

Demostración. Con la misma idea del lema anterior, hay que escribir ahora al producto interior en términos de distancias. De la ecuación (3.4), se sigue

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2)$$

Y como $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = d(\mathbf{x},\mathbf{0})^2$, tenemos entonces

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{2}(d(\mathbf{x},\mathbf{0})^2 + d(\mathbf{y},\mathbf{0})^2 - d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2)$$

y ya estamos armados para enfrentar al lema.

Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$ (preserva distancias) tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(d(f(\mathbf{x}),\mathbf{0})^2 + d(f(\mathbf{y}),\mathbf{0})^2 - d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{0}))^2 + d(f(\mathbf{y}),f(\mathbf{0}))^2 - d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(\mathbf{x},\mathbf{0})^2 + d(\mathbf{y},\mathbf{0})^2 - d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \end{aligned}$$

□

Estamos ya en posición de expresar a todas las isometrías en términos de las ortogonales y las translaciones.

Proposicion 3.3.1 *Sea* $f \in \mathbf{Iso}(n)$. *Entonces existen* $g \in \mathbf{O}(n)$ *y* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *tales que para toda* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

y además son únicas.

Dibujo

Demostración. Veamos primero la unicidad, es decir, que si suponemos que existen $g \in \mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que f se escribe $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$, entonces g y $\mathbf{b}$ estan forzadas. Puesto que las transformaciones ortogonales dejan fijo al origen, obtenemos que

$$f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

y entonces la constante $\mathbf{b}$ está forzada a ser $\mathbf{b} := f(\mathbf{0})$. Pero entonces g ya queda definida por la ecuación

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nos falta entonces demostrar que con esta última definición de la función g y el vector constante $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que g es ortogonal.

Observése que otra manera de definir a g sería $g = \tau_{-\mathbf{b}} \circ f$, donde hay que recordar que $\tau_{-\mathbf{b}}$ es la translación por $-\mathbf{b}$. Por el Lema 3.3.2 (la composición de isometrías es isometría) y puesto que las translaciones son isometrías, se obtiene que $g \in \mathbf{Iso}(n)$. Pero además,

$$g(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

entonces $g \in \mathbf{O}(n)$ por el lema anterior y la existencia queda demostrada. □

Tenemos entonces que las isometrías se obtienen de las transformaciones ortogonales al permitir que interactuen, que se involucren, que se compongan, con las translaciones (que **no** son ortogonales, de hecho sólo se intersectan en la identidad, $\mathbf{O}(n) \cap \mathbf{Tra}(n) = \{\mathrm{id}\}$, pues la única translación que deja fijo al origen es por $\mathbf{0}$). Corresponde esto al hecho de que la distancia se obtiene del producto interior transladando un punto al orígen. Y por tanto, para acabar de entender $\mathbf{Iso}(n)$ debemos estudiar $\mathbf{O}(n)$. Como en un ejercicio ya nos escabechamos a $\mathbf{O}(1) \simeq \{1, -1\}$, concentrémonos en $\mathbf{O}(2)$.

Sea $f \in \mathbf{O}(2)$. Como f preserva al producto interior, también preserva la norma y en particular manda al círculo unitario $\mathbb{S}^1$ en si mismo

$$\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) = 1 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^1$$

Pero también preserva ortogonalidad (definida en base al producto interior). Entonces debe mandar bases ortonormales en bases ortonormales. Veámoslo con el ejemplo más simple.

Dibujo

Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$; es decir $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Y sean

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &:= f(\mathbf{e}_1)\\ \mathbf{v} &:= f(\mathbf{e}_2)\end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son una base ortonormal, pues de que $f \in \mathbf{O}(2)$ (preserva producto interior) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0\end{aligned}$$

Y entonces podemos encontrar el valor de $f(\mathbf{x})$ para cualquier $\mathbf{x}$ usando el Teorema de las bases ortonormales (1.10.1) sobre $f(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= (f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + (f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\\ &= (f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{e}_1))\mathbf{u} + (f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{e}_2))\mathbf{v}\\ &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{u} + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{v}\end{aligned}$$

que se puede escribir, tomando como de costumbre $\mathbf{x} = (x, y)$, como Dibujo

$$f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} \tag{3.5}$$

Hemos llegado entonces a una fórmula explícita para las funciones ortogonales (de $\mathbb{R}^2$) que depende unicamente de sus valores en la base canónica. Por ejemplo, si f fuera la función "compadre otogonal", entonces $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$ y por lo tanto $f(x,y) = x\,\mathbf{e}_2 - y\,\mathbf{e}_1 = (-y, x)$ como ya sabiamos. Podemos resumir con:

Proposicion 3.3.2 *Si $f \in \mathbf{O}(2)$, existe una base ortonormal $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ para la cual f se escribe*

$$f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

De aquí podemos sacar por el momento dos resultados: el primero, que estas funciones ortogonales son suprayectivas (y por lo tanto que ya les podemos decir "transformaciones" y a $\mathbf{O}(2)$ "grupo" con todas las de la ley); y el segundo, una descripción geométrica de todas ellas. Dibujo

Primero, con la notación de arriba, dado cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, es fácil encontrar $\mathbf{x}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Sea $\mathbf{x} := (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})\mathbf{e}_2$ entonces

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{u} + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{v}\\ &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{y}\end{aligned}$$

por el Teorema 1.10.1, y esto demuestra que f es sobre.

Segundo, cuántas transformaciones (¡ahora sí! sin pruritos) ortogonales de $\mathbb{R}^2$ hay es equivalente a cuántas bases ortonormales podemos escoger. El primer vector $\mathbf{u}$ (la imagen de $\mathbf{e}_1$, insistámos) puede ser cualquiera en el círculo unitario $\mathbb{S}^1$; pero una vez escogido ya nada más nos quedan dos posibilidades para escoger al segundo, pues éste debe ser perpendicular y unitario. Puede ser el compadre ortogonal ($\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$) o bien su negativo ($\mathbf{v} = -\mathbf{u}^\perp$). En el primer caso, la transformación resulta ser una rotación que manda a la base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en la base rotada $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$. Y en el segundo caso veremos que es una reflexión. Podríamos decir entonces que $\mathbf{O}(2)$ "consiste de dos copias" de $\mathbb{S}^1$ parametrizadas por $\mathbf{u}$, una corresponde a las rotaciones (cuando se escoje $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$) y la otra a las reflexiones.

Pero para que todo esto sea un hecho nos falta demostrar que sin importar que base ortonormal tomemos, siempre se obtiene una transformación ortogonal.

Proposicion 3.3.3 *Sea* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *una base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$. *Entonces la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por*

$$f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

es una transformación ortogonal.

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ cualquier par de puntos en $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= (x_1\,\mathbf{u} + x_2\,\mathbf{v}) \cdot (y_1\,\mathbf{u} + y_2\,\mathbf{v}) \\ &= (x_1 y_1)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (x_2 y_2)\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

□

EJERCICIO 3.41 Demuestra que las isometrías de $\mathbb{R}^2$ son suprayectivas, para concluir con la demostración de que $\mathbf{Iso}(2)$ es un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 3.42 Demuestra que las funciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ son suprayectivas y concluye las demostraciones de que $\mathbf{O}(3)$ e $\mathbf{Iso}(3)$ son grupos de transformaciones.

EJERCICIO 3.43 Sea $f \in \mathbf{O}(2)$ con base ortonormal asociada $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (es decir, con $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$). Con nuestra demostración de la suprayectividad de f se puede encontrar a la base ortonormal asociada a la inversa de f, llamémosla $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$. Da sus coordenadas explicitas tomando $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

EJERCICIO 3.44 Sean $f \in \mathbf{O}(2)$ y ℓ una recta dada por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$. Demuestra que $f(\ell)$ es la recta dada por la ecuación $f(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x} = c$ (ojo: tienes que demostrar dos contenciones). Concluye que f manda al haz paralelo con dirección $\mathbf{d}$ en el haz paralelo con dirección $f(\mathbf{d})$.

Un ejemplo

Para fijar ideas, concluyamos esta sección con un ejemplo que nos ayude a comprender el poder de los resultados obtenidos. Dibujo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de $45°$ (o $\pi/4$) alrededor del punto $\mathbf{p} = (3, 2)$; el problema es escribir una fórmula explicita para f. Es decir, supongamos que le queremos dar la función a una computadora para que haga algo con ella, que se la sepa aplicar a puntos concretos, no le podemos dar la descripción que acabamos de hacer (y que cualquier humano entiende) para definir f, sino que tiene que ser mucho más concreta: una fórmula analítica.

Por la Proposición 3.3.1, sabemos que f se escribe como

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

para alguna $g \in \mathbf{O}(2)$ y alguna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. El problema se divide entonces en dos: cómo se escribe g y quién es $\mathbf{b}$. Primero, g debe ser la rotación de $\pi/4$ en el origen pues f cambia a las líneas horizontales en líneas a $45°$ y en la expresión anterior sólo g puede hacer esta gracia (pues una vez que apliquemos g la translación mantendrá la orientación de las líneas). Por la Proposición 3.3.2, para expresar a g basta ver que le hace a la base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y sabemos que tiene que ir a $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$ donde $\mathbf{u}$ es el vector unitario a $45°$. Es decir, sea

$$\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

y entonces por (3.5) g se escribe

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x\mathbf{u} + y\mathbf{u}^\perp \\ &= x(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y) \end{aligned}$$

y esto sí que lo entiende una computadora. Para convencernos de que ahí la llevamos basta checar que efectivamente esta fórmula da $g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}$ y $g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}^\perp$; e inclusive que $g(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_2$ como dice la geometría.

El segundo problema es encontrar $\mathbf{b}$. Sabemos por la demostración de la Proposición 3.3.1 que $\mathbf{b} = f(\mathbf{0})$. Y entonces bastará encontrar este valor particular. Esto se puede razonar de varias maneras, pero lo haremos de manera muy general. Recordemos que definimos rotar en el punto $\mathbf{c}$ como transladar $\mathbf{c}$ al origen, rotar ahí y luego regresar a $\mathbf{c}$ a su lugar. En términos de funciones esto se escribe

$$f = \tau_{\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{-\mathbf{c}}$$

donde $\tau_{\mathbf{x}}$ es la translación por $\mathbf{x}$. De aquí, se podría sacar directamente la fórmula para f pues ya sabemos expresar a g y a las translaciones, y falta nadamas la talacha; o bien, podemos sólo aplicarselo al $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= f(\mathbf{0}) = (\tau_{\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{-\mathbf{c}})(\mathbf{0}) \\ &= (\tau_{\mathbf{c}} \circ g)(\mathbf{0} - \mathbf{c}) = \tau_{\mathbf{c}}(g(-\mathbf{c})) = g(-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \\ &= g(-3,-2) + (3,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-5) + (3,2) \\ &= (3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

De donde concluimos que la expresión analítica de f es

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g(x,y) + f(\mathbf{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y) + (3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - 5\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - y - 1 + 3\sqrt{2}\,,\, x + y - 5 + 2\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

EJERCICIO 3.45 Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:
a) La reflexión en la recta $\ell : x + y = 1$.
b) La rotación de $\pi/2$ en el punto $(-2,3)$.
c) La rotación de π en el punto $(4,3)$.
d) La reflexión en la recta $\ell : y = 1$ seguida de la translación por $(2,0)$.

EJERCICIO 3.46 Describe geométricamente (con palabras) las siguientes isometrías:
a) $f(x,y) = (x+1,-y)$
b) $f(x,y) = (-x+2,-y)$
c) $f(x,y) = (-y,-x+2)$

3.4 Las funciones lineales

Hemos visto que las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ quedan determinadas por lo que le hacen a la base canónica; es decir, que se escriben

$$f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores fijos ($\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$, bien por definición o bien por la fórmula); y además, vimos que si la función es ortogonal entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman una base ortonormal. Pero si en esta fórmula no le pedimos nada a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, simplemente que sean vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$, obtenemos una familia de funciones mucho más grande: las *funciones lineales* de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (ver el siguiente teorema). Estas funciones son la base del Algebra Lineal y serán el fundamento para las transformaciones que más nos interesan, así que vale la pena definirlas y estudiarlas un rato en general.

Definición 3.4.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *lineal* si para todos los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y todo número $t \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\begin{array}{rl} \mathbf{i}).\text{-} & f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ \mathbf{ii}).\text{-} & f(t\,\mathbf{x}) = t\, f(\,\mathbf{x}) \end{array}$$

Estas funciones, al preservar la suma y la multiplicación por escalares, preservan las operaciones básicas de un espacio vectorial y por eso son tan importantes. Pero en el caso que nos ocupa, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 *Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal, si y sólo si se escribe*

$$f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores fijos en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y sean $\mathbf{u} := f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} := f(\mathbf{e}_2)$, donde, recuérdese, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ son la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Dado cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, tenemos que si $\mathbf{x} = (x,y)$ entonces $\mathbf{x} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$, de donde, usando las propiedades ($\mathbf{i}$) y ($\mathbf{ii}$) respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} f\,(x,y) &= f(\mathbf{x}) = f(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) \\ &= f(x\,\mathbf{e}_1) + f(y\,\mathbf{e}_2) \\ &= x\,f(\mathbf{e}_1) + y\,f(\mathbf{e}_2) \\ &= x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que cualquier función lineal se expresa en la forma deseada.

Por el otro lado, veámos que la función $f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$, con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ arbitrarios, es lineal. Cambiando la notación de las coordenadas, sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. De la definición de f y las propiedades elementales de la suma vectorial tenemos

$$\begin{aligned} f\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= f\,(x_1+y_1, x_2+y_2) \\ &= (x_1+y_1)\;\mathbf{u} + (x_2+y_2)\;\mathbf{v} \\ &= (x_1\,\mathbf{u} + x_2\,\mathbf{v}) + (y_1\,\mathbf{u} + y_2\,\mathbf{v}) \\ &= f\,(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\,, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que f cumple ($\mathbf{i}$). Análogamente, f cumple ($\mathbf{ii}$) pues para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t\,\mathbf{x}) &= (tx_1)\,\mathbf{u} + (tx_2)\,\mathbf{v} \\ &= t\;(x_1\,\mathbf{u} + x_2\,\mathbf{v}) = t(\,f(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración del Teorema. □

Tenemos entonces que las transformaciones ortogonales son funciónes lineales, así que ya hemos visto varios ejemplos. Pero son mucho más las lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que las ortogonales (ver Ejercicio 3.4). Si tomamos la *cuadrícula canónica* con vérticales y horizontales en los enteros de los ejes, una transformación lineal la manda en la "rombícula" que generan los vectores las imágenes de la base canónica y que consiste en tomar las paralelas a uno de ellos que pasan por los múltiplos enteros del otro. Sólo cuando esta rombícula se sigue viendo como cuadrícula, y del mismo tamaño, tenemos una transformación ortogonal. Pero además, nótese que hemos definido funciones lineales entre diferentes espacios vectoriales y que en la demostración del Teorema no tuvimos que explicitar en dónde viven $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Si vivieran en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, la imagen sería la misma, un plano rombiculado, que tiene la libertad extra de bambolearse.

Animacion Interactiva

EJERCICIO 3.47 Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal preserva al origen, es decir, que cumple $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

EJERCICIO 3.48 Demuestra que una función lineal manda lineas en lineas (de ahí su nombre) o a veces en puntos.

EJERCICIO 3.49 Demuestra que la composición de funciones lineales es lineal.

EJERCICIO 3.50 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$ es ortogonal si y sólo si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ forman una base ortonormal.

EJERCICIO 3.51 Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3x$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.52 Demuestra que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si es la función $f(x) = a\,x$ para alguna $a \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.53 Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x) = (3x, 5x)$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.54 Demuestra que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es lineal si y solo si se escribe $f(x) = (ax, bx)$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.55 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = 2x + 4y$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.56 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (x + y, y - x)$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.57 Exhibe una función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que mande al eje x en la recta $\ell : 2x - y = 0$.

EJERCICIO 3.58 Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ es lineal, si y sólo si se escribe

$$f(x, y, z) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w}$$

donde $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$ y $\mathbf{w} = f(\mathbf{e}_3)$.

