



## Club GeoGebra Iberoamericano

2

## GEOMETRÍA A TRAVÉS DE GEOGEBRA

## 2. GEOMETRÍA A TRAVÉS DE GEOGEBRA

### Introducción

En el tema anterior proponíamos algunas construcciones que han servido para conocer la forma de trabajo de GeoGebra, utilizando algunas de las herramientas disponibles para trazar segmentos, rectas, circunferencias y polígonos, a partir de puntos creados como objetos básicos en el plano.

También ha quedado expuesto el significado de geometría dinámica que no queda reducido al movimiento de los objetos que intervienen en la construcción, lo más importante de este concepto es que al mover los objetos se mantienen, siempre que estén bien definidas, las relaciones existentes entre ellos.

Este segundo tema lo dedicamos a nuevas construcciones geométricas con GeoGebra que permitirán conocer nuevas herramientas y por tanto, nuevas posibilidades que este programa ofrece.

No tenemos que olvidar que se trata de un curso de iniciación, por lo que no se trata de hacer un repaso una por una, de todas las herramientas y comandos disponibles que, evidentemente, tienen que ser objeto de un curso de mayor duración.

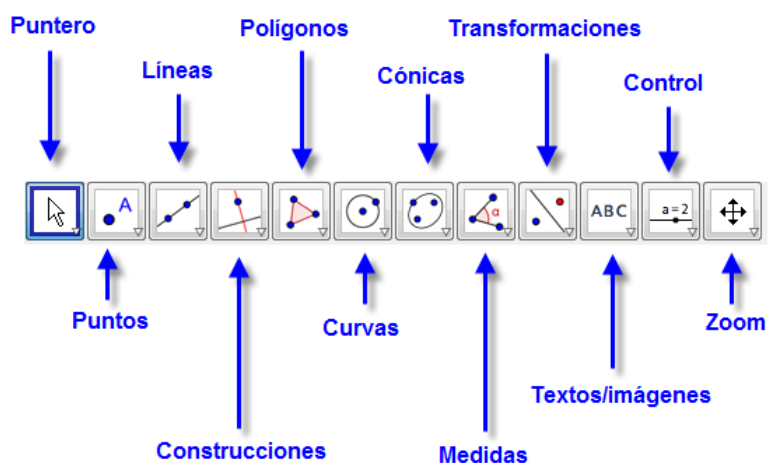
El objetivo de esta actividad y por tanto, de este material, es ofrecer una visión general de las cosas que se pueden hacer con GeoGebra y sobre todo, de cómo realizarlas.

### Construcciones con GeoGebra

Con *GeoGebra* cualquier construcción se realiza de manera análoga a como se haría utilizando herramientas tradicionales como son la regla y el compás o con papel y lápiz.

Por ejemplo, como hemos expuesto en el tema anterior, un triángulo se construye a partir de sus tres vértices, una recta se dibujará a partir de un punto y una dirección o a partir de dos puntos; en general, es recomendable pensar cómo se realizaría con papel antes de utilizar las herramientas disponibles en *GeoGebra*.

Las distintas herramientas de GeoGebra están agrupadas por bloques, de las que ya conocemos algunos que hemos utilizado el tema anterior. Los distintos bloques de herramientas aparecen representados en la imagen siguiente:




Ya conocemos algunas herramientas de los primeros bloques: puntero, puntos, líneas, construcciones, polígonos y curvas que hemos utilizado en las construcciones del tema anterior.

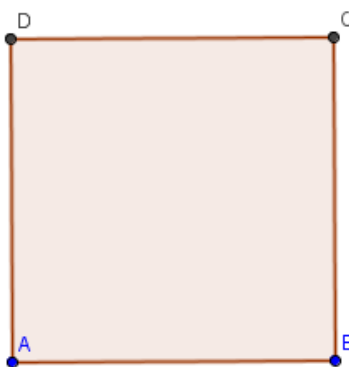
Comencemos las construcciones con un ejemplo similar a una de las actividades propuestas en el tema anterior.

### Ejemplo 1

*En un cuadrado ABCD, traza la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita.*

El primer paso será construir el cuadrado, para lo cual utilizaremos la herramienta **Polígono regular**  .

