Kako dokučiti Eulerovu formulu za kompleksne brojeve jednostavnom aritmetikom?

Šime Šuljić

$$e^{i\pi}+1=0$$

Mnogi će kazati da je riječ o najljepšoj matematičkoj formuli svih vremena. Ona povezuje pet posebnih brojeva. Jedinicu, prvi prirodni broj i neutralni element množenja. Nulu, poseban cijeli broj s kojim nije dozvoljeno dijeliti i neutralni element zbrajanja. Ludolfov broj π, vezan uz opseg i površinu kruga, općenito obla tijela i likove ali i puno drugih grana matematike. Imaginarnu jedinicu i, broj koji kvadriran daje -1. I na kraju Eulerov broj e, bazu prirodnog logaritma.

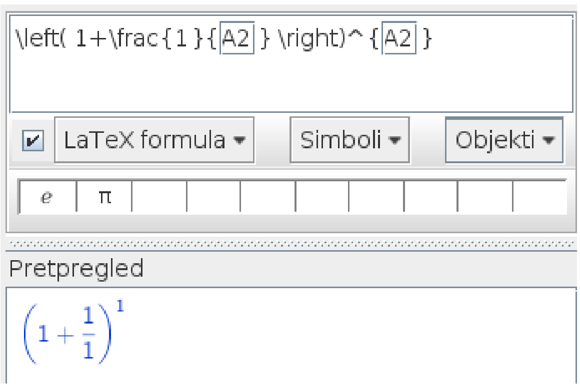
Na formulu nailazimo u mnogim učionicama i na mnogim plakatima koji populariziraju matematiku. Zanimljiva je to formula, čak i po estetskom dojmu, ali kako odgovoriti na temeljno pitanje u matematici zašto? Leonard Euler je formulu dokazao preko redova, a to znači da ni na srednjoškolskoj razini ne možemo ući u matematičko dokazivanje. Pristup koji ćemo ovdje iznijeti uz pomoć računalnog programa *GeoGebra* stariji je i od samog programa. Kada se pojavili prvi računalni programi za interaktivnu geometriju krajem prošlog stoljeća došla je na red i Eulerova formula.

Ideja je dakle već duže nazočna u raznim internetskim objavama. Meni je u posljenje vrijeme za oko zapeo video Burkarda Polstera, profesora na *Monash University* u Melbournu, Australija, poznatijem kao *Youtuber* **Mathologer** na istoimenom kanalu. Adresa video uratka je https://youtu.be/-dhHrg-KbJ0. U videu autor koristi računalni program Wolfram *Mathematica* da bi izradio izračune i geometrijske prikaze. Profesor je primjer zabavnog i dobrog predavača matematike zbog čega preporučujem da svakako pogledate ovaj ali i druge njegove video uratke.

Bez obzira na dinamične izračune i geometrijske prikaze mislim da bi se za *Večer matematike* ili slične manifestacije moglo te ključne momente videa izvesti zajedno s učenicima na računalnom programu *GeoGebra*.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$Vrijednost$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2.25
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$	2.3704
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	2.4414
5	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$	2.4883

Broj *e*



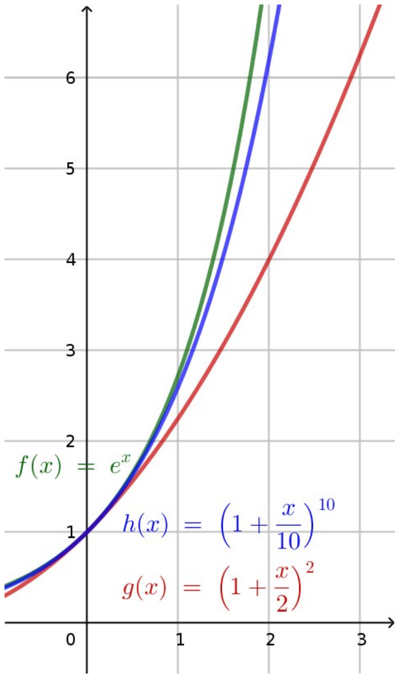
Profesor Polster dolazi do broja e preko primjera ukamćivanja u banci. Stavimo li jedan dolara na neku banku koja nakon godine dana daje isto toliko kamata, imat ćemo tada 2 dolara. Ali postoji neka druga banka koja svakih pola godine dodaje vašem ulogu polovinu vrijednosti. To znači da jedan dolar za pola godine naraste na 1.5 dolara, a onda za drugih šest mjeseci to naraste na 1.5 puta 1.5 jednako 2.25 dolara. To je zapravo $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$. Treća banka upisuje kamate svaka četiri mjeseca, što ukupno za godinu dana daje $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$ dolara. U GeoGebrinoj proračunskoj tablici lako ćemo dobiti taj prikaz i izračun numeričke vrijednosti (slike 1 i 2). U stupcu 2, zapravo je riječ o upisu dinamičnoga teksta. Potrebno je upisati tekst u ćeliju, a zatim u kartici svojstva uključiti *Latex* opciju (slika 3). Važno je ćeliju A2 unijeti kao GeoGebrin objekt u zapis iz padajućeg izbornika Objekti. Ćelije koje slijede u tom stupcu tada se dobiju jednostavnim razvlačenjem po stupcu. Numeričku vrijednost dobije se upisom naredbe **(1 + 1/A2)^A2** u ćeliju C2, pa razvlačenjem po stupcu. Kako brojeve prvog stupca povećavamo tako u trećem stupcu dobivamo vrijednosti koje su sve bliže i bliže broju *e*. Zanimljivo je da u Geogebrinom prozoru za simboličko računanje možemo dobiti i po volji mnogo znamenaka broja *e*. Naredba **Aproksimacija(*e*, 200)** daje nam prvih dvjesto znamenaka broja *e*:

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$Vrijednost$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	2.7048138294
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$	2.7169239322
10000	$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}$	2.7181459268
100000	$\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000}$	2.7182682372
1000000	$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$	2.7182804691

A koliko je e^π?