3.4.1 Extensión lineal

De los ejercicios anteriores, en particular el último, debe quedar claro que el Teorema 3.4.1 es sólo un caso particular de un resultado general que haremos explicito en este apartado. Aunque estemos particularmente interesados en las dimensiones $1, 2, 3$, para lidear con todas ellas a la vez, y evitarse el molesto trabajo de 6, seis, casos particulares, es necesario trabajar con los abstractos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Como definimos en el Capítulo 1, dados vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ en $\mathbb{R}^n$, una *combinación lineal* de ellos es el vector

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$, son escalares cualesquiera llamados los *coeficientes* de la combinación lineal. Por ejemplo, todas las combinaciones lineales de un solo vector $(k = 1)$ forman la recta que genera (si es no nulo) y las de dos vectores forman un plano (si no son paralelos). En una combinación lineal se están utilizando simultaneamente las dos operaciones básicas de un espacio vectorial. Ahora bien, si tenemos una función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se cumple que *preserva combinaciones lineales* pues

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} f\left(\lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f\left(\mathbf{v}_i\right),$$

donde se usa la propiedad **(i)** de las funciones lineales en la primera igualdad y la **(ii)** en la segunda. Así que podemos redefinir función lineal como aquella que cumple

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f\left(\mathbf{v}_i\right), \tag{3.6}$$

para cualesquier $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$; pues esta condición claramente incluye a la **(i)** y la **(ii)** de la definición original. Hay que hacer énfasis en que en esta igualdad la combinación lineal de la derecha se da en $\mathbb{R}^m$ (el codominio), mientras que la que tenemos en el lado izquierdo ocurre en $\mathbb{R}^n$ (el dominio), antes de aplicarle la función, que no necesariamente son el mismo espacio.

Por otro lado, $\mathbb{R}^n$ tiene una *base canónica*: los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$; es decir, para $i = 1, ..., n$ el vector $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ tiene i-ésima coordenada 1 y el resto 0. Que se llaman canónicos pues la combinación lineal de ellos que nos da a cualquier otro vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se obtiene trivialmente ("canónicamente") de sus coordenadas:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{e}_i\,.$$

De tal manera que para cualquier función lineal f que sale de $\mathbb{R}^n$ se tiene, usando (3.6) y esta última expresión, que

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(\mathbf{e}_i)\,.$$

Nos falta ver que los valores que puede tomar f en la base canónica son arbitrarios. Es decir, si tomamos n vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ arbitrariamente, y queremos encontrar una función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que cumpla $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$ para $i = 1, 2, ..., n$, entonces debemos definirla en todo $\mathbb{R}^n$ como

$$f\,(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{u}_i \ .$$

A esta función se le llama la *extensión lineal* a $\mathbb{R}^n$ de lo que determinamos para la base canónica. Pero nos falta demostrar que efectivamente es lineal. Sin embargo, esto es muy fácil de hacer usando la definición original de función lineal y las de suma y multiplicación por escalares; hay que copiar la del Teorema 3.4.1 con más coordenadas, y le dejamos esa chamba al lector. Podemos resumir entonces con el siguiente Teorema .

Teorema 3.4.2 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal si y sólo si se escribe*

$$f\,(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{u}_i \ ,$$

donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$. Nótese que $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i)$. □

Corolario 3.4.1 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son dos funciones lineales tales que $f(\mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Por el Teorema, tienen la misma expresión. □

El Teorema, o bien su Corolario, pueden llamarse “Teorema de extensión única de funciones lineales”. La moraleja es que una función lineal depende unicamente de unos cuantos valores: los que le asigna a la base canónica, y estos, una vez fijado el codominio, son arbitrarios.

EJERCICIO 3.59 Describe el lugar geométrico definido como $\mathcal{L} = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}\}$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.60 Describe el lugar geométrico definido como $\Pi = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.61 ¿Qué ejercicios del bloque anterior se siguen inmediatamente del Teorema 3.4.2? Reescribelos.

3.4.2 La estructura de las funciones lineales

En el Capítulo 1 dejamos al aire un ejercicio donde se le pregunta al lector si conoce algún otro espacio vectorial que no sea $\mathbb{R}^n$. Sería desleal dejar pasar ese ejemplo cuando lo tenemos en las narices. Efectivamente, cuando fijamos el dominio y el contradominio, las funciones lineales entre ellos tienen naturalmente la estructura de espacio vectorial.

Fijemos notación. Sea $\mathcal{L}(n,m)$ el conjunto de todas las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, es decir

$$\mathcal{L}(n,m) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ es lineal}\}.$$

Como en el codominio se tienen las operaciones de suma y multiplicación por escalares, estas operaciones se pueden definir también en las funciones; en cierta manera, las funciones las heredan. Dadas $f, g \in \mathcal{L}(n,m)$ y $t \in \mathbb{R}$, sean

$$\begin{gathered} f+g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (f+g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} t\,f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (t\,f)(\mathbf{x}) := t(f(\mathbf{x})) \end{gathered}$$

Hay que demostrar que estas nuevas funciones también son lineales. Y esto es muy fácil de la definición original, pues dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) + g(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) + \lambda g(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{y}) \\ &= \lambda(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + \mu(f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})) \\ &= \lambda(f+g)(\mathbf{x}) + \mu(f+g)(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Formalmente nos falta demostrar que estas operaciones cumplen todas las propiedades que se les exigen a los espacios vectoriales (el Teorema **??**). Esto depende escencialmente de que $\mathbb{R}^m$ es espacio vectorial (no de que sean funciones lineales) y dejamos los detalles como ejercicio lateral (no escencial) a la línea del texto. Los nuevos ejemplos de espacio vectorial son entonces los conjuntos de funciones que salen de algún lugar (con alguna propiedad —el caso que dasarrollamos fué que son lineales—) pero que **caen** en un espacio vectorial (en nuestro caso, $\mathbb{R}^m$).

EJERCICIO 3.62 Sea V un espacio vectorial y sea X cualquier conjunto. Demuestra que el conjunto de todas las funciones de X en V, $\mathcal{F}(X,V)$, tiene una estructura natural de espacio vectorial. (En particular $\mathcal{L}(n,m)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ que es inmensamente más grande).

EJERCICIO 3.63 Sea $\Delta_n = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto finito "canónico" con n elementos. Como corolario del Teorema 3.4.2, demuestra que los espacios vectoriales $\mathcal{L}(n, m)$ y $\mathcal{F}(\Delta_n, \mathbb{R}^m)$ se pueden identificar naturalmente.

3.5 Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de números, tablas podría decirse, donde los renglones y las columnas no tienen ningun significado extra, como podrían tener, por ejemplo, en la tabla de calificaciones parciales de alumnos en un curso. Así de simple, las matrices son tablas limpias, abstractas. En nuestro contexto actual, habrán de ser los "paquetes" que cargan toda la información de las funciones lineales y nos darán la herramienta para hacer cálculos respecto a ellas, además de simplificar la notación.

En matemáticas, la notación es importante. Una notación clara y sencilla permite ver la escencia de las cosas, de las ideas y de los problemas. Por el contrario, con una notación complicada o confusa es fácil perderse en la labor de desentrañarla y nunca llegar a las ideas profundas; piénsese, por ejemplo, en diseñar un algoritmo para multiplicar con números romanos. Viene esto al caso, pues esta sección trata basicamente de cómo simplificar la notación para lograr manejar las transformaciones geométricas muy en concreto. Encontraremos la mecánica y la técnica para hacer cálculos con facilidad. Para empezar, cambiaremos nuestra notación de vectores.

3.5.1 Vectores columna

Como crítica a la notación que traemos, escribamos una función lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ explicitamente. Digamos que $f(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 3)$, $f(\mathbf{e}_2) = (6, 5, 4)$ y $f(\mathbf{e}_3) = (2, 3, 1)$, entonces sabemos que f se escribe

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(1, 2, 3) + y(6, 5, 4) + z(2, 3, 1) \\ &= (x + 6y + 2z, 2x + 5y + z, 3x + 4y + z). \end{aligned}$$

Para hacer este cálculo, la vista tuvo que andar brincoteando en una linea, buscando y contando comas; es muy fácil equivocarse. Es más, ¿dónde está el error? Sin embargo, sabemos que el cálculo es sencillísimo, mecánico. Si en lugar de tomar a los vectores como renglones los tomamos como columnas, la misma talachita se hace evidente a la vista

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 6y + 2z \\ 2x + 5y + 3z \\ 3x + 4y + z \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

y eliminamos las comas (y corregimos el error). Ahora cada renglon se refiere a una coordenada, y se ve todo de golpe; mucho mejor notación que haremos oficial.

Notación 3.1 De ahora en adelante, los vectores en $\mathbb{R}^n$ se escribiran como columnas y no como renglones. Es decir, si antes escribiamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ahora escribiremos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

El inconveniente de que entonces se complica escribir un vector dentro del texto (aquí, por ejemplo), lo subsanamos al llamar a los vectores renglón, *transpuestos* de los vectores columna, y los denotaremos $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; aunque a veces se nos va a olvidar poner el exponente $\top$ de "transpuesto", y el lector nos lo perdonará, y con el tiempo nos lo agradecerá.

Así, por ejemplo, tenemos que la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbf{e}_1^\top = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2^\top = (0, 1)$ que quiere decir

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vale la pena insistir en que no hay ningún cambio escencial. Sólo cambiamos de convención, una pareja ordenada de números se puede pensar horizontal (de izquierda a derecha) o vertical (de arriba a abajo); estamos conviniendo en que lo haremos y escribiremos vertical.

3.5.2 La matriz de una función lineal

Una matriz de $m \times n$ es un arreglo rectangular (o tabla) de números reales con m renglones y n columnas. Si, usando dos subindices, denotamos por a_{ij} al númerito que está en el renglon i y la columna j, llamado *entrada*, tenemos que una matriz de $m \times n$ es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podríamos también definirla como un conjunto ordenado de n vectores en $\mathbb{R}^m$: sus columnas. Es decir, la matriz A anterior se puede escribir como

$$A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \;,\; i = 1, 2, \dots, n.$$

De tal manera que, de acuerdo al Teorema 3.4.2, una matriz $m \times n$ tiene justo la información de una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (ojo: se invierte el orden por la lata de que las funciones se componen "hacia atras"). Explicitamente, a la matriz A se le asocia la función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que manda al vector canónico $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ en su columna i-ésima, es decir, tal que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. O bien, inversamente, a cada función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se le asocia la matriz $m \times n$ que tiene como columnas a sus valores en la base canónica, es decir, se le asocia la matriz

$$A = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)) .$$

Por ejemplo, a la función lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida en (3.7) se le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

que es ya una compactación considerable en la notación; a la transformación "compadre ortogonal" de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y a la función lineal que a cada vector en $\mathbb{R}^3$ lo manda a su segunda coordenada (en $\mathbb{R}$) se le asocia la matriz 1×3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$.

Ya logramos nuestro primer objetivo, empaquetar en una matriz toda la información de una función lineal. Ahora usémosla como herramienta. Primero, definiremos el producto de una matriz por un vector para que el resultado sea lo que su función lineal asociada hace al vector. Es decir, si A es una matriz $m \times n$, podrá multiplicar sólo a vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y el resultado será un vector en $\mathbb{R}^m$. Como ya vimos, A se puede escribir $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, para $i = 1, 2, \ldots, n$; y por su parte, sea $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Definimos entonces el *producto* de A por $\mathbf{x}$ como

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \tag{3.8}$$

de tal manera que el Teorema 3.4.2 junto con su Corolario y lo que hemos visto de matrices se puede resumir en el siguiente Teorema.

Teorema 3.5.1 *Las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ están en correspondencia natural y biunivoca con las matrices de $m \times n$, de tal manera que a la función f le corresponde la matriz A que cumple*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Obsérvese que cuando $m = 1$ el producto que acabamos de definir corresponde a nuestro viejo conocido el producto interior. Es decir, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \; .$$

De tal manera que si escribimos a A como una columna de renglones, en vez de un renglón de columnas que es lo que hemos hecho, entonces hay vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ (los renglones) tales que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} \; .$$

Esta definición del producto de una matriz por un vector es, aunque equivalente, mas "desagradable" que la anterior, pues los vectores $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ no tienen ningun significado geométrico; son simplemente la colección ordenada de las i-ésimas coordenadas de los vectores $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^m$. Aunque somos injustos, sí tienen un significado, los renglones $\mathbf{v}_i^\top$ son las matrices asociadas a las m funciones lineales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que dan las coordenadas de la función original.

Para fijar ideas, y no perdernos en las abstracciones, terminamos esta sección con la expresión explicita del caso que más nos interesa en este libro: la multiplicación de una mátriz de 2×2 por un vector en $\mathbb{R}^2$, que tiene la fórmula general

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

donde todos los protagonistas son simples numeritos.

EJERCICIO 3.64 Encuentra las matrices asociadas a las funciones lineales de algunos de los ejercicios anteriores.

EJERCICIO 3.65 Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se puede pensar como matriz $n \times 1$. Como tal, ¿a qué función lineal representa según el Teorema 3.5.1?

EJERCICIO 3.66 El conjunto de todas las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, que denotamos $\mathcal{L}(n, m)$ en la Sección 3.4.2, tienen la estructura de espacio vectorial y el Teorema 3.5.1 dice que esta en biyección natural con las matrices $m \times n$. Si definimos la suma de matrices y la multiplicación de escalares por matrices correspondiendo a las operaciones análogas en $\mathcal{L}(n, m)$, demuestra que $A + B$ (que tiene sentido solo cuando A y B son del mismo tipo $m \times n$) es sumar entrada por entrada, y que tA es multiplicar a todas las entradas por t. ¿Puedes dar una demostración fácil de que $\mathcal{L}(n, m)$ es un espacio vectorial? (Observa, del ejercicio anterior, que $\mathcal{L}(1, n)$ se identifica naturalmente con $\mathbb{R}^n$.)

3.5.3 Multiplicación de matrices

Vamos ahora a definir la multiplicación de matrices correspondiendo a la composición de funciones lineales. Tiene sentido componer dos funciones sólo cuando una "acaba" donde la otra "empieza"; más formalmente, cuando el codominio de una coincide con el dominio de la otra. De igual forma, sólo tendra sentido multiplicar las matrices cuyas dimensiones se "acoplen". Veámos.

Dibujo

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones lineales. Por el ejercicio 3.4, $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ también es lineal. Sean A la matriz $m \times n$ y B la matriz $k \times m$ que corresponden a f y a g respectivamente. *Definimos el producto* BA como la matriz $k \times n$ que corresponde a la función lineal $g \circ f$. Es decir, BA es la única matriz $k \times n$ que cumple

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n .$$

Aunque esta definición ya es precisa según el Teorema 3.5.1, todavía no nos dice cómo multiplicar. Esto habrá que deducirlo. Recordemos que las columnas de una matriz son las imágenes de la base canónica bajo la función asociada. Así que si $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m$, entonces $(g \circ f)(\mathbf{e}_i) = g(f(\mathbf{e}_i)) = g(\mathbf{u}_i) = B\mathbf{u}_i$. Y por lo tanto

$$BA = B\,(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = (B\mathbf{u}_1, B\mathbf{u}_2, \ldots, B\mathbf{u}_n)\,.$$

Lo cual es muy natural: para obtener las columnas de la nueva matriz, se usa la multiplicación de B por los vectores columna de A, multiplicación que ya definimos. Para expresar cada una de las entradas de la matriz BA, habrá que expresar a B como una columna de vectores renglon, y se obtiene

$$BA = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^\top \\ \mathbf{w}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^\top \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

donde es claro porqué los renglones de B (los transpuestos de los vectores $\mathbf{w}_i$) y las columnas de A (los vectores $\mathbf{u}_j$) tienen que estar en el mismo espacio ($\mathbb{R}^m$); y cuál es la mecánica (véase abajo "la ley del karatazo") para obtener las entradas de una matriz $k \times n$ (BA) a partir de una $k \times m$ (B) y una $m \times n$ (A). Esta fórmula da, en el caso de matrices 2×2, lo siguiente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

"La multiplicación de matrices corresponde a la *ley del karatazo*: un karateca en guardia pone su antebrazo derecho vertical y el izquierdo horizontal —¡(*huuouui*)!—

y se apresta a multiplicar dos matrices: recoge con la mano derecha una columna de la matriz derecha y —¡$(aaah_1, aah_2, \cdots, ah_k)$!— le va pegando karatazos a los renglones de la izquierda para ir obteniendo la columna correspondiente en el producto; o bien, si es más ducho con la chueca, recoge con la zurda renglones de la izquierda y —¡$(uuuf_1, uuf_2, \cdots, uf_n)$!— golpea a las columnas derechas para ir sacando, de una en una, las entradas del producto."