Una vez seleccionada, creamos dos puntos A y B, indicando a continuación que el número de lados es 4.



Ya tenemos el cuadrado ABCD sobre el que deseamos dibujar las circunferencias inscrita y circunscrita.

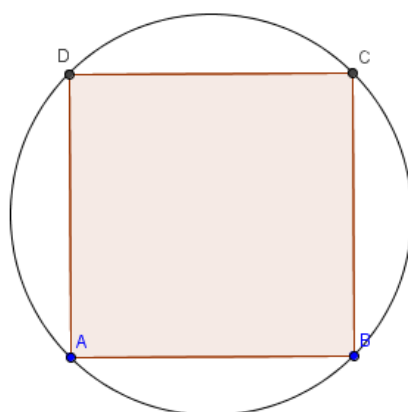
Comencemos por la circunscrita que será la circunferencia exterior que pasa por los cuatro vértices.

Al abrir el bloque de herramientas que hemos denominado **Curvas**, observamos que aparece una herramienta para trazar la circunferencia que pasa por tres puntos.

 **Circunferencia por tres puntos**

Podemos utilizar esta herramienta para dibujar la circunferencia circunscrita ya que si pasa por tres vértices, también pasará por el cuarto.

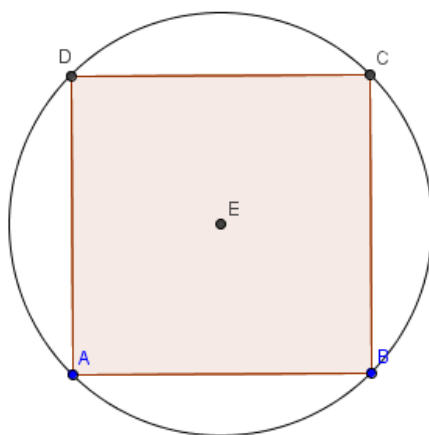
Podemos comprobarlo marcando tres vértices una vez seleccionada esta herramienta. Obtendremos la imagen siguiente en la que aparece la circunferencia circunscrita al cuadrado.



Para trazar la circunferencia inscrita, tenemos que pensar cuáles son sus características.

El centro será el punto de corte de las diagonales que es también el punto medio de la diagonal.

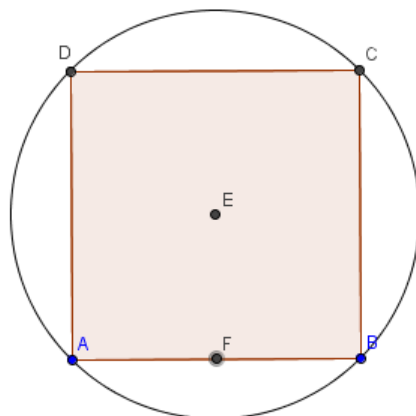
Por tanto, utilizamos la herramienta **Punto medio o Centro** para obtener dicho punto. Seleccionamos la herramienta y pulsamos sobre dos vértices opuestos.



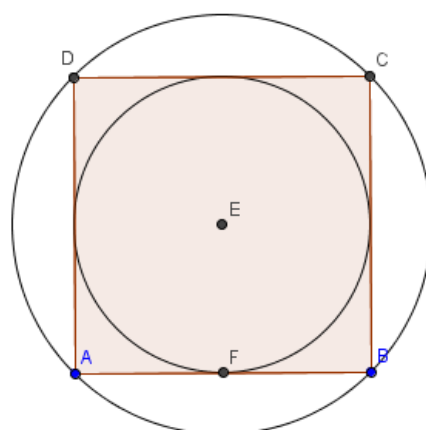
Observemos que para obtener el punto E no ha sido necesario dibujar el segmento.

Ya solo nos queda determinar un punto de la circunferencia inscrita, de la que sabemos que será tangente al cuadrado en los puntos medios de cada


lado; por lo que utilizando la misma herramienta anterior, obtenemos el punto medio de cualquier lado.