Potenciju e^3 dalo bi se izračunati barem aproksimativno $2.718... \cdot 2.718... \cdot 2.718...$, ali kako odrediti broj e^π kada je eksponent beskonačan decimalni broj? Znamo da je $e^\pi = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\pi$, odnosno $e^\pi = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\pi}$. Proširimo li razlomak s brojem π, tada vrijedi: $e^\pi = \left(1+\frac{\pi}{n\pi}\right)^{n\pi}$. Nazivnik razlomka i eksponent teže u beskonačnost povećavamo li *n*. Možemo čak zamijeniti izraz *nπ* s parametrom *m*, koji će također postajati sve veći kako n postaje sve veći. Izraz bi izgledao ovako: $\left(1+\frac{\pi}{m}\right)^m$. Ako umjesto broja π umetnemo neku drugu vrijednost recimo varijablu *x*, lijeva nam je strana eksponencijalna funkcija e^x, a desna postaje funkcija $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. Prikažimo obje funkcije u koordinatnom sustavu i mijenjajmo parametar *m* (slika 4). Vidimo da svi ti grafovi se približavaju grafu funkcije e^x. To nam omogućuje da s izvjesnom aproksimacijom i grafički možemo odrediti vrijednost potencije e^π.



Imaginarana jedinica

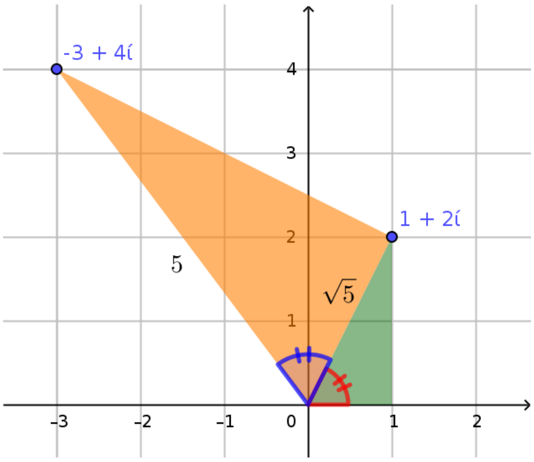
Broj *i* je kompleksni broj za koji vrijedi $i^2 = -1$. Koliko je $e^{i\pi}$, odnosno kojem broju teži $\left(1+\frac{\pi i}{m}\right)^m = \left(1+i\frac{\pi}{m}\right)^m$?

Jednostavno možemo upisati takav izraz u traku za unos programa Geogebra uz prethodno definiranje klizača *m*. Za *m* = 100, to je kompleksni broj $-1.0506 + 0.0011i$. Možemo naslutiti da se vrijednost približava broju -1.

Napravimo to geometrijski jer je puno zornije i elegantnije.

Geometrijski prikaz niza potencija kompleksnog broja

GeoGebra prikazuje kompleksne brojeve kao točke ravnine. Upišemo tako recimo broj 1+2i. Uočit ćemo da je njegova udaljenost od ishodišta $\sqrt{5}$. Možemo izmjeriti ili izračunati i kut koji ta spojnica zatvara s pozitivnim dijelom osi *x*. Kvadriramo li taj broj algebarski dobit ćemo broj -3+4i. U koordinatnom sustavu možemo uočiti da je udaljenost tog broja od ishodišta 5, odnosno kvadrat udaljenosti broja koji smo kvadrirali, a kut koji zatvara s osi je dvostruko veći. Kubiranje će pak povećati udaljenost na kub, a kut utrostručiti.



Točke se mogu u GeoGebri zadavati pomoću udaljenosti od ishodišta i kuta koji zatvara s pozitivnim dijelom osi *x*. Tako izražene koordinate zovu polarne koordinate i pišu na način da ih u uređenom paru odvajamo točka zarezom (r; φ). U nizu točaka $\left(1+i\frac{\pi}{m}\right)^m$ prva je u pravokutnim koordinatama (1, π). Neka je njezina udaljenost od ishodišta r, a kut koji zatvara s apscisom φ. To u GeoGebri, naredbama **Duljina( ) i Kut( )** možete dobiti ili izmjeriti odgovarajućim alatima alatne trake. Ako je udaljenost te prve toče od ishodišta *r*, a kut koji zatvara s osi *x* jednak φ, *t*ada niz točaka možemo dobiti naredbom: **Niz((r^k; k φ), k, 1, m)**. Što više povećavamo broj vrijednost klizača *m* niz će točaka konvergirati broju -1, odnosno vrijedi $e^{i\pi}=-1$.

Gotova stranica s interaktivnim GeoGebrinim uratkom nalazi se na adresi https://www.geogebra.org/m/V8GnqKuw ali preporučujem da sami pokušate izraditi.