EJERCICIO 3.67 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula AB, $A(B+C)$, $(C-B)A$.

EJERCICIO 3.68 Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB \neq BA$. De tal manera que el producto de matrices <u>no</u> es conmutativo.

EJERCICIO 3.69 Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB = \mathbf{0}$, pero $A \neq \mathbf{0}$ y $B \neq \mathbf{0}$; donde $\mathbf{0}$ es la matriz cero (con todas sus entradas 0). *(Piensa en términos de funciones.)*

EJERCICIO 3.70 Demuestra que si A, B, C son matrices 2×2 entonces $A(BC) = (AB)C$, es decir, que el producto de matrices es asociativo, y por lo tanto tiene sentido escribir ABC. *(No necesariamente tienes que escribir todo el producto y capaz que tu demostración vale en general.)*

EJERCICIO 3.71 Demuestra que si A, B, C son matrices 2×2 entonces $A(B+C) = AB+AC$ y $(A+B)C = AC+BC$.

EJERCICIO 3.72 Demuestra que si A, B son matrices 2×2 entonces $A(kB) = (kA)B = k(AB)$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.73 Usando el Teorema 3.4.2 demuestra que si A, B, C son matrices $n \times n$ entonces $A(BC) = (AB)C$.

3.5.4 Algunas familias distinguidas de matrices

La matriz Identidad

Aunque no sea una familia propiamente dicho, se merece su parrafo aparte, y ser el primero. La *matriz identidad,* o simplemente "la identidad", es la matriz asociada a la función identidad, se le denota por I, y es la matriz que tiene 1 en la diagonal y 0 fuera de ella, es decir

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cumple además que $AI = A$ e $IA = A$ para cualquier matriz A que se deje multiplicar por ella; es la identidad multiplicativa. Nótese que en realidad hay una identidad para cada dimensión, empezando por el 1; asi que debíamos escribir algo así como I_n, pero el contexto en que se usa siempre trae la información de la dimensión.

Homotesias

Las homotesias, como funciónes, son simples "cambios de escala". Si tomamos un número $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$ es claramente lineal y es llamada una *homotesia*. Entonces tiene una matriz asociada que es kI, la matriz que tiene puros k en la diagonal y 0 fuera de ella. Como función, lo que hace es expander uniformemente desde el origen (si $k > 1$), o bien, contraer (cuando $k < 1$); son un "zoom", pues.

Las homotesias tienen la propiedad de conmutar con cualquier otra matriz, pues $A(kI) = k(AI) = kA = k\,(IA) = (kI)A$ (y aquí, pudo haber sido que las dos I sean diferentes, depende de A). En términos de funciones, el cambio de escala se puede hacer antes o despues de una función lineal y da lo mismo. Y además son las únicas matrices (pensando en matrices cuadradas) que tienen esta propiedad; pero esto lo dejamos como ejercicio.

EJERCICIO 3.74 Demuestra que si una matriz A de 2×2 es tal que $AB = BA$ para todas las matrices B de 2×2, entonces $A = kI$ para alguna $k \in \mathbb{R}$. (*Tienes que encontrar matrices apropiadas B que te vayan dando información; quizás conviene ver el siguiente parrafo y regresar.*)

Matrices de permutaciones

Recordemos de la Sección 1 que una permutación de n elementos es una función biyectiva $\rho : \Delta_n \to \Delta_n$ donde podemos tomar $\Delta_n = \{1, 2, \dots, n\}$; y que todas estas permutaciones forman el grupo simétrico de orden n, $\mathbf{S}_n$, con $n!$ elementos. Ahora bien, a cada permutación $\rho : \Delta_n \to \Delta_n$ se le puede asociar la función lineal $f_\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f_\rho(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\rho(i)}$; es decir, f_ρ permuta a los elementos de la base canónica de acuerdo a ρ y se extiende linealmente a $\mathbb{R}^n$. A la matriz asociada a esta función lineal se le llama la matriz *de* la permutación ρ; denotémosla A_ρ. Es fácil ver que la multiplicación de matrices de permutaciones es de nuevo una matriz de permutación y corresponde a la composición de las permutaciónes correspondientes. Es decir, si $\rho, \sigma \in \mathbf{S}_n$ entonces $A_\rho A_\sigma = A_{\rho\circ\sigma}$. Se tiene entonces que el grupo simétrico se puede ver como un "grupo de matrices".

Otra manera equivalente de definirlas es que son las matrices cuadradas de ceros y unos tales que tienen exactamente un 1 en cada renglón y en cada columna. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

corresponde a la permutación $\{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1\}$.

EJERCICIO 3.75 Escribe todas las matrices de permutaciones de orden 2.

EJERCICIO 3.76 Escribe todas las matrices de permutaciones de orden 3. Identifica sus inversas (es decir la matriz asociada a la permutación inversa), y describe en cada caso la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ correspondiente.

EJERCICIO 3.77 Sea A_ρ la matriz de la permutación $\rho : \Delta_n \to \Delta_n$, y sea B cualquier otra matriz de $n \times n$. Describe a las matrices BA_ρ y $A_\rho B$ en términos de la permutación ρ.

*EJERCICIO 3.78 Sea C el cubo en $\mathbb{R}^3$ centrado en el origen, de lado 2 y con lados paralelos a los ejes coordenados; es decir, sus vértices son los ocho puntos cuyas tres coordenadas son 1 o -1. Describe el conjunto de matrices cuyas funciones lineales asociadas mandan al cubo en sí mismo. En particular, ¿cuántas son? *(Quizás vale la pena empezar con el problema análogo en dimensión* 2.)

Rotaciones

Regresamos, despues de un provechoso paréntesis, a la motivación original que nos llevo a adentrarnos en las funciones lineales. Dibujo

Sabemos que una rotación es una transformación lineal que manda al vector canónico $\mathbf{e}_1$ en un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^1$ y al otro vector canónico $\mathbf{e}_2$ en su compadre ortogonal $\mathbf{u}^\perp$. Si escribimos a $\mathbf{u}$ en términos de su ángulo respecto al eje x, es decir, respecto a $\mathbf{e}_1$, entonces obtenemos que la matriz asociada a la rotación por un ángulo θ es

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Primero veamos que la rotación de un ángulo $-\theta$ nos regresa a la identidad. Como

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{3.10}$$

entonces

$$\begin{aligned} R_{-\theta}R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,. \end{aligned}$$

Podemos obtener las fórmulas trigonométricas clásicas para el coseno y el seno de la suma de ángulos como consecuencia de la composición de funciones y la multiplicación de matrices. Es claro que si rotamos un ángulo β y despues un ángulo α, habremos rotado un ángulo $\alpha + \beta$. Asi que

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} \; .$$

Pero por otro lado, al multiplicar las matrices tenemos

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.11}$$

pues si dos matrices coinciden ($R_{\alpha+\beta}$ y $R_\alpha R_\beta$) lo hacen entrada por entrada. Junto con las igualdades trigonométricas de inversos de ángulos, estas últimas dan

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.12}$$

EJERCICIO 3.79 Da una expresión numérica bonita de las matrices asociadas a las rotaciones de $\pi/6, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, \pi, -\pi/2$.

EJERCICIO 3.80 Demuestra que

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Animacion

Reflexiones??

Conviene parametrizar a las reflexiones no por el ángulo de la imagen de $\mathbf{e}_1$, sino por su mitad, que es el ángulo de la recta-espejo de la reflexión. Pues si, como es natural, a una recta por el origen le asociamos su ángulo (entre 0 y π) con el rayo positivo del eje-x; entonces la reflexión , E_θ, en la recta con ángulo θ manda a $\mathbf{e}_1$ en el vector unitario de ángulo 2θ, y por lo tanto su matriz asociada es

$$E_\theta := \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} ,$$

pues el segundo vector no es el compadre ortogonal sino su negativo. Es muy fácil ver que $E_\theta E_\theta = I$, que corresponde a que una reflexión es su propia inversa.

Podemos ahora ver como se comporta la composición de reflexiones:

$$
\begin{aligned}
& E_\alpha E_\beta = \\
= & \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix} = R_{2(\alpha-\beta)}
\end{aligned}
$$

donde hemos usado (3.12). Así que la composición de dos reflexiones es la rotación del doble del ángulo entre sus espejos. Tal y como lo habíamos visto al hablar de generadores de grupos diédricos.

EJERCICIO 3.81 Da una expresión numérica bonita de las matrices asociadas a las reflexiones en espejos a $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4$.

EJERCICIO 3.82 ¿Quiénes son $E_\alpha R_\beta$ y $R_\beta E_\alpha$?

EJERCICIO 3.83 Demuestra con matrices que $R_\beta E_0 R_{-\beta} = E_\beta$.

EJERCICIO 3.84 Demuestra que la fórmula (**??**) obtenida en la Sección **??** para la reflexion φ_ℓ en la linea ℓ, coincide con la que nos da una matriz E_θ cuando la linea ℓ pasa por el origen.

Matrices Ortogonales (y transpuestas)

Decimos que una matriz es *ortogonal* si su función lineal asociada es ortogonal. Según nuestro estudio de las transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$, las matrices ortogonales de 2×2 son las que acabamos de describir: las rotaciones y las reflexiones. Podemos pensar entonces al grupo de transformaciones $\mathbf{O(2)}$ como un grupo de matrices con la operación de multiplicación.

Nótese que en las matrices de rotaciones y reflexiones, la matriz *inversa*, esto es, la matriz asociada a la transformación inversa, resulto ser muy parecida a la original; en las reflexiones es la misma y en las rotaciones se intercambian los elementos fuera de la diagonal (que difieren sólo en el signo). Esto no es coincidencia sino parte de algo mucho más general, que haremos explícito en esta Sección y que será importante en capítulos posteriores..

Llamemos a una matriz *ortogonal* si es cuadrada y su función lineal asociada es una transformación ortogonal (preserva producto interior). Entonces, si A es ortogonal, todas sus columnas son vectores unitarios (pues son la imagen de vectores unitarios, los canónicos) y además por parejas son ortogonales (pues asi es la base canónica y esto se detecta por producto interior). Dicho más explicitamente, si $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ entonces $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i)$ donde f es su función asociada ($f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$), y si $f \in \mathbf{O}(2)$ se cumple que

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

donde δ_{ij} es conocida como "la delta de Kroenecker". En este caso, al conjunto ordenado de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se le llama *base ortonormal* (pues son vectores unitarios o normalizados y mutuamente ortogonales). Pero nótese que estos n^2 productos interiores $(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j)$ son las entradas de la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

y que el que sean iguales a la delta de Kroenecker quiere decir que esta es la matriz identidad. Así que si llamamos *transpuesta* de una matriz a la que se obtiene cambiando columnas por renglones, hemos demostrado que la "inversa" de una matriz ortogonal es su transpuesta.

En general, llamemos la *transpuesta* de una matriz $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ a la matriz

$$A^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top \end{pmatrix}$$

que se obtiene reflejando las entradas en la diagonal; si A es $m \times n$ entonces $A^\top$ es $n \times m$ y se generaliza nuestra noción previa de transpuestos de vectores. Hemos demostrado la mitad del siguiente Teorema. Su otra mitad, para el caso que más nos interesa, $n = 2$, es consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.3. Sin embargo damos una nueva demostración, muy general, para ejemplificar el poder de la notación matricial.

Teorema 3.5.2 *Una matriz A de $n \times n$ es ortogonal (la matriz de una transformación ortogonal) si y sólo si*

$$A^\top A = I$$

Demostración. Hemos demostrado que si la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ preserva producto interior entonces su matriz cumple que $A^\top A = I$. Supongamos ahora que $A^\top A = I$ y demostremos que su transformación asociada preserva producto interior. Para esto, expresaremos al producto interior como un caso mas del producto de matrices. Para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^\top A^\top\right) A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \left(A^\top A\right) \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (I)\, \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

donde hemos usado que $(A\mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top A^\top$ (lo cual es un caso particular de la fórmula $(AB)^\top = B^\top A^\top$ que se deja como ejercicio). Por lo tanto, f (y A) es ortogonal. □

Asi que aunque las entradas de las matrices ortogonales sean complicadas, encontrar sus inversas es muy fácil. Y se explica porque las inversas de las ortogonales 2×2 fueron tan parecidas a si mismas.

EJERCICIO 3.85 Sea $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w}$$

Demuestra directamente que f es ortogonal (preserva producto interior). (Compara con la Proposición 3.3.3).

EJERCICIO 3.86 Demuestra que $(A\mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top A^\top$ cuando A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector $(n \times 1)$.

EJERCICIO 3.87 Demuestra que $(AB)^\top = B^\top A^\top$ cuando A es una matriz $m \times n$ y B una matriz $(n \times k)$.

EJERCICIO 3.88 Demuestra que la "matriz de Pitágoras"

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

3.6 El Grupo General Lineal ($\mathbf{GL}(2)$)

En esta sección estudiamos a las matrices cuyas funciones lineales asociadas son transformaciones, es decir, biyectivas. La definición abstracta será entonces muy fácil, aunque despues habrá que hacerla más concreta.

Definición 3.6.1 Una matriz A de $n \times n$ es *invertible* si existe otra matriz de $n \times n$, llamada su *inversa* y denotada A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Al conjunto de todas las matrices invertibles de $n \times n$ se le llama el *grupo general lineal de orden* n y se le denota $\mathbf{GL}(n)$. Asi que $A \in \mathbf{GL}(n)$ quiere decir que A es invertible y de $n \times n$.

Para demostrar que las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tienen matrices asociadas que son invertibles sólo habría que ver que su función inversa también es lineal (ver Ejercicio siguiente), y entonces la matriz asociada a ésta será la inversa. Y al revez, si una matriz tiene inversa entonces las funciones lineales asociadas también son inversas. Asi que a $\mathbf{GL}(2)$ se le puede pensar como grupo de transformaciones, tal y como lo hicimos en las primeras secciones de este capítulo, o bien como grupo de matrices (donde, hay que enfatizar, la operación del grupo es la multiplicación de matrices).

Ejemplos de matrices invertibles son las ortogonales que ya hemos visto. Asi, tenemos que $\mathbf{O}(n)$ es un subgrupo de $\mathbf{GL}(n)$.

EJERCICIO 3.89 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal; es decir, una función lineal con inversa $f.^{-1}$. Demuestra que su inversa también es lineal.

3.6.1 El determinante

Veámos ahora el problema de detectar de manera sencilla las matrices invertibles de 2×2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

una matriz cualquiera de 2×2. Consideremos el problema general de encontrar su inversa, y de paso ver cúando esta existe. Tomemos entonces una mátriz X cuyas entradas son incógnitas, digamos x, y, z, w, que cumplan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que en realidad se parte en los dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes

$$\begin{array}{c} a\,x + b\,y = 1 \\ c\,x + d\,y = 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} a\,z + b\,w = 0 \\ c\,z + d\,w = 1 \end{array}$$

que provienen de cada una de las columnas de la identidad, o bien de las columnas de incógnitas. Recordando la Sección 1.6, o bien volviéndolo a resolver, se obtiene que si $ad - bc \neq 0$ entonces los dos sistemas tienen soluciónes únicas que son precisamente

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{ad - bc} \qquad z = \frac{-b}{ad - bc} \\ y &= \frac{-c}{ad - bc} \qquad w = \frac{a}{ad - bc}\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para enunciar esto de manera elegante conviene definir el *determinante* de la matriz A como el número

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc\ .$$

Nótese que si $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, entonces $\det(A) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ según lo definimos en la Sección 1.7, de tal manera que el determinante de una matriz es el determinante de sus columnas o el determinante de un sistema de ecuaciones asociado y sólo estamos ampliando naturalmente el espectro del término.

Teorema 3.6.1 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *entonces* A *es invertible si y sólo si* $\det(A) = ad - bc \neq 0$*; y en este caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\ .$$

Hemos demostrado que si $\det(A) \neq 0$ entonces A es invertible y su inversa tiene la expresión indicada por (3.13). Nos falta ver que si A tiene inversa entonces su determinante no es cero. Pero esto será consecuencia inmediata del siguiente lema que nos da el determinante de un producto.