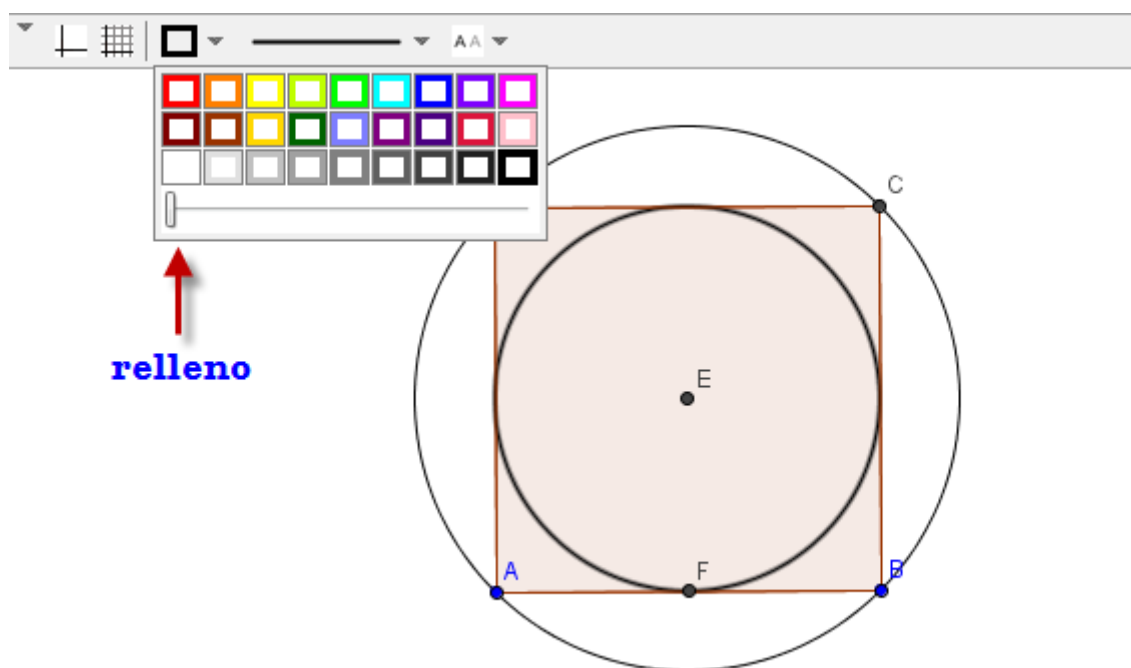
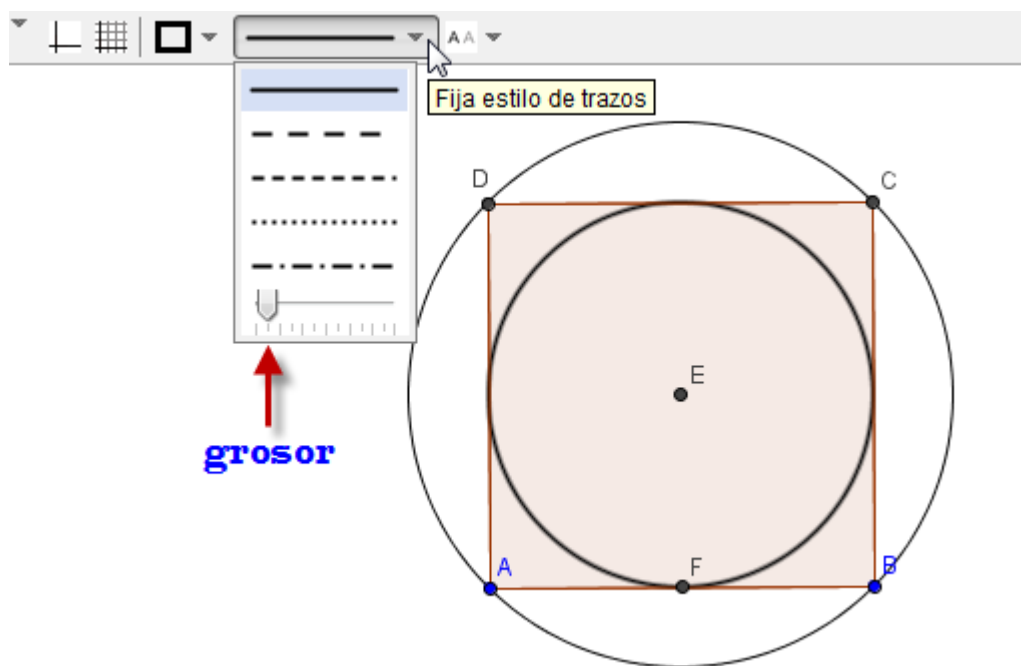


Ya solo queda seleccionar la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** para dibujar la circunferencia que tiene centro en E y pasa por F.

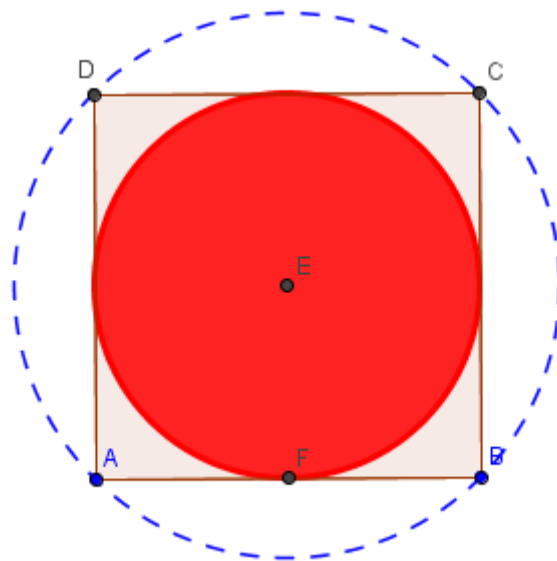


Una vez obtenidas las dos circunferencias, podemos cambiar su aspecto modificando el color, grosor, trazado o relleno.

Una vez seleccionada la circunferencia, utilizando la herramienta **Elige y Mueve**  , aparecerá en la barra superior de la vista gráficas las opciones para cambiar el color y el relleno, así como las opciones para modificar el estilo del trazado y el grosor.



Animamos a cambiar el aspecto seleccionando o cambiando las opciones anteriores.

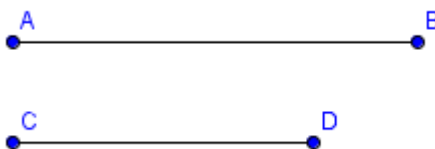


Para exponer alguna herramienta más de las que hay disponibles en GeoGebra, proponemos otros ejemplos de construcción de distintos polígonos.

## Ejemplo 2

*A partir de dos segmentos, construye el rectángulo cuyos lados corresponden a los dos segmentos dados.*

Comenzamos dibujando los dos segmentos AB y CD, utilizando para ello la herramienta **Segmento**.



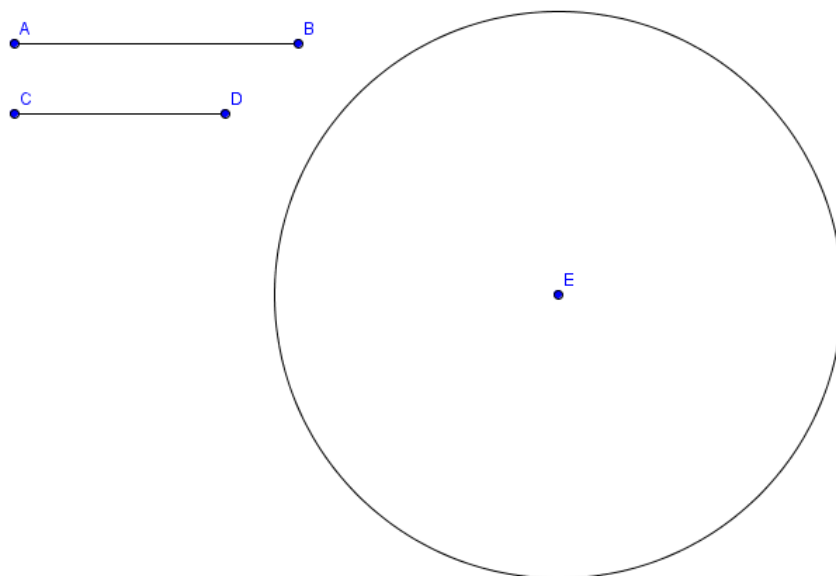
En el siguiente paso, tenemos que utilizar la medida de estos segmentos para construir el rectángulo.