Lema 3.6.1 *Sean* A *y* B *matrices* 2×2, *entonces* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración. Sea A como arriba y consideremos a B con letras griegas. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \\
&= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) \\
&= a\alpha c\beta + a\alpha d\delta + b\gamma c\beta + b\gamma d\delta \\
&\quad - a\beta c\alpha - a\beta d\gamma - b\delta c\alpha - b\delta d\gamma \\
&= ad(\alpha\delta - \beta\gamma) + bc(\beta\gamma - \alpha\delta) \\
&= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

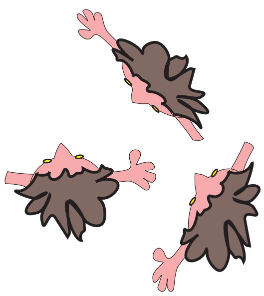
□

Demostración. [(del Teorema 3.6.1)] Si A es una matriz invertible entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Por el Lema anterior se tiene entonces que $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, y por lo tanto $\det(A)$ no puede ser 0. □

Veamos por último que el determinante de una matriz tiene un significado geométrico. Por el Teorema 1.11.3, corresponde al área dirigida del paralelogramo generado por sus vectores columna.

Teorema 3.6.2 *Sea A una matriz 2×2, entonces* $\det(A)$ *es el área del paralelogramo definido por sus vectores columna.* □

Se dice que la matriz A, o que la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, *invierte orientación* si $\det(A) < 0$, o bien, que la *preserva* si $\det(A) > 0$. Esto corresponde a que cualquier figura que no tenga simetrías de espejo (por ejemplo, un "manquito" de la mano derecha) se puede orientar, y bajo transformaciones lineales que preservan orientación, la figura puede deformarse pero conserva su orientación (el manquito seguira siendo manquito de la mano derecha); pero bajo transformaciones que invierten orientación se verá como manquito de la otra mano.



Pero además, el determinante de A representa lo que la función f "distorsiona" las áreas. Es decir, si una figura cualquiera F tiene área a, entonces $f(F)$ tendrá área $a\,|\det(A)|$. Sin pretender dar una demostración formal de esto, en general se puede argumentar como sigue. Puesto que la imagen del cuadrado unitario, C, bajo la función f asociada a la matriz $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, es el paralelogramo generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, primero hay que ver que cuadraditos con lados paralelos a los ejes y de lado ε (y área ε^2) van a dar a paralelogramos de área $\varepsilon^2 \det(A)$; y luego observar que las áreas se pueden aproximar por cuadraditos disjuntos de este tipo. Con esta interpretación geométrica del determinante es natural que el determinante de un producto sea el producto de los determinantes, pues el factor de distorción de áreas de una composición debía de ser el producto de factores de distorsión.

Observemos por último que el determinante distingue a nuestras dos clases de matrices ortogonales (en $\mathbf{O}(2)$); es 1 para las rotaciones, y -1 para las reflexiones. Es decir, las rotaciones preservan orientación y las reflexiones la invierten. Además su multiplicación corresponde a cómo se multiplican 1 y -1.

EJERCICIO 3.90 Demuestra que el determinante de las rotaciones es 1 y el de las reflexiones -1.

EJERCICIO 3.91 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal asociada a la matriz $A \in \mathbf{GL}(2)$, y sea T cualquier triángulo en el plano. Demuestra que el area de $f(T)$ es $|\det(A)|$ por el area de T.

EJERCICIO 3.92 Sea $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$; y sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}$, es decir, todo $\mathbb{C}$ menos la matriz $\mathbf{0}$. Describe las funciones lineales asociadas. Demuestra que $\mathbb{C}^*$ es un subgrupo de $\mathbf{GL}(2)$. Compara a estas matrices con los números complejos.

EJERCICIO 3.93 Encuentra (en cada caso) la matriz de la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$\begin{array}{llcl} \text{a)} & f(2,1) = (1,0) & \text{y} & f(3,2) = (0,1) \\ \text{b)} & f(2,5) = (1,0) & \text{y} & f(1,2) = (0,1) \\ \text{c)} & f(2,1) = (2,5) & \text{y} & f(3,2) = (1,2) \end{array}$$

(donde hemos usado vectores renglón en vez de vectores columna por simplicidad).

EJERCICIO 3.94 Demuestra que una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ manda rectas en rectas.

EJERCICIO 3.95 Considera las rectas $(\ell_1 : x + y = 2)$; $(\ell_2 : 2x - y = 1)$; $(\ell_3 : 2x + y = 6)$ y $(\ell_4 : x - 4y = 3)$. Encuentra la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\ell_1) = \ell_3$ y $f(\ell_2) = \ell_4$.

3.7 Transformaciones Afines

El papel que jugaron las transformaciones ortogonales respecto de las isometrías lo jugaran ahora las transformaciones lineales respecto de las que llamaremos afines. Es decir, si componemos una transformación lineal con una translación no trivial, ya no obtenemos una lineal (pues el origen se mueve) sino algo que llamaremos transformación afín, generalizando para $n > 1$ a las transformaciones afínes de $\mathbb{R}$, que ya estudiamos.

Definición 3.7.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *transformación afín* si se escribe Dibujo

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde $A \in \mathbf{GL}(n)$ y $\mathbf{b}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n$. Dicho de otra manera, f es una *transformación afín* si existe una transformación lineal $f_o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(f_o(\mathbf{x}) = A\mathbf{x})$ y una translación $\tau_{\mathbf{b}}$ tales que

$$f = \tau_{\mathbf{b}} \circ f_o \, .$$

El conjunto de todas las transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ forman un grupo de transformaciones, llamado el *grupo afín de* $\mathbb{R}^n$ y denotado $\mathbf{Af}(n)$.

Lo primero que hay que observar es que una transformación afín es efectivamente una transformación; y esto es claro pues es la composición de dos funciones biyectivas. Para ver que $\mathbf{Af}(n)$ es efectivamente un grupo, hay que ver que es cerrado bajo inversas y composición, pues la identidad (y de hecho cualquier transformación lineal) esta en $\mathbf{Af}(n)$. Si $f \in \mathbf{Af}(n)$ (dada por la fórmula de la definición) para obtener la fórmula explicita de su inversa, despejaremos a $\mathbf{x}$ en la ecuación

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{y}$ juega el papel de $f(\mathbf{x})$. Pasando a $\mathbf{b}$ del otro lado y luego multiplicando por A^{-1} (que existe pues $A \in \mathbf{GL}(n)$) se obtiene

$$\mathbf{x} = (A^{-1})\mathbf{y} - (A^{-1})\mathbf{b}.$$

Sea entonces $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por la ecuación $g(\mathbf{x}) = (A^{-1})\mathbf{x} - (A^{-1})\mathbf{b}$ (nótese que $g \in \mathbf{Af}(n)$ por definición) y se tiene que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) \\ &= (A^{-1})(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (A^{-1})\mathbf{b} \\ &= \left(A^{-1}A\right)\mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}\end{aligned}$$

y análogamente se tiene que $(f \circ g)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, así que g es la inversa de f.

Si tomamos ahora a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como cualquier otra transformación afín, entonces se escribe $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ para algunos $B \in \mathbf{GL}(n)$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que $(g \circ f)$ también es una transformación afín pues se escribe

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (BA)\mathbf{x} + (B\mathbf{b} + \mathbf{c}) .$$

Dibujo

Por lo tanto, $\mathbf{Af}(n)$ sí es un grupo de transformaciones.

Las transformaciones afines preservan rectas, es decir, mandan rectas en rectas. Pues si una recta ℓ está definida como

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y $f \in \mathbf{Af}(n)$, es como arriba, entonces

$$\begin{aligned}f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) &= A(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) + \mathbf{b} \\ &= (A\mathbf{p} + \mathbf{b}) + t(A\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{p}) + t(A\mathbf{v})\end{aligned}$$

de tal manera que

$$f(\ell) \subseteq \{f(\mathbf{p}) + t(A\mathbf{v}) \mid t \in \mathbb{R}\} .$$

Y este último conjunto es la recta que pasa por $f(\mathbf{p})$ con dirección $A\mathbf{v}$ (nótese que $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pues $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y A es invertible); así que más que una contención, la última es justo una igualdad (ambos conjuntos están parametrizados por $\mathbb{R}$).

Resulta que las transformaciones afines son precisamente las que preservan rectas. Pero la demostración de que si una transformación preserva rectas es afín es complicada y requiere argumentos de continuidad que no vienen al caso en este momento. Asi que mejor nos enfocamos en otra cosa que sí preservan.

3.7.1 Combinaciones afines (el Teorema de 3 en 3)

Dibujo

Otra manera de ver que las transformaciones afines preservan rectas es usando coordenadas baricéntricas. Sea ℓ la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. Entonces ℓ se puede escribir como

$$\ell = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s, t \in \mathbb{R}, \quad s + t = 1\}.$$

Veamos que le hace la transformación afín f al punto $s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ cuando $s + t = 1$:

$$\begin{aligned} f(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) &= A(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) + \mathbf{b} \\ &= s(A\mathbf{p}) + t(A\mathbf{q}) + (s + t)\,\mathbf{b} \\ &= s(A\mathbf{p} + \mathbf{b}) + t(A\mathbf{q} + \mathbf{b}) \\ &= s\,f(\mathbf{p}) + t\,f(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathbf{b} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}$ pues $s + t = 1$. Asi que la recta por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ va, bajo f, a la recta por $f(\mathbf{p})$ y $f(\mathbf{q})$ y preserva las coordenadas baricéntricas. Y esto se puede generalizar.

Una combinación lineal $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$ se llama *combinación afín* si los coeficientes cumplen que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$. Le hemos llamado "combinación baricéntrica" cuando intervienen dos puntos distintos o tres no colineales, pero en el caso general no nos interesa qué propiedades tengan los puntos involucrados $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Su importancia, entre otras cosas, es que las transformaciones afines las tratan como las lineales tratan a las combinaciones lineales:

Teorema 3.7.1 *Una transformación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es afín si y sólo si preserva combinaciones afines; es decir, si y solo si*

$$f(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i) \quad \textit{cuando} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\ .$$

Demostración. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es afín, entonces se escribe $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ para alguna matriz A de $n \times n$ y un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Veamos que preserva combinaciones afines. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, tales que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$; y sean $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, vectores cualesquiera. Entonces

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) \;&=\; A(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) + \mathbf{b} \;=\; \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (A\mathbf{v}_i) + \mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (A\mathbf{v}_i) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{b} \;=\; \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (A\mathbf{v}_i + \mathbf{b}) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

Donde usamos la linearidad en la segunda igualdad, y luego fué crucial que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ para poder "distribuir la $\mathbf{b}$" en la sumatoria.

Por el otro lado, si nos dan f que preserva combinaciones afines, debemos encontrar la matriz A (o su función lineal asociada) y el vector $\mathbf{b}$ que la definan. Encontrar al vector $\mathbf{b}$ es fácil pues es a donde cualquier transformación afín manda al origen; definamos entonces

$$\mathbf{b} := f(\mathbf{0}).$$

Y, como sucedió con las isometrías, debemos definir la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$g(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

y demostrar que es lineal para concluir la demostración; pues entonces $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$. Veámos entonces que g preserva combinaciones lineales.

Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ coeficientes (en $\mathbb{R}$) arbitrarios. Debemos demostrar que $g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i)$ pero nuestra hipótesis sólo nos dice cómo se comporta f respecto a combinaciones afines. Podemos convertir a esta combinación lineal en una afín usando al vector $\mathbf{0}$ como comodín. Sean

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

de tal manera que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ (ojo, empezamos la sumatoria en 0) y $\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$; y ahora sí podemos usar nuestra hipótesis para obtener

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) - \mathbf{b} = f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) - \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i\right)\mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i) - \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{b} = \sum_{i=0}^k \lambda_i (f(\mathbf{v}_i) - \mathbf{b}) \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) = \lambda_0 g(\mathbf{v}_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

pues $g(\mathbf{v}_0) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Lo cual concluye la demostración del Teorema. □

Vale la pena notar que el concepto de transformación afín se puede generalizar al de función afín cuando la matriz A no es necesariamente invertible; una *función afín* será entonces una función lineal seguida de una translación; ni siquiera necesitamos pedir que el dominio y el codominio coincidan. Si se revisa con cuidado el Teorema anterior, se notará que vale en esta generalidad. Pero no lo hicimos así pues nuestro interes principal está en las transformaciones.

Dibujo

En el caso que más nos interesa, $n = 2$, este Teorema y su demostración tienen como corolario que una transformación afín de $\mathbb{R}^2$ queda determinada por sus valores en el *triángulo canónico* con vértices $\mathbf{e}_0 := \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, y que estos pueden ir a cualquier otro triángulo. Explicitamente, dado un triángulo T con vértices $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, la transformación afín que manda al triángulo canónico en T es

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0)\mathbf{x} + \mathbf{a}_0 \ ,$$

que cumple claramente que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$. Hay que observar que esta función está bien definida independientemente de quiénes sean $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, pues tanto la matriz 2×2 como el vector por el que se translada lo están. Pero que es una transformación sólo cuando $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ no son colineales (que es lo que entendemos como *triángulo*), pues entonces la matriz es invertible.

Y como corolario a este hecho obtenemos el siguiente Teorema.

Dibujo

Teorema 3.7.2 (3 en 3) *Dados dos triángulos con vértices* $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *y* $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *respectivamente, existe una única transformación afín* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que cumple* $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ *para* $i = 0, 1, 2$.

Demostración. Basta componer la inversa de la transformación que manda al triángulo canónico en el $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ con la que lo manda al $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. La unicidad se sigue de la unicidad de las dos transformaciones usadas. □

Un ejemplo

Para fijar ideas veamos un ejemplo numérico. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{b}_0 &= \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Queremos encontrar la transformación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$.

Un método infalible (si no cometemos un error en el camino) es seguir la demostración del último teorema. Es decir, la transformación que manda al canónico en el triángulo de las $\mathbf{a}$'s es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego habrá que encontrar su inversa y componerla con la que manda al canónico en el triángulo de las $\mathbf{b}$'s. Pero dejaremos este método para que el lector lo siga paso a paso y compruebe el resultado con una solución diferente que es la que aquí seguiremos.

Ataquemos el problema directamente. Estamos buscando una matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y un vector} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

para definir la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ que cumpla $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$. Como las $\mathbf{a}$'s y las $\mathbf{b}$'s tienen valores numéricos explicitos, estas condiciones nos darán ecuaciones explicitas con las seis incógnitas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ que podemos resolver directamente. La condición $f(\mathbf{a}_0) = \mathbf{b}_0$ nos da

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

que se traduce en una ecuación para cada coordenada, a saber:

$$\begin{aligned} 0\alpha + 2\beta + \lambda &= -5 \\ 0\gamma + 2\delta + \mu &= 6 \end{aligned}$$

Analogamente, las condiciones en las otros dos parejas de puntos nos dan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta + \lambda &= 4 \\ 3\gamma - \delta + \mu &= 3 \\ -\alpha + \beta + \lambda &= -4 \\ -\gamma + \delta + \mu &= 1 \end{aligned}$$

Resulta que en vez de seis ecuaciones con seis incógnitas, tenemos dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, y además los dos sistemas tienen los mismos coeficientes y sólo se diferenciań por las constantes. De hecho los podemos reescribir como

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{donde} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que al resolver los dos sistemas de ecuaciones con el método de eliminar variables sumando múltiplos de una ecuación a otra, estaremos realizando las mismas operaciones, y estas dependen nada mas de los coeficientes, no del nombre de las incógnitas. Así que la manera de resolver los dos sistemas al mismo tiempo será añadiéndole dos columnas a la matriz A que correspondan a las constantes de los dos sistemas, y luego sumando multiplos de renglones a otros para llevar la parte 3×3 de la matriz a una de permutaciones que nos diga el valor explícito de todas las incógnitas. Hagámoslo. La matriz con que empezamos es

$$\left(\begin{array}{ccc:c:c} 0 & 2 & 1 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Sumándole 3 veces el renglón 3 al 2 (para hacer 0 esa entrada), operación que podemos denotar $3\mathbf{r}_3\vec{+}\mathbf{r}_2$ y que equivale a sumarle un múltiplo de una ecuación a otra, obtenemos

$$\xrightarrow{3\mathbf{r}_3\vec{+}\mathbf{r}_2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_2\vec{+}\mathbf{r}_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1/2)\mathbf{r}_2;\,-(1/3)\mathbf{r}_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2\vec{+}\mathbf{r}_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2\mathbf{r}_1\vec{+}\mathbf{r}_2;\,-\mathbf{r}_1\vec{+}\mathbf{r}_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, recordando nuestras incógnitas, el primer sistema nos dice $\lambda = -1$, $\beta = -2$ y $\alpha = 1$ y el segundo sistema $\mu = 0$, $\delta = 3$ y $\gamma = 2$ lo cual lo resuelve por completo. En resumen, la función que buscabamos es

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es fácil comprobarlo; bien checando los valores que se pedían o por el otro método.