Para ello, utilizaremos la herramienta **Compás**



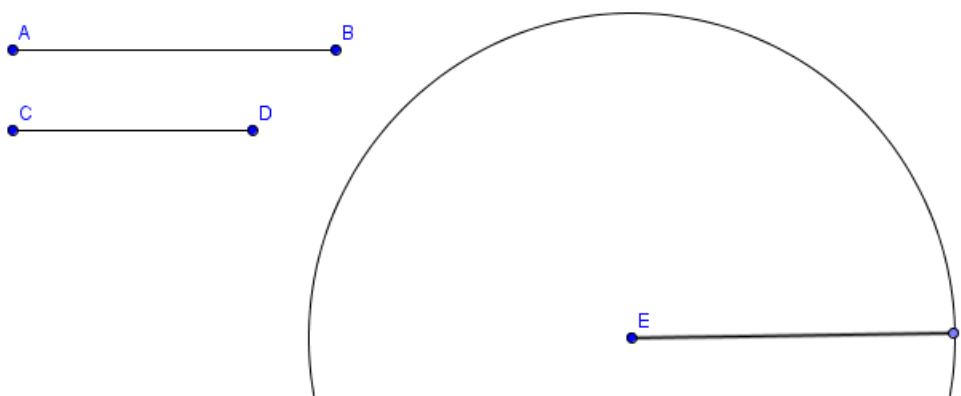
Su funcionamiento es similar al de un compás real. Haremos clic sobre el primer segmento y a continuación, volvemos a hacer clic en cualquier posición libre de la pantalla.


Aparecerá un nuevo punto y una circunferencia cuyo radio es la medida del segmento que previamente hemos elegido.

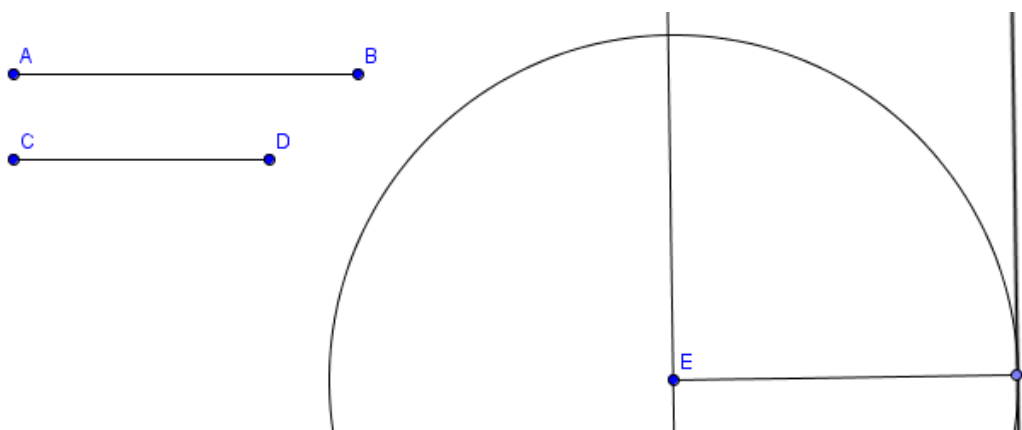


También, una vez marcado el segmento se podría pulsar sobre un punto ya existente en la vista gráfica.

Ya tenemos la medida del primer lado que da la circunferencia, por lo que bastará con crear un punto en la circunferencia, dibujando a continuación el radio correspondiente.

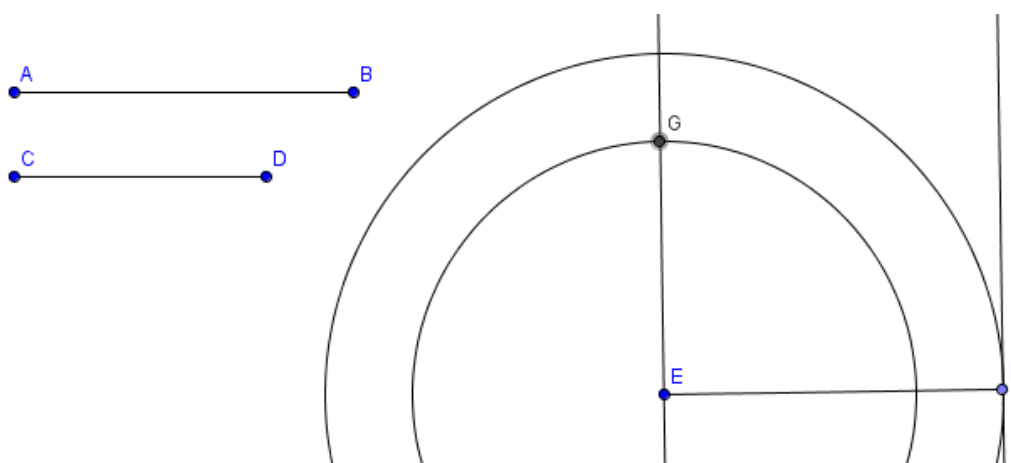


A continuación, trazamos una perpendicular al segmento EF por cada uno de los extremos, utilizando la herramienta **Recta perpendicular** .



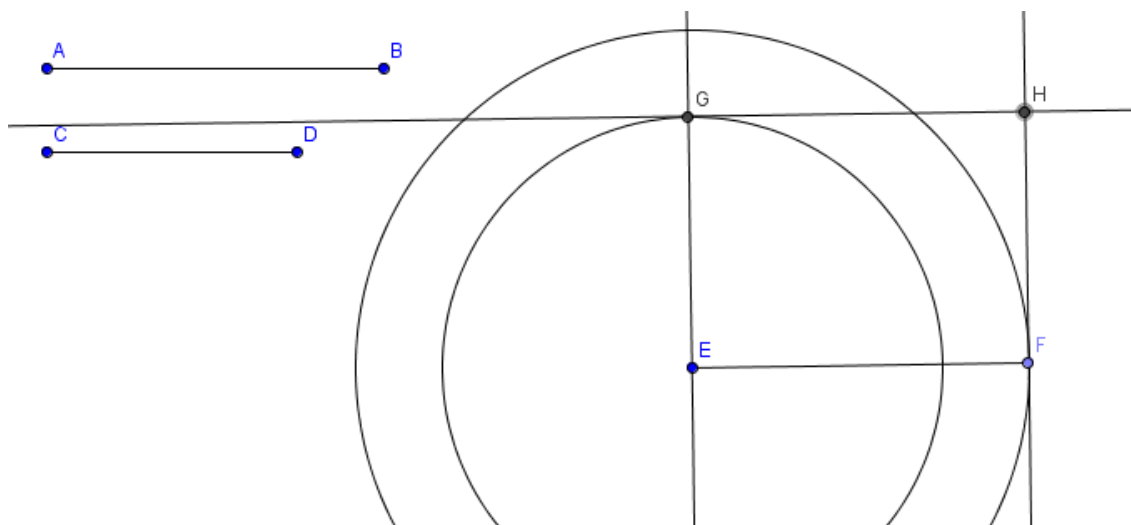
Utilizando de nuevo la herramienta **Compás**, llevamos la medida del segundo segmento a cualquiera de las perpendiculares que acabamos de trazar.

Seleccionamos **Compás**, marcamos el segundo segmento, pulsando a continuación sobre el punto E. Obtendremos una nueva circunferencia cuya intersección con la perpendicular por E, dará la medida del segundo segmento.