EJERCICIO 3.96 Para cada caso, encuentra la transformación afín que manda $\mathbf{a}_i$ en $\mathbf{b}_i$

a) $\mathbf{a}_0^\top = (1,2), \mathbf{a}_1^\top = (1,-1), \mathbf{a}_2^\top = (0,-1)$ y $\mathbf{b}_0^\top = (1,4), \mathbf{b}_1^\top = (4,4), \mathbf{b}_2^\top = (3,3)$
b) $\mathbf{a}_0^\top = (1,2), \mathbf{a}_1^\top = (0,1), \mathbf{a}_2^\top = (3,-1)$ y $\mathbf{b}_0^\top = (5,3), \mathbf{b}_1^\top = (2,0), \mathbf{b}_2^\top = (6,-1)$
c) $\mathbf{a}_0^\top = (1,2), \mathbf{a}_1^\top = (0,1), \mathbf{a}_2^\top = (3,-1)$ y $\mathbf{b}_0^\top = (10,5), \mathbf{b}_1^\top = (3,3), \mathbf{b}_2^\top = (-4,4)$

(¿Verdad que conviene relajar la notación sobre vectores?)

3.8 Isometrías II

Ya con la herramienta técnica que nos dan las matrices y en el contexto general que nos dan las transformaciones afines, regresamos brevemente a estudiar isometrías del plano y ver algunas cosas que se nos quedaron pendientes. Ahora sabemos que una isometría de $\mathbb{R}^2$ es una transformación que se escribe

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{3.14}$$

donde la matriz A es ortogonal ($A^\top = A^{-1}$) y es llamada la *parte lineal* de la isometría. Hay de dos tipos. Las que preservan orientación (con $\det(A) = 1$) y las que invierten orientación ($\det(A) = -1$). Para las primeras, la matriz A es una rotación en el origen y para las segundas, una reflexión en una recta por el origen. Puesto que al componer isometrías (o, en general, transformaciones afines) la parte lineal se obtiene componiendo las partes lineales, entonces las isometrías (o las afines) que preservan orientación forman un grupo, denotado $\mathbf{Iso}^+(2)$ (respectivamente, $\mathbf{Af}^+(2)$). Ojo, las que invierten orientación **no** forman un grupo, ni siquiera contienen a la identidad y la composición de dos de ellas preserva orientación.

Lo primero que queremos ver es que las isometrías que preservan orientación son rotaciones en algún punto o translaciones.

3.8.1 Rotaciones y translaciones

Recordemos que definimos la rotación $\rho_{\theta,\mathbf{c}}$ de un ángulo θ con centro $\mathbf{c}$ conjugando con la translación de $\mathbf{c}$ al origen, es decir, como $\tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_\theta \circ \tau_{-\mathbf{c}}$ donde $\tau_{\mathbf{y}}$ es la translación por $\mathbf{y}$ y ρ_θ es rotar un ángulo θ en el origen, así que, usando matrices, la fórmula para $\rho_{\theta,\mathbf{c}}$ es

$$\begin{aligned} \rho_{\theta,\mathbf{c}}(\mathbf{x}) &= R_\theta(\mathbf{x}-\mathbf{c})+\mathbf{c} \\ &= R_\theta\mathbf{x}+(\mathbf{c}-R_\theta\mathbf{c}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Es claro entonces que $\rho_{\theta,\mathbf{c}} \in \mathbf{Iso}^+(2)$, pues se escribe como en (3.14) con una $\mathbf{b}$ complicada, pero constante al fin. Y al reves, aunque cierto, no es tan claro. Para ver que $f \in \mathbf{Iso}^+(2)$ dada como en (3.14) es la rotación en algún centro, hay que encontrar un punto fijo, es decir, un punto $\mathbf{c}$ para el cual $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ (pues a su centro no lo mueve la rotación); que nos da la ecuación en $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= A\mathbf{c}+\mathbf{b} \\ \mathbf{c}-A\mathbf{c} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Esto coincide con la expresión (3.15), donde se usa al centro de rotación y nos da la translación $\mathbf{b}$ en términos de él. Entonces, el problema de encontrar un punto fijo para la transformación (3.14) equivale a encontrar una solución a la ecuación

$$\mathbf{x}-A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

que en realidad es un sistema de ecuaciones. Y como tal, se puede reescribir

$$\begin{aligned} I\mathbf{x}-A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (I-A)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned} \tag{3.16}$$

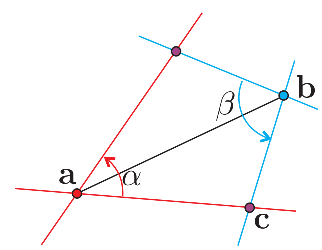
donde nos ha sido muy util la suma de matrices. Sabemos que este sistema tiene solución única si y sólo si su determinante es distinto de cero. Para el caso que nos ocupa, cuando A es una matriz de rotación, por un ángulo θ digamos, se tiene

$$\begin{aligned}
\det\left(I - R_\theta\right) &= \det\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= (1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \\
&= 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 2\left(1-\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

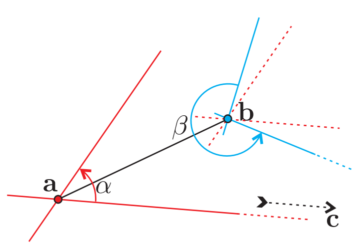
Podemos concluir que si $\theta \neq 0$ entonces $\det\left(I - R_\theta\right) \neq 0$ y tenemos una solución única al sistema (3.16) con $A = R_\theta$, que es el centro de rotación. Así que si $f \in \mathbf{Iso}^+(2)$ entonces es una rotación (alrededor de un punto) o bien una translación (cuando el ángulo θ es cero en la discusión anterior). Además, hemos demostrado que una rotación (por un ángulo no cero, se sobreentiende) no tiene puntos fijos además de su centro.

Puesto que a una rotación o a una translación se le puede obtener *moviendo* continuamente (poco a poco) al plano, a veces se le llama a $\mathbf{Iso}^+(2)$ el grupo de *movimientos rígidos del plano*.

Como corolario se obtiene que la composición de dos rotaciones es una nueva rotación. El nuevo centro de rotación se puede obtener analíticamente resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, pero lo veremos geométricamente.



Sean $\rho_{\alpha,\mathbf{a}}$ y $\rho_{\beta,\mathbf{b}}$ las rotaciones de ángulos α y β y centros **a** y **b** respectivamente. La composición de estas dos rotaciones será una rotación de un ángulo $\alpha+\beta$ (pues las partes lineales se componen) pero su centro depende del orden en que se componen. Para obtener el centro de la rotación $\rho_{\beta,\mathbf{b}} \circ \rho_{\alpha,\mathbf{a}}$, se traza el segmento de **a** a **b**, la linea por **a** con ángulo $-\alpha/2$ respecto a este y la linea por **b** con ángulo $\beta/2$; la intersección **c** de estas dos lineas es el centro de rotación. Para verlo, persigase a este punto bajo las rotaciones. Nótese que su reflejado respecto a la linea por **a** y **b** es el centro de rotación de la composición en el otro orden, $\rho_{\alpha,\mathbf{a}} \circ \rho_{\beta,\mathbf{b}}$.



Para que nuestra construcción de **c** tuviera sentido se necesita que las dos rectas cuya intersección lo definen sean no paralelas y este es justo el caso cuando $\alpha+\beta \neq 0$. Pero nos podemos aproximar al valor $\beta = -\alpha$ de a poquitos, y en este proceso el punto de intersección **c** se "va al infinito", asi que las translaciones son, en cierta manera "rotaciones con centro al infinito".

EJERCICIO 3.97 Las *homotesias* son transformaciones de la forma $f(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ con $k \neq 0$ llamado el *factor de expansión.* Demuestra que las homotesias con factor de expansión no trivial (distinto de 1) tienen un *centro de expansión,* es decir, un punto fijo.

3.8.2 Reflexiones y "pasos"

Consideremos ahora las isometrías que invierten orientación. Se escriben como

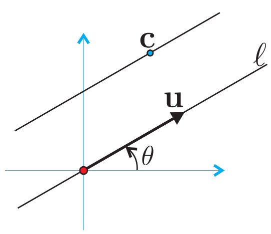
$$f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

donde E_θ es una matriz de reflexión. Veámos primero si tiene puntos fijos, para lo cual hay que resolver el correspondiente sistema (3.16). En este caso el determinante es

$$\begin{aligned} \det(I - E_\theta) &= \det \begin{pmatrix} 1-\cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & 1+\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= (1-\cos 2)(1+\cos 2\theta) - \operatorname{sen}^2 2\theta \\ &= 1 - \cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

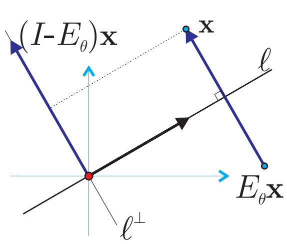
Y por lo tanto no tiene solución única: o no tiene solución o bien tiene muchas; y veremos que ambos casos son posibles.

Para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ tenemos que f es una reflexión y entonces las soluciones deben ser los puntos de la recta espejo (a un ángulo θ con el eje-x positivo), llamémosla ℓ. Veámos. Sea $\mathbf{u}$ el vector unitario que genera a ℓ, es decir, $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces

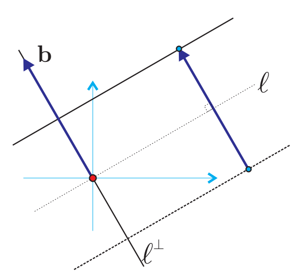


$$\begin{aligned} E_\theta \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta \cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta - \theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta - \theta) \end{pmatrix} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

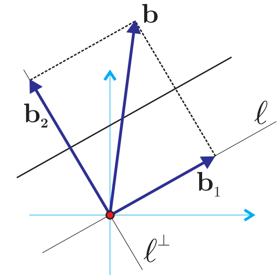
donde hemos usado las fórmulas trigonométricas para la diferencia de ángulos (3.12). Y por lo tanto $E_\theta(t\,\mathbf{u}) = t\,(E_\theta \mathbf{u}) = t\,\mathbf{u}$; que nos dice que todos los puntos de la recta ℓ satisfacen la ecuación homogénea $(I - E_\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ahora bien, si para cierta $\mathbf{b}$, el sistema $(I - E_\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución particular, $\mathbf{c}$ digamos, enonces toda la recta $\ell + \mathbf{c}$, paralela a ℓ que pasa por $\mathbf{c}$, consta de soluciones al sistema; es una reflexión con espejo $\ell + \mathbf{c}$. Pero nos falta determinar para cuáles $\mathbf{b}$ hay solución.



Para esto, conviene pensar geométricamente. Para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $(I - E_\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{x} - E_\theta \mathbf{x}$ es el vector que va de $E_\theta \mathbf{x}$ a $\mathbf{x}$, y como E_θ es una reflexión debe ser perpendicular al espejo; es más, debe ser el doble del vector que va de ℓ a $\mathbf{x}$ y es perpendicular a ℓ (recuérdese que así definimos reflexiones por primera vez). De tal manera que $(I - E_\theta)$ es, como función, la proyección ortogonal a $\ell^\perp : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ seguida de la homotesia "multiplicar por 2". La imagen de la función $(I - E_\theta)$ es entonces $\ell^\perp$, y por lo tanto, sólo cuando $\mathbf{b} \in \ell^\perp$ la isometría $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$ tiene puntos fijos. Más concretamente, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces reflejar en ℓ y luego transladar por $\mathbf{b}$, regresa a la recta $\ell + (1/2)\,\mathbf{b}$ a su lugar (y punto a punto).



En el caso general, podemos expresar a cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ como una suma de sus *componentes* respecto a la base ortonormal $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$, es decir como



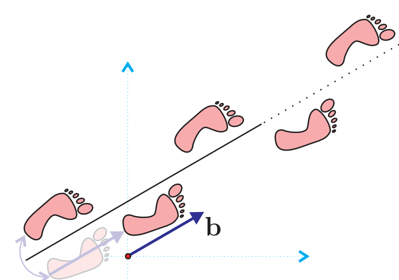
$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

con $\mathbf{b}_1 \in \ell$ y $\mathbf{b}_2 \in \ell^\perp$ (de hecho, por el Teorema de bases ortonormales: $\mathbf{b}_1 := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{u}$ y $\mathbf{b}_2 := \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^\perp\right) \mathbf{u}^\perp$). Y entonces la transformación $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$ se puede escribir como

$$f(\mathbf{x}) = (E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1$$

que es una reflexión en la recta $\ell + (1/2)\, \mathbf{b}_2$ (por el caso anterior) y que en la fórmula es $(E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}_2)$, seguida de una translación $(\ldots + \mathbf{b}_1)$ en la dirección del espejo. Nótese que si $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, entonces f no tiene puntos fijos, los puntos de un lado del espejo van al otro lado y los que estan en el espejo se transladan en él, aunque el espejo $\ell + (1/2)\, \mathbf{b}_2$ como linea sí se queda en su lugar (todos sus puntos se mueven dentro de ella) y este es entonces el caso en que nuestro sistema de ecuaciones que detecta puntos fijos no tiene solución.

A una isometría tal, una reflexión seguida de una translación no trivial ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) en la dirección de la linea espejo, la llamaremos un *paso* pues genera la simetría que tiene un caminito de huellas (infinito) y corresponde al acto de dar un paso: cambiar de pie (reflejar) y adelantarlo un poco (transladar). Si la aplicamos dos veces, nos da una translación (por $2\mathbf{b}$), y si la seguimos aplicando (a ella y a su inversa) nos da un subgrupo de isometrías que son las simetrías de un camino infinito. Pero en fin, hemos demostrado:



Teorema 3.8.1 *Una isometría que invierte orientación es un paso o una reflexión (paso con translación trivial).* □

EJERCICIO 3.98 Con la notación de los parrafos anteriores, demuestra con coordenadas que $(I - E_\theta)\, \mathbf{u}^\perp = 2\mathbf{u}^\perp$. (Tienes que usar las identidades trigonométricas para el doble del ángulo).

EJERCICIO 3.99 Demuestra que si f es una isometría que invierte orientación, entonces $f^2 = f \circ f$ es una translación.

EJERCICIO 3.100 Sea $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Encuentra la expresión para f^{-1} y argumentala geométricamente.

EJERCICIO 3.101 Demuestra analíticamente que la composición de dos reflexiones en lineas paralelas es una translación en la dirección ortogonal a sus espejos.

3.8.3 Homotesias y semejanzas

El clásico "zoom" que aumenta (o disminuye) de tamaño a una figura es lo que llamaremos una *homotesia.* Siempre tiene un centro de expansión, que cuando es el origen resulta ser una transformación lineal con matriz asociada

$$k\,I = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

donde $k > 0$; para $k > 1$ magnifica (es un "zoom" estrictamente hablando) y para $k < 1$ disminuye. Si la componemos con una translación, por $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ digamos, se obtiene una *homotesia* de *factor* k. Su centro de expansión $\mathbf{c}$ es el punto que se queda fijo y que se obtiene entonces resolviendo la ecuación

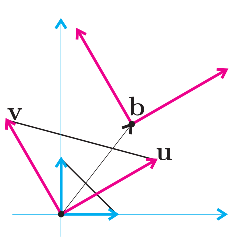
$$k\,\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x}\ .$$

Una *semejanza* es una transformación afín que preserva ángulos. Claramente las homotesias y las isometrías son semejanzas. Veremos que estas últimas se obtienen simplemente de dejar interactuar a las dos primeras.