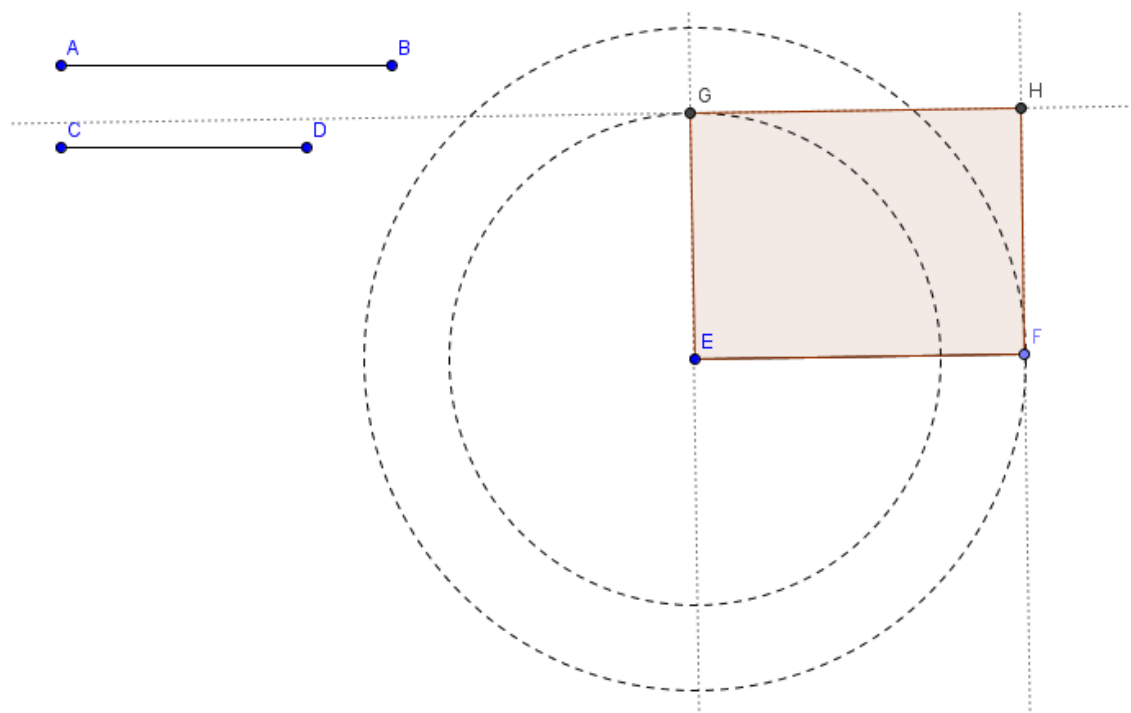
Para obtener cuarto vértice podemos repetir el proceso anterior, llevando de nuevo la medida del segmento, en este caso sobre el punto F; también

podemos trazar la paralela al segmento EF por el punto G, para encontrar el punto de intersección que corresponde al cuarto vértice del rectángulo.



Por último, solo queda marcar el rectángulo, seleccionando para ello la herramienta **Polígono**, pulsando sobre los cuatro vértices.

Una vez modificado el aspecto de los objetos utilizados, la construcción quedará en la forma siguiente:




Al arrastrar los objetos iniciales, en este caso, los puntos A, B, C o D, cambiará la medida de los lados y por tanto, el rectángulo final también debe modificarse para tomar los nuevos valores.

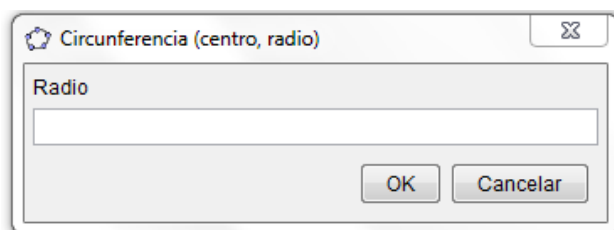
### Ejemplo 3

*Construye un paralelogramo cuyos lados midan 2,5 y 4 cm.*

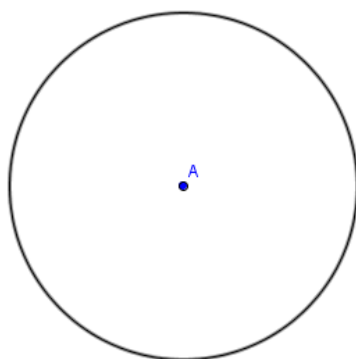
La construcción es similar al ejemplo anterior, aunque en este caso los datos corresponden a los valores de los lados.