Teorema 3.8.2 *Si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una semejanza, entonces existen* $k > 0$*,* $A \in \mathbf{O}(2)$ *y* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ *tales que*

$$f(\mathbf{x}) = k\,A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Demostración. Consideremos la transformación lineal $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} := f(\mathbf{0})$, y notemos que preserva ángulos pues las translaciones lo hacen. Sea $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la matriz asociada a g. Como los vectores canónicos son ortogonales entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (sus imagenes bajo g) también lo son. Ademas tienen la misma norma pues si no fuera asi, los ángulos chiquitos del triángulo $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ no medirían $\pi/4$ que son los del triángulo canónico. Sean $k = |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ y



$$A = \frac{1}{k} B\,.$$

Se tiene que $A \in \mathbf{O}(2)$ pues sus columnas son ortonormales, y además

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = B\mathbf{x} + \mathbf{b} = k\,A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

□

EJERCICIO 3.102 Encuentra la expresión de la homotesia de factor k y centro $\mathbf{c}$.

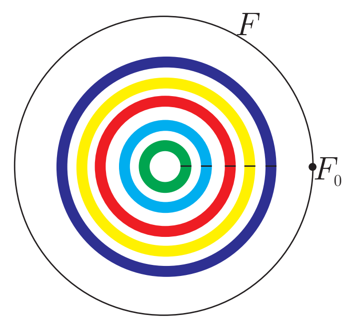
EJERCICIO 3.103 Demuestra que una transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una semejanza si y sólo si existe $k > 0$ tal que $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = k\,d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

3.9 *Simetría plana

En esta última sección, estudiamos diferentes instancias de simetrías en el plano a manera de aplicaciones de la Teoría que hemos desarrollado.

3.9.1 El Teorema de Leonardo

Ya tenemos la herramienta para demostrar el resultado que habíamos anunciado respecto a los posibles grupos de simetrías de las figuras acotadas. Por una *figura acotada* F entendemos un subconjunto del plano que a su vez esta contenido en el interior de algún círculo; y por medio de una homotesia, podemos suponer que está dibujada en una hoja de papel. ¿Qué podemos decir subre su grupo de simetrías $\text{Sim}(F) = \{f \in \mathbf{Iso}(2) \mid f(F) = F\}$? O bien, ¿Qué grupos son de este tipo? Por ejemplo, si F es un círculo centrado en el origen, entonces $\text{Sim}(F) = \mathbf{O}(2)$, (nótese que un conjunto de anillos concéntricos —un tiro al blanco— tiene a este mismo grupo de simetrías, pero dejémos a F un círculo para fijar ideas). La figura F se genera por un pedacito, un simple punto F_0 (para el tiro al blanco sería un intervalo por cada anillo), juntando todas las copias $f(F_0)$ al correr $f \in \mathbf{O}(2)$ (podríamos escribir $F = \mathbf{O}(2)\ F_0$); es decir dejando que el grupo "barra" o "actue" en una "figura fundamental" F_0. Y como en este caso el grupo es "continuo" (los ángulos de las rotaciones son un continuo) la figura que se genera también es "continua". Podemos pensar que la figura F se obtiene "poniendo tinta" en los puntos de F_0 y luego dejando que el grupo mueva a F_0 y vaya dejando huella. Todas las figuras que tienen simetría se deben obtener así, una porción de ella y el grupo la definen, ... "simetría, se dice coloquialmente, es una relación armoniosa entre las partes y el todo".



Otro ejemplo (antes de considerar a los que ya vimos en la Sección 3) es tomar el grupo generado por una *rotación irracional*. Sea θ es un ángulo para el cuál $n\theta$ (con $n \in \mathbb{Z}$) nunca es múltiplo de 2π, es decir para el que no existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\theta = (m/n)\, 2\pi$ (por ejemplo, $\theta = \sqrt{2}\pi$, o $\theta = 1$ pues π como número ya es irracional[1]). Entonces el conjunto $\langle R_\theta \rangle := \{R_{n\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de rotaciones, para $n = 0$ tenemos a la identidad y la composición de dos claramente está. En este caso, si tomamos un punto $\mathbf{x}$ distinto del origen (en nuestra notación anterior, $F_0 = \{\mathbf{x}\}$) las copias $R_{n\theta}(\mathbf{x})$ van poblando poco a poco (al crecer n en ambos sentidos, si se quiere) el círculo $\mathcal{C}$ con centro en $\mathbf{0}$ y que contiene a $\mathbf{x}$, pues nunca caen sobre un punto ya "pintado", pero nunca llegan a llenar todo el círculo; lo "pueblan", lo "atazcan" pero no lo llenan. Si definimos $F = \{R_{n\theta}(\mathbf{x}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $\langle R_{n\theta} \rangle \subset \text{Sim}(F)$ (no nos atrevimos a poner la igualdad pues podría ser que aparescan reflexiones

[1] Un número es *irracional* si no se puede expresar como una fracción p/q con p y q enteros. Por ejemplo $\sqrt{2}$ o π; aunque sea dificil demostrarlo.

como simetrías). Sin embargo, esta "figura" no se le aparecería nunca a un artista (dibujante o vil humano, para el caso) pintando en un papel con lápiz o plumón de cierto grosor. Para eliminar de nuestras consideraciones a este tipo de figuras raras o abstractas, que sólo se le aparecen a un matemático quisquilloso, tendríamos que usar conceptos de "topología de conjuntos" que expresen nuestras nociones intuitivas de "continuidad". Y eso rebaza el alcance de este libro; aunque sí se puede. Lo que sí estamos en posición de hacer es poner restricciones sobre el grupo en vez de sobre la figura. Y entonces demostraremos la versión "grupera" del Teorema de Leonardo.

Teorema 3.9.1 (Leonardo) *Si G es un grupo finito de isometrías del plano entonces G es diédrico o cíclico.*

En su versión "topológica", este Teorema diría algo así como, si F es una figura acotada y "razonable" (que cumple tales condiciones sobre su estructura topológica, "cerrado" por ejemplo) entonces $\operatorname{Sim}(F)$ es diédrico, cíclico o bien $\mathbf{O}(2)$.

Intuitivamente, eso de "cerrado" implica que si sus puntos se acumulan cerca de otro, ese también está, de tal manera que los "huecos" de nuestro ejemplo del grupo generado por una rotación irracional se llenarían y las simetrías crecerían a todas las rotaciones y las reflexiones ($\mathbf{O}(2)$). Pero dejemos ya de lado esta motivación para el estudio de la topología de conjuntos (como controlar particularidades sobre la "continuidad" de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$) y entrémosle a lo que sí podemos hacer: demostrar el Teorema grupero de Leonardo.

La demostración consta de cuatro pasos muy bien diferenciados y con ideas de distinta índole en cada uno.

Paso 1 (El centro de simetría). Como G es un grupo finito, sea $n \geq 1$ su cardinalidad. Entonces podemos enumerar sus elementos como

$$G = \{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$$

donde no importa el orden, salvo que podemos distinguir a g_0 como la identidad, que sabemos que está en G; y digamos de una vez que a $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ también lo llamamos g_n para facilitar la notación. Vamos a demostrar que existe un punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ *invariante bajo G*, es decir, tal que $g_i(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ para toda $i = 1, \ldots, n$, que es naturalmente el *centro de simetría* del grupo. Encontrarlo es fácil. Tomamos cualquier punto $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^2$, y $\mathbf{c}$ es el baricentro de su *orbita* ($G\mathbf{x} := \{g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_n(\mathbf{x})\}$). Es decir, sea

$$\mathbf{c} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) g_i(\mathbf{x}).$$

(Estamos generalizando la noción de baricentro de un triángulo, 3 puntos, a conjuntos arbitrarios, pero finitos, de puntos). Para ver que $\mathbf{c}$ es invariante bajo G, usamos que las isometrías son funciones afínes y que estas preservan combinaciones afines (Teorema 3.7.1), pues definimos a $\mathbf{c}$ como una combinación tal ($\sum_{i=1}^{n}(1/n) = 1$). Se tiene entonces que para cualquier $g \in G$ (podemos obviar el subindice para aliviar notación):

$$g(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) g(g_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) (g \circ g_i)(\mathbf{x})$$

y aseguramos que esta última sumatoria es justo la original (que definió a $\mathbf{c}$) salvo que el orden de los sumandos está permutado. Esto se sigue de que "componer con g" es una biyección del grupo en sí mismo (una permutación de los elementos del grupo). Más formalmente, definamos la función *multiplicación* por g como

$$\begin{aligned} \mu_g &: G \to G \\ \mu_g(g_i) &= g \circ g_i \end{aligned}$$

que está bien definida (que siempre caemos en elementos de G) se sigue de que G es cerrado bajo composición; y para ver que es biyección basta exhibir su inversa: $\mu_{g^{-1}}$, multiplicar por g^{-1} (de nuevo bien definida pues $g^{-1} \in G$). Claramente se tiene que $\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g = \mathrm{id}_G$ pues

$$\left(\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g\right)(g_i) = \mu_{g^{-1}}\left(\mu_g(g_i)\right) = \mu_{g^{-1}}(g \circ g_i) = g^{-1} \circ g \circ g_i = g_i$$

y analogamente, $\mu_g \circ \mu_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$. Así que la combinación afín que da $g(\mathbf{c})$ es un simple reordenamiento de la que da $\mathbf{c}$ y por lo tanto $g(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ para toda $g \in G$. Hemos demostrado que G tiene centro de simetría y, en particular, que no contiene ni translaciones ni pasos.

Paso 2 (Vámonos al origen) Ahora veremos que podemos suponer que el centro de simetría de G es el origen, y simplificar así nuestras consideraciones subsecuentes, usando nuestro viejo truco de conjugar con la translación de $\mathbf{c}$ al origen. Más formalmente, sea

$$G_{\mathbf{0}} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ G \circ \tau_{\mathbf{c}} := \{\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}} \mid g \in G\},$$

(el conjunto de los conjugados de todos los elementos de G). Nótese que si $g \in G$ entonces $(\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})(\mathbf{0}) = \tau_{-\mathbf{c}}(g(\tau_{\mathbf{c}}(\mathbf{0}))) = \tau_{-\mathbf{c}}(g(\mathbf{c})) = \tau_{-\mathbf{c}}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ asi que $\mathbf{0}$ es el centro de simetr'ia e $G_{\mathbf{0}}$. Es muy fácil ver que $G_{\mathbf{0}}$ también es un grupo y que es *isomorfo* al grupo original G (si G fuera el grupo de simetrías de una figura F, $G_{\mathbf{0}}$ es el grupo de simetrías de $\tau_{-\mathbf{c}}(F)$ —F transladada al origen— y ambas figuras claramente tienen la "misma" simetría), pues la conjugación respeta composición

$$\tau_{-\mathbf{c}} \circ (h \circ g) \circ \tau_{\mathbf{c}} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ h \circ (\tau_{\mathbf{c}} \circ \tau_{-\mathbf{c}}) \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}} = (\tau_{-\mathbf{c}} \circ h \circ \tau_{\mathbf{c}}) \circ (\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})$$

e inversos $\left((\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})^{-1} = \tau_{\mathbf{c}}^{-1} \circ g^{-1} \circ \tau_{-\mathbf{c}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ g^{-1} \circ \tau_{\mathbf{c}}\right)$. De hecho, la función inversa de la conjugación es la conjugación por la inversa, $G = \tau_{\mathbf{c}} \circ G_{\mathbf{0}} \circ \tau_{-\mathbf{c}}$. Así que si entendemos a $G_{\mathbf{0}}$ (con centro de simetrías $\mathbf{0}$) entenderemos al grupo original

G. Simplificando nuestra notación, suponemos en adelante que G tiene como centro de simetría al origen, que todos sus elementos dejan fijo al $\mathbf{0}$ y por lo tanto que es subgrupo de las transformaciones ortogonales. Es decir, en adelante $G \subset \mathbf{O}(2)$.

Paso 3 (Cuando G preserva orientación). Supongamos que todos los elementos de $G \subset \mathbf{O}(2)$ preservan orientación. Entonces todos los elementos de G son rotaciones con un cierto ángulo θ y tenemos una nueva enumeración natural (no necesariamente la que habíamos usado, salvo la primera) usando sus ángulos:

$$\begin{aligned} G &= \left\{R_{\theta_0}, R_{\theta_1}, R_{\theta_2}, \dots , R_{\theta_{n-1}}\right\}, \\ \text{donde} \quad 0 &= \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < 2\pi \end{aligned}$$

Queremos demostrar que $\theta_1 = 2\pi/n$ y que $\theta_i = i\,\theta_1$, lo cuál es justo decir que $G = \mathbf{C}_n$, que G es el grupo cíclico de orden n generado por la rotación $R_{2\pi/n}$. Consideremos el conjunto de ángulos $\Theta := \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots , \theta_{n-1}\}$. Como G es grupo, la composición de dos elementos de G también está en G, entonces la suma de dos elementos de Θ también está en Θ (*módulo* 2π), esto de “módulo” quiere decir que si $\theta_i + \theta_j \geq 2\pi$ entonces tomamos $(\theta_i + \theta_j) - 2\pi$ como la suma, que los sumamos como ángulos. Pero además, la diferencia de dos elementos de Θ también está en Θ pues G contiene a los inversos.

Con esto ya podemos demostrar que $\theta_2 = 2\theta_1$:

$$\theta_1 < \theta_2 \quad \text{y} \quad 0 < \theta_1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \theta_2 - \theta_1 < \theta_2$$

pero como $(\theta_2 - \theta_1) \in \Theta$ entonces no le queda mas que ser el único elemento entre 0 y θ_2, es decir, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_1$. Nos podemos seguir usando el mismo truco (lo que se llama un proceso de inducción) hasta llegar a que $\theta_i = i\,\theta_1$ para $i = 1, 2, \dots , n-1$. Para el último paso tomemos $\theta_n := 2\pi$ (como ángulo, $\theta_n = \theta_0$, pero nuestra demostración ha funcionado sobre los números reales), y el mismo argumento (que, para i en general, ha sido

$$\theta_{i-1} < \theta_i \quad \text{y} \quad 0 < \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_{i-1} - \theta_1 < \theta_i - \theta_1 < \theta_i$$

que, junto con $(\theta_i - \theta_1) \in \Theta$ y $\theta_{i-2} = \theta_{i-1} - \theta_1$, implica que $\theta_i - \theta_1 = \theta_{i-1}$) nos da que $\theta_n = \theta_{n-1} + \theta_1 = n\,\theta_1$, y por lo tanto que $\theta_1 = 2\pi/n$ para concluir la demostración: si G preserva orientación entonces es cíclico.

Paso 4 (Jaque Mate). Supongamos por último, que algún elemento de G, digamos que f, no preserva orientación. Consideremos al subgrupo de G que sí preserva orientación, llamémosle G^+; es decir, sea

$$G^+ := \{g \in G \mid \det(g) = 1\}.$$

Claramente G^+ es un grupo (contiene a la identidad y tanto el producto como los inversos de transformaciones que preservan orientación preservan orientación) que, por el paso anterior, es un grupo cíclico $\mathbf{C}_m$ para alguna $m < n$ (como hasta ahora, n es el *orden* del grupo G, es decir, $n = \sharp G$).

Primero veámos que $2m = n$. En el Paso 1 definimos la biyección de G "multiplicar por "; veámos qué hace μ_f (multiplicar por nuestro elemento dado que no preserva orientación). Al componer con una transformación que invierte orientación (f en nuestro caso), a una que la preserva ($g \in G^+$) nos da una que la invierte ($\mu_f(g) \notin G^+$) y con una que invierte ($g \notin G^+$) resulta que preserva ($\mu_f(g) \in G^+$); pero podemos resumir este trabalenguas como

$$g \in G^+ \quad \Leftrightarrow \quad \mu_f(g) \notin G^+$$

Esto quiere decir, que μ_f es una biyección entre G^+ y su complemento, G^- digamos —y vale la notación aunque no sea grupo—, de tal manera que ambos tienen el mismo número de elementos, m habíamos dicho, y entonces $n = 2m$.

Por otro lado, como $G \subset \mathbf{O(2)}$, f tiene que ser una reflexión, en la linea ℓ, digamos (y con $\mathbf{0} \in \ell$); y G^+ está generado por la rotación $R_{2\pi/m}$. En el Ejercicio **??** de la Sección **??** se pidió demostrar que $f \circ R_\theta$ es la reflexión en la linea $R_{-\theta/2}(\ell)$ analíticamente; geométricamente, si le aplicamos $f \circ R_\theta$ a está última linea, R_θ la gira a la que está a un ángulo $\theta/2$ más allá de ℓ y luego f la regresa a su lugar, así que es cierto lo que se pidió ($f \circ R_\theta$ es una reflexión que fija a la recta $R_{-\theta/2}(\ell)$, aunque no hayan hecho su tarea). De tal manera que

$$f_1 := \mu_f\left(R_{2\pi/m}\right) = f \circ R_{2\pi/m} \in G^-$$

es la reflexión en la recta ℓ_1 cuyo ángulo haciá ℓ es π/m. Por nuestra definición de grupo diédrico, las reflexiones f y f_1 generan a $\mathbf{D}_m$; pero también generan a G y al verlo concluíremos. A saber, $R_{2\pi/m}$ se obtiene como $f \circ f_1$, pues $f = f^{-1}$, así que generan a G^+ (generado por $R_{2\pi/m}$) y luego cualquier elemento de G^- se obtiene como $\mu_f(g) = f \circ g$ para algún $g \in G^+$. Así que $G = \mathbf{D}_m$ y colorín colorado, el Teorema de Leonardo ha quedado demostrado. $\square$

Vale la pena hacer notar de la demostración anterior, que aunque el grupo cíclico quede totalmente definido al fijar su centro de simetría (la $\mathbf{c}$ que encontramos en el Paso 1), o bien que está conjuntistamente determinado como subgrupo de $\mathbf{O}(2)$, no sucede lo mismo para el diédrico, o **los** diédricos para ser más claros. Nótese que nunca usamos el ángulo de la recta ℓ (el espejo básico) en la que se basó (valga la redundancia) el final de la demostración. Para cualquier recta ℓ por el origen funciona la demostración y tenemos una instancia, conjuntistamente distinta, del diédrico. Si queremos **el diédrico** con ℓ igual al eje de las x, tendremos que conjugar, como en el Paso 2, pero ahora con la rotación que lleva a ℓ a la recta canónica.

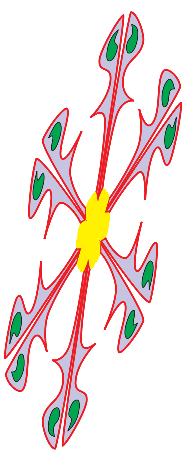
Quizá quede más claro a qué nos referimos con eso de "instancias" de un cierto grupo si enunciamos el Teorema de Leonardo como "*un grupo finito de isometrías es conjugado del cíclico* $\left\langle R_{2\pi/n}\right\rangle$ *o del diédrico* $\left\langle E_0, E_{\pi/n}\right\rangle$" que fué, junto con la observación precedente, lo que realmente demostramos.

EJERCICIO 3.104 Identifica al grupo de simetrías de las siguientes figuras y, a ojo de buen cubero, píntales su centro de simetría. ¿Qué algunas no tienen tal? ¿Dónde está un error formal de la demostración anterior? Corrígelo.

Leonardo afín

El ojo humano, y la naturaleza en general, identifica simetrías aunque, estrictamente hablando, no las haya; vemos el bulto y no nos preocupamos por los milímetros; el Ejercicio anterior tiene sentido aunque es seguro que en el dibujo, oen la impresión, se cometieron errores; el cuerpo humano tiene simetría $\mathbf{D}_1$. E igualmente existe la simetría más allá del rígido grupo de isometrías.

Supongamos que una figura F tiene grupo de simetrías G (será $\mathbf{D}_6$ en la figura que viene). Si f es una transformación afín que no es isometría, entonces $f(F)$ (ahora sí: la figura) ya no tiene, en general y estrictamente hablando, las mismas simetrías (más allá de id y, en su caso, $-\mathrm{id}$). Sin embargo, es evidente que sí las tiene, se las vemos, las detectamos: tiene simetría afín. Podemos definir el *grupo de simetría afín* de (cualquier figura) F (luego regresamos a nuestro ejemplo, $f(F)$) como

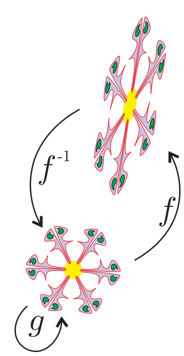


$$\mathrm{Sim}_{Af}(F) = \{g \in \mathbf{Af}(2) \mid g(F) = F\}$$

y la demostración de que es un subgrupo de $\mathbf{Af}(2)$, es *verbatim*[2] la de que $\mathrm{Sim}(F)$ es subgrupo de $\mathbf{Iso}(2)$. En nuestro caso ($f(F)$, el dibujito de al lado), $\mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$ será justo el conjugado por f^{-1} del grupo $G = \mathrm{Sim}(F)$; que, puesto que f no es isometría, simplemente es afín, sólo es un subgrupo de las transformaciones afines. Veámos. Si $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned}\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(f(F)) &= (f \circ g)\left(f^{-1}(f(F))\right)\\ &= (f \circ g)\left(\left(f^{-1} \circ f\right)(F)\right)\\ &= (f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F)\end{aligned}$$

implica que $(f \circ g \circ f^{-1}) \in \mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$. Hemos demostrado que



$$f \circ \mathrm{Sim}(F) \circ f^{-1} \subset \mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$$

donde estamos extendiendo naturalmente nuestra definición de grupo conjugado (dada en el Paso 2 del Teorema de Leonardo) al contexto más amplio de cualquier grupo (en nuestro caso a $\mathbf{Af}(2)$). Intentémos demostrar la otra contención, pues habíamos aventurado justo la igualdad.

[2] Dícese de cuando es literalmente idéntica, salvo los cambios obvios.

Si $g \in \mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$, entonces un cálculo equivalente, aunque más facilito, implica que $(f^{-1} \circ g \circ f)(F) = F$. Pero de esto no podemos concluir que $(f^{-1} \circ g \circ f) \in \mathrm{Sim}(F)$ sino sólo que $(f^{-1} \circ g \circ f) \in \mathrm{Sim}_{Af}(F)$, pues no sabemos si $(f^{-1} \circ g \circ f)$ es isometría o no: en principio, es simplemente afín. Habíamos aventurado la igualdad justa en el caso concreto del dibujito $f(F)$ que estamos estudiando, porque a simple vista es evidente: el "chuequito" $f(F)$ tiene unicamente las 12 simetrías afínes que corresponden a las 12 simetrías métricas del "redondito" F. Y aunque no lo hayamos podido demostrar en el primer intento, surgen las preguntas naturales de si los grupos de simetrías afínes de las figuras acotadas (versión topológica) o si los subgrupos finitos (versión grupera) se comportan como los rígidos (Teoremas de Leonardo). Más concretamente, y en base a lo que hemos logrado con isometrías, olvidándonos de las figuras y concentrándonos en los grupos, nos debemos hacer dos preguntas:

Pregunta 1. *Si G es un subgrupo finito de* $\mathbf{Af}(2)$*, ¿será cierto que es isomorfo a un cíclico o un diédrico?*

Pregunta 2. *Si G es un subgrupo finito de* $\mathbf{Af}(2)$*, ¿será cierto que es conjugado del cíclico $\langle R_{2\pi/n} \rangle$ o del diédrico $\langle E_0, E_{\pi/n} \rangle$ para alguna n?*

No queremos perder mucho tiempo en esto, pero vale la pena esbozar algunas ideas básicas hacía la solución (positiva) de estas "conjeturas", pues gran parte del trabajo ya se hizo, y los huecos que quedan motivan el desarrollo de la teoría en capítulos posteriores.

El Paso 1 en la demostración de Leonardo funciona verbatim en el caso afín (de hecho sólo en esa cualidad se basó); y ya que lo mencionamos, ahí está el error que dejamos buscar como ejercicio: para que el centro $\mathbf{c}$ esté bien definido, que no dependa de $\mathbf{x}$, se necesita que el grupo tenga más de dos elementos. Una vez encontrado el centro de simetría (los ejemplos chiquitos son re fáciles), irse al origen (Paso 2) es igualito, pero acabamos suponiendo que G es subgrupo de $\mathbf{Gl}(2)$ en vez de $\mathbf{O}(2)$. Las broncas aparecen en el Paso 3 que aparentemente se basó en sumas, restas y desigualdades de ángulos como números reales, pero en el fondo son una forma más mundana de trabajar con la estructura de grupo. Recapitulémos sobre esa demostración en el contexto afín.

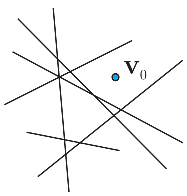
No tenemos los ángulos de las rotaciones. Pero si escogemos un punto distinto del origen que llamaremos $\mathbf{v}_0$, digamos que el canónico $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ para tratar de que la demostración siga a la vieja, tenemos a su órbita

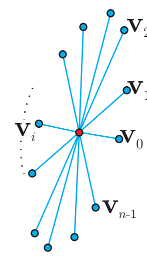
$$G\,\mathbf{v}_0 := \{\mathbf{v}_0 = g_0(\mathbf{v}_0), g_1(\mathbf{v}_0), g_2(\mathbf{v}_0), \ldots, g_{n-1}(\mathbf{v}_0)\} \tag{3.17}$$

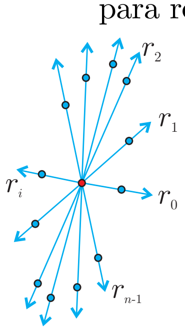
donde seguimos exigiéndo que $g_0 = \mathrm{id}$, y que además quisieramos suponer que está *ordenada angularmente* (que en coordenadas polares sus ángulos son crecientes). Aquí hay una primera bronca: ¿cómo sabemos que no hay repeticiones?, es decir ¿qué hay tantos puntos en la órbita como elementos en el grupo?; y aunque esto fuera cierto ¿cómo sabemos que no hay dos de ellos cuyo ángulo se repite? Una manera de resolver este problema es con los dos primeros ejercicios del siguiente bloque. Pero en el texto seguiremos otra linea, basicamente, aceptar que a lo mejor escogimos $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_1$ mal, pero que debe haber otro para el que sí funcione.

Si en la órbita $G\,\mathbf{v}_0$ hubiera una repetición, $g_i(\mathbf{v}_0) = g_j(\mathbf{v}_0)$ digamos, entonces $\mathbf{v}_0$ es punto fijo de un elemento de G, a saber de $g_j^{-1} \circ g_i$, pero cómo G es finito no debe haber demasiados puntos fijos. La idea es encontrar un punto que no sea fijo de ningún elemento de G.

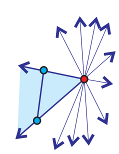
Para cualquier $g \in \mathbf{Gl}(2)$, o bien $g \in \mathbf{Af}(2)$, su conjunto de puntos fijos, cuando $g \neq \mathrm{id}$, es una recta o un sólo punto: ¡hágase el tercer ejercicio que sigue! Entonces, si $G \subset \mathbf{Gl}(2)$ es finito tendremos, a lo más, un conjunto finito de rectas que son puntos fijos de algún elemento de G, y claramente podemos escoger un punto $\mathbf{v}_0$ fuera de todas ellas. Para este $\mathbf{v}_0$, su órbita $G\,\mathbf{v}_0$ (3.17), que consiste de puntos en $\mathbb{R}^2$, está en correspondencia biyectiva con G. Pero ahora, ordenarlos angularmente no nos pone a $\mathbf{v}_0$ necesariamente en el principio (ya no le exigimos que sea $\mathbf{e}_1$ cuyo ángulo es 0); sin embargo, podemos pensar en el *orden cíclico* correspondiente (del último sigue el primero y vuelve a dar la vuelta) y rotar para que queden con $\mathbf{v}_0$ en el primer lugar. Dicho de otra manera, si tomamos los *rayos positivos* generados por $\mathbf{v}_i := g_i(\mathbf{v}_0)$, es decir, sea $r_i := \{t\,\mathbf{v}_i \mid t \in \mathbb{R}, t > 0\}$, entonces estamos suponiendo (u ordenando de tal manera) que girando a r_0 en la orientación positiva, con el primero que choca es r_1, luego r_2 y asi sucesivamente hasta que rebasa a r_{n-1} para regresar a si mismo despues de dar una vuelta.



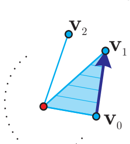




Nótese que en todo el parrafo anterior no hemos usado que G preserve orientación (el Paso 3 en el que andábamos), así que nos podemos seguir en general y ver hasta donde llegamos. Ya tenemos a G linealmente ordenado y con la identidad a la cabeza. Además lo tenemos identificado con puntos en el plano, la órbita $G\,\mathbf{v}_0$, (o bien, con sus rayos r_i), de tal manera que si le aplicamos un elemento de G a un punto de $G\,\mathbf{v}_0$ (o a un rayo) volvemos a caer en $G\,\mathbf{v}_0$ (o, respectivamente, lo manda a otro rayo, pues $g(t\,\mathbf{x}) = t\,g(\mathbf{x})$), pero además si caemos en el mismo es porque aplicamos a la identidad.

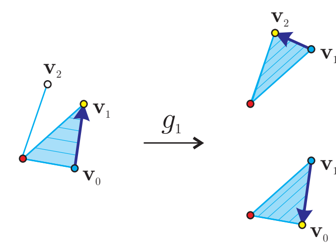


El resto de la demostración se basa en el hecho de que el orden cíclico que tienen los rayos r_i (y, correspondientemente, los puntos o los elementos de G) se define por la relación de "ser vecinos" ($\mathbf{v}_i$ *es vecino* de $\mathbf{v}_{i-1}$ y de $\mathbf{v}_{i+1}$.), y en que esta relación se detecta "linealmente": dos rayos son vecinos si y sólo si el ángulo o sector entre ellos no contiene a otro rayo, es decir, si los segmentos que van de uno a otro no intersectan a ningún otro rayo. (Esto último es cierto para cuando hay muchos rayos, pero los casos pequeños ya debieron resolverse).



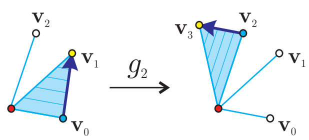
Consideremos el segmento por $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_1$, que no intersecta a ningún rayo r_i; al aplicarle g_1 va a un segmento de $\mathbf{v}_1 = g_1(\mathbf{v}_0)$ a algún $\mathbf{v}_i$, pero este $\mathbf{v}_i$ tiene que ser vecino de $\mathbf{v}_1$ pues los otros segmentos de $\mathbf{v}_1$ a los puntos de la órbita <u>sí</u>

intersectan rayos (aquí se usa que g_1 es afín en las lineas). Tenemos entonces dos casos: $g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ o bien $g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_0$; pues los vecinos de $\mathbf{v}_1$ son $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_2$. Nótese que los dos casos corresponden respectivamente a que g_1 preserve orientación, pues $\mathbf{v}_2$ está en el lado positivo del rayo r_1; o bien, que la invierta, pues $\mathbf{v}_0$ está en el lado negativo del rayo r_1. En el primer caso ($g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$) se concluye que $g_1^2 = g_2$ (pues $g_1(\mathbf{v}_1) = g_1(g_1(\mathbf{v}_0)) = g_1^2(\mathbf{v}_0)$ y $\mathbf{v}_2 = g_2(\mathbf{v}_0)$) y por inducción (cuyos detalles dejamos al lector) que G es un grupo cíclico de orden n generado por g_1.



En el otro caso, g_1 transpone a $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_1$, pues $g_1(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_1$ y $g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_0$, de tal manera que $g_1^2 = \mathrm{id}$, pues deja en su lugar a dos vectores linealmente independientes.

Si ahora le aplicamos g_2 al segmento $\overline{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1}$: manda a $\mathbf{v}_0$ en $\mathbf{v}_2$, pero ya no puede mandar a $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_1$ (la identidad es la única que lo hace) así que tiene que mandar a $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_3$ y tiene que ser una "rotación" (preserva orientación) como en el caso anterior. La demostración de que entonces G es un diédrico sigue verbatim a la que dimos en el Paso 4 de Leonardo usando, respectivamente, a g_2 y g_1 en vez de la rotación y la reflexión que se usaron allá.



Salvo los detalles que mandamos a los ejercicios, hemos respondido la Pregunta 1 afirmativamente; hay un Teorema de Leonardo afín. Aunque ahora, la demostración sólo dió un isomorfismo pero no una conjugación explícita. La Pregunta 2 aún no está resuelta, encontrar una transformación afín que conjugue de golpe a todo el grupo en uno de isometrías requiere de más herramientas; a saber de los "valores y vectores propios" que necesitaremos estudiar en el siguiente capítulo.

EJERCICIO 3.105 Sea $g \in \mathbf{Gl}^+(2)$ (donde $\mathbf{Gl}^+(2) := \{g \in \mathbf{Gl}(2) \mid \det(g) > 0\}$), tal que para algún vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, se tiene que $g(\mathbf{v}) = t\,\mathbf{v}$. Demuestra que si g tiene orden finito, es decir, que si $g^n = \mathrm{id}$ para alguna n, entonces $g = \mathrm{id}$ o $g = -\mathrm{id}$. *(Primero demuestra que $t = \pm 1$ pensando en la acción de g en la recta generada por $\mathbf{v}$, $\langle \mathbf{v} \rangle$; y luego usa la hipótesis de que preserva orientación: toma algún vector fuera de $\langle \mathbf{v} \rangle$ y expresa lo que le hace g).*

EJERCICIO 3.106 Demuestra que si $G \subset \mathbf{Gl}^+(2)$ es finito, entonces $G\mathbf{v} = \{g(\mathbf{v}) \mid g \in G\}$ tiene la cardinalidad de G para cualquier $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Y que además se tiene que si $g(\mathbf{v})$ es paralelo a $h(\mathbf{v})$ para algunos g y h en G entonces $g = h$ o bien $g = -h$ (*ojo: en este último caso, sus ángulos son opuestos*).

EJERCICIO 3.107 Sea $g \in \mathbf{Gl}(2)$, $g \neq \mathrm{id}$, demuestra que su conjunto de puntos fijos, $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\right\}$, es una recta por el origen o sólo el origen (*revisa la Sección 8.1*). Cóncluye que los puntos fijos de una transformación afín distinta de la identidad son el vacio, o un punto o una recta.

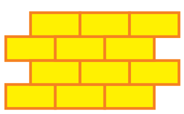
EJERCICIO 3.108 Demuestra que $\mathrm{Sim}_{\mathbf{Af}}(\mathbb{S}^1) = \mathbf{O}(\mathbf{2}) = \mathrm{Sim}(\mathbb{S}^1)$; es decir, que toda simetría afín del círculo unitario es una isometría.

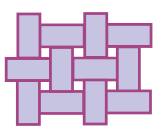
EJERCICIO 3.109 Sea $\mathcal{E}$ la elipse dada por la ecuación

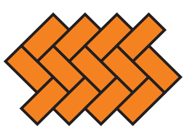
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demuestra que $\mathrm{Sim}_{\mathbf{Af}}(\mathcal{E})$ es conjugado de $\mathbf{O(2)}$ (para esto, encuentra una matriz que mande a $\mathbb{S}^1$ en $\mathcal{E}$).

3.9.2 Grupos discretos y caleidoscópicos

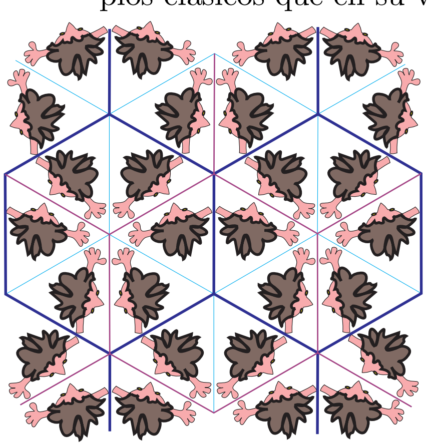






Los Teoremas tipo Leonardo hablan de las posibles simetrías de las figuras acotadas. Pero además hay figuras infinitas que tienen simetría, y de ellas, más bien de sus grupos, queremos hablar en esta sección. Las más comunes son los pisos por los que caminamos a diario y las paredes que nos rodean. Aunque no sean infinitos, una pequeña porción sugiere claramente cómo debía continuarse de tal manera que cada región sea "igualita" a cualquier otra. Tienen, o dan la idea de una "regla" para ir pegando piezas, que llamaremos *lozetas* y que juntas todas ellas llenan el plano. A tal descomposición del plano en lozetas la llamaremos un *mosaico*; cada lozeta es copia isométrica de una o varias que forman el *muestrario*; por ejemplo, en el mosaico de en medio un "ladrillo" rectangular y un "huequito" cuadrado forman el muestrario y en los otros dos el muestrario consta de una sola pieza. Con una sola pieza se pueden armar varios mosaicos (ver otros ejemplos, además de dos al margen, en el segundo ejercicio que viene) usando diferentes "reglas". Y esto de las "reglas" ya lo conocemos, consisten en el fondo de dar un subgrupo de isometrías; que llamaremos el *grupo de simetrías* del mosaico: las isometrías que lo mandan en sí mismo (que dejan a la figura completa —aunque infinita— en su lugar).

Un último y sugestivo ejemplo, antes de entrar a la teoría, surge de los caleidoscopios clásicos que en su versión física, real, consisten de tres espejos rectangulares del mismo tamaño armando un prisma triangular equilatero, de tal manera que al observar desde un extremo de él, la figura plana al otro lado (que puede ser cambiante) se reproduce para dar la impresión de un plano infinito. Este es otro ejemplo de un mosaico plano. Podemos pensar en una figura plana (*la figura fundamental*) dentro de un triángulo equilatero de lineas espejo: esta se reproduce por las tres reflexiones y sus composiciones para tapizar todo el plano y generar una *figura caleidoscópica*; como mosaico, el muestrario consiste de una lozeta que es el triángulo equilatero con un dibujito.



El grupo de simetrías de este mosaico es el conjunto de todas las posibles composiciones de las tres reflexiones básicas o *generadoras*; y un elemento del grupo lleva a la figura (o lozeta) fundamental a una cierta lozeta, que no sólo es un triángulo de la descomposición del plano en triángulos equilateros, sino que la figura (en el dibujo, el "manquito") le dá una orientación y una posición específica. En su versión física, la composición que produce a una cierta lozeta tiene que ver con los espejos y el orden en que rebota el rayo de luz que emana de la figura real para producir la imagen dada.

Basta de ejemplos (ojéense los ejercicios) y hagamos algo de teoría. Por nuestra experiencia reciente, será más facil definir con precisión a los grupos involucrados en los mosaicos que a los mosaicos mismos (se necesitarían rudimentos de topología). Pero la intuición y los ejemplos bastan. Aunque los grupos de simetría de los mosaicos sean infinitos, tienen la propiedad de que localmente son finitos; cada punto del plano está en un número finito de lozetas. Esto se reflejará en la primera propiedad de nuestra definición. Y otra cosa importante es que las lozetas sean acotadas, que expresaremos como la propiedad dos. Llamaremos un *disco* a un círculo (de radio positivo) junto con su interior, es decir a los conjuntos de la forma $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leq r\}$ para algún punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ y algún $r > 0$.

Definición 3.9.1 Un subgrupo G de las isometrías $\mathbf{Iso}(2)$ es *cristalográfico* si cumple:

i) Para cualquier disco D se tiene que el conjunto $\{g \in G \mid g(D) \cap D \neq \varnothing\}$ es finito.

ii) Existe un disco D_0 tal que $\bigcup_{g \in G} g(D_0) = \mathbb{R}^2$, es decir, tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\mathbf{x} \in g(D_0)$ para alguna $g \in G$.

La primera propiedad dice que al estudiar un grupo cristalográfico dentro de una región acotada del plano sólo intervendrán un número finito de elementos del grupo, a esto también se le llama que el grupo sea *discreto*. Y la segunda, que al entender una región suficientemente grande, pero acotada, de alguna manera ya acabamos; el grupo se encarga del resto.

El nombre "cristalográfico" viene de que los cristales en la naturaleza se reproducen respetando ciertas simetrías; los químicos, interesados en el asunto, se pusieron a estudiar tales simetrías y demostraron, hacia el final del Siglo XIX, que en el plano solamente había 17 posibilidades teóricas para estas reglas de crecimiento. Los matemáticos, ya en el Siglo XX, pulieron sus observaciones y la demostración, pero preservaron el nombre dado por los químicos.

La demostración de este Teorema involucra dos grandes pasos: la existencia (exhibir a los 17 grupos cristalográficos) y la unicidad (demostrar que no hay más). Pero resulta que los artistas y artesanos árabes —cuya expresión gráfica se centró mucho en los mosaicos, la simetría y la ornamentación pues en una cierta interpretación del Corán se prohibía representar a la figura humana— ya habían hecho (¡y de qué manera!) la mitad del trabajo: en la Alhambra, hay ejemplos de mosaicos con los 17 grupos. Así que la demostración de la existencia está en la Alhambra, concluida en el Siglo XVI; y si hay un Teorema de Leonardo, este —digo yo— debía ser el de la Alhambra.

No nos da el nivel para demostrarlo aquí. Pero sí podemos ejemplificar su demostración con uno mucho más modesto. Diremos que un grupo cristalográfico G es *caleidoscópico* si además cumple que tiene suficientes reflexiones como para generarlo, es decir, si cada elemento de G se puede escribir como composición de reflexiones en G. Un ejemplo es el que describimos arriba, que estaba generado por tres reflexiones y que denotaremos como $K_{3,3,3}$ pues las lineas de sus espejos se encuentran en los ángulos $\pi/3, \pi/3, \pi/3$.

Otros dos grupos caleidoscópicos surgen del juego de escuadras. Con tres lineas espejos en los lados de un triángulo de ángulos $\pi/6, \pi/3, \pi/2$ (la escuadra "$30, 60, 90$") se genera el grupo $K_{2,3,6}$; y con tres espejos en ángulos $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ (la escuadra "45") el $K_{2,4,4}$. El último, que llamamos $K_{4\times4}$, es el generado por espejos en los cuatro lados de un rectángulo. Y, salvo ver que efectivamente son cristalográficos, esto concluye la parte de existencia del siguiente:

Teorema 3.9.2 *Hay cuatro grupos caleidoscópicos, que son $K_{2,3,6}$, $K_{2,4,4}$, $K_{3,3,3}$ y $K_{4\times4}$.*

La demostración de la unicidad se basa en un lema general sobre los centros de simetría. Dado un grupo cristalográfico G (aunque de hecho sólo usaremos que es discreto, la propiedad **(i)**) tenemos que para cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ hay un subgrupo de G, llamado el *estabilizador* de $\mathbf{x}$ y denotado $\mathbf{St}_G(\mathbf{x})$, que consta de los elementos de G que no mueven a $\mathbf{x}$, que lo "estabilizan", es decir,

$$\mathbf{St}_G(\mathbf{x}) := \{g \in G \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

(es fácil demostrar que efectivamente es un subgrupo de G). Si tomamos cualquier disco D centrado en $\mathbf{x}$, todos los elementos de su estabilizador mandan a D precisamente en D, pues fijan su centro y son isometrías. Por la propiedad **(i)** los que mandan a D cerca (lo suficiente para intersectarlo) ya son un número finito, entonces $\mathbf{St}_G(\mathbf{x})$ es finito para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. El Teorema de Leonardo nos da entonces el siguiente:

Lema 3.9.1 *Si G es un grupo discreto, entonces sus subgrupos estabilizadores no triviales son cíclicos o diédricos.* □

Ahora sí, enfoquémos nuestras baterias contra el Teorema. Como el grupo G tiene suficientes reflexiones para generarlo, nos podemos fijar en el conjunto de sus lineas espejo. Es decir, para cada reflexión en G, pintamos de negro su linea espejo; llamemos $\mathcal{L}$ a este conjunto de lineas. Primero vamos a demostrar que podemos encontrar un triángulo o un rectángulo formado por lineas negras (en $\mathcal{L}$) tal que ninguna linea de $\mathcal{L}$ pasa por su interior y lo llamaremos la *región fundamental*.

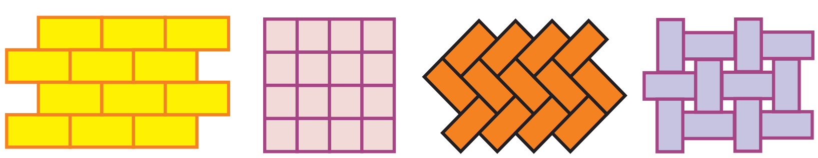
Si todas las lineas de $\mathcal{L}$ son paralelas, los elementos de G mueven a cualquier disco en la dirección perpendicular y entonces cubren a lo más una franja del tamaño de su diametro en esa dirección y no existiría el disco D_0 de la condición **(ii)**. Hay, por tanto, al menos dos pendientes en $\mathcal{L}$. Si son exactamente dos, estas tienen que ser perpendiculares, pues con reflexiones en dos rectas no ortogonales se generan reflexiones en lineas con nuevas direcciones. En este caso, hay al menos dos rectas de cada tipo, pues si hay sólo una de un tipo, con cualquier disco se cubre, de nuevo, a lo más una franja. Existe entonces un rectángulo en $\mathcal{L}$. Si hay rectas en tres direcciones tenemos un triángulo. Llamemos F' al rectángulo o triángulo que hemos encontrado. Puesto que las reflexiones en G que mandan a F' cerquita son finitas (la condición **(i)** aplicada a un disco que lo contenga), hay, a lo más, un número finito de rectas en $\mathcal{L}$ que pasan por el interior de F'. Recortando con tijeras en todas ellas, un pedacito (cualquiera) de lo que queda es la región fundamental F que buscabamos, ya no hay lineas negras por su interior.

Veamos ahora cómo puede ser la región fundamental F. En un vértice, $\mathbf{v}$ digamos, se intersectan dos lineas de $\mathcal{L}$ de tal manera que en su ángulo definido por F (como ángulo interior) no hay ninguna otra linea de $\mathcal{L}$. Como las reflexiones correspondientes a estas dos lineas son elementos del grupo estabilizador de $\mathbf{v}$, $St_G(\mathbf{v})$, y este es diédrico o cíclico según el Lema 3.9.1, entonces es diédrico (pues tiene reflexiones) y el ángulo interior de F en $\mathbf{v}$ es de la forma π/n. Por lo tanto, F tiene que ser un rectángulo (con cuatro ángulos $\pi/2$), o bien un triángulo con ángulos $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ donde podemos suponer que $p \leq q \leq r$. En el segundo caso se tiene entonces que p, q, r cumplen

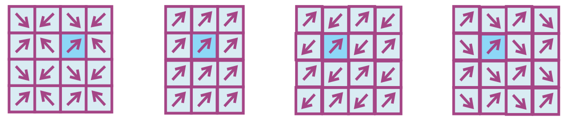
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

pues los ángulos de un triángulo suman π. Para $p = 2$, tenemos las soluciones $q = 3$, $r = 6$ y $q = r = 4$; para $p = 3$ tenemos la solución $q = r = 3$ y para $p \geq 4$ ya no hay soluciones. Entonces hemos demostrado que los lados de F generan uno de los grupos $K_{4\times 4}, K_{2,3,6}, K_{2,4,4}$ o $K_{3,3,3}$ (respectivamente a su orden de aparición) y por lo tanto que uno de estos grupos, el correspondiente a F, digamos que G' está contenido en G.

EJERCICIO 3.110 Identifica las *lineas de simetría* (espejos de reflexiones en el grupo de simetrías) y los *centros de simetría* (centros de subgrupos finitos), de los siguientes mosaicos comunes, que, por supuesto, suponemos infinitos.



EJERCICIO 3.111 Supon que en los siguientes mosaicos la lozeta oscura está justo en el cuadrado unitario. Da generadores para sus grupos de simetría.



3.9.3 Fractales afinmente autosimilares