Podemos dibujar circunferencias cuyos radios coincidan con los valores anteriores utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, radio)** .

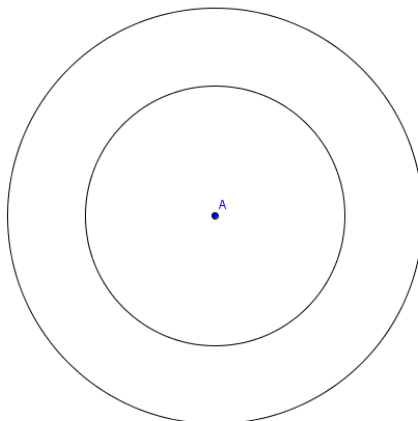
Una vez seleccionada esta herramienta, al pulsar sobre una zona libre de la vista gráfica o sobre un punto ya creado, aparecerá la siguiente ventana para introducir la medida del radio.



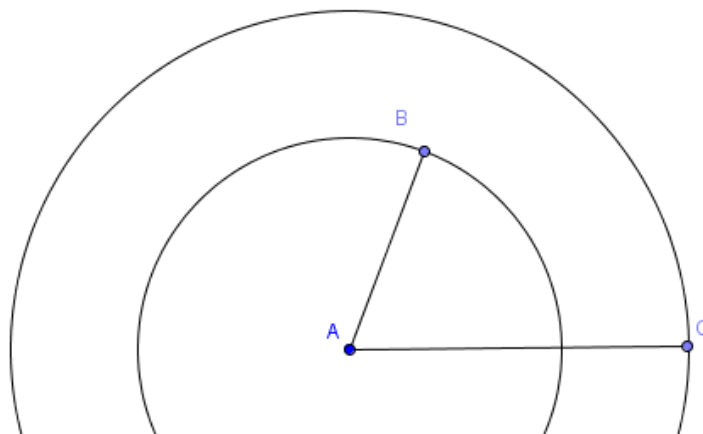
Escribimos 2.5 y pulsamos **Ok**. Aparecerá una circunferencia cuyo radio es el valor anterior.



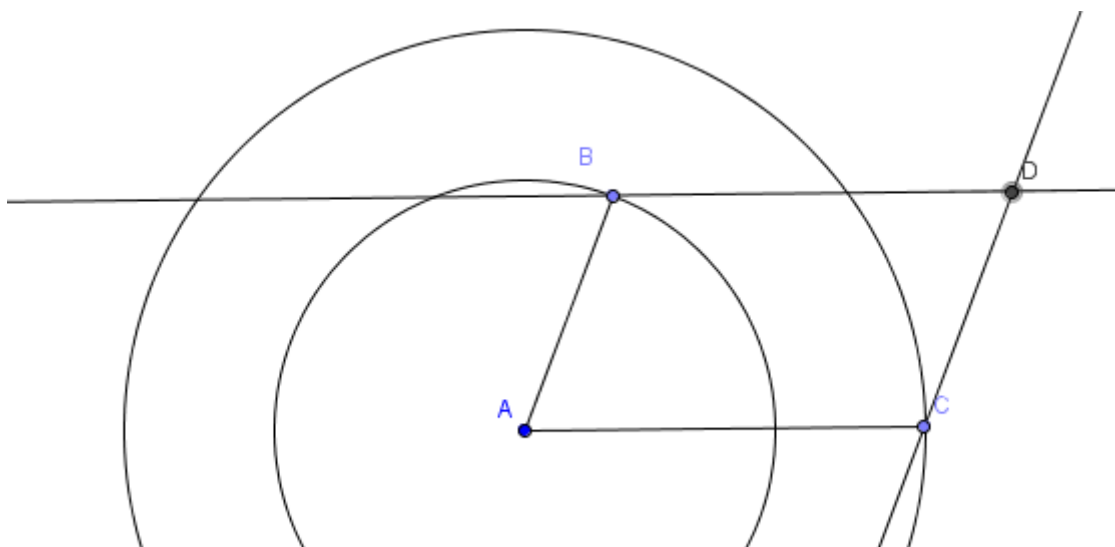
Repetimos el proceso para el segundo valor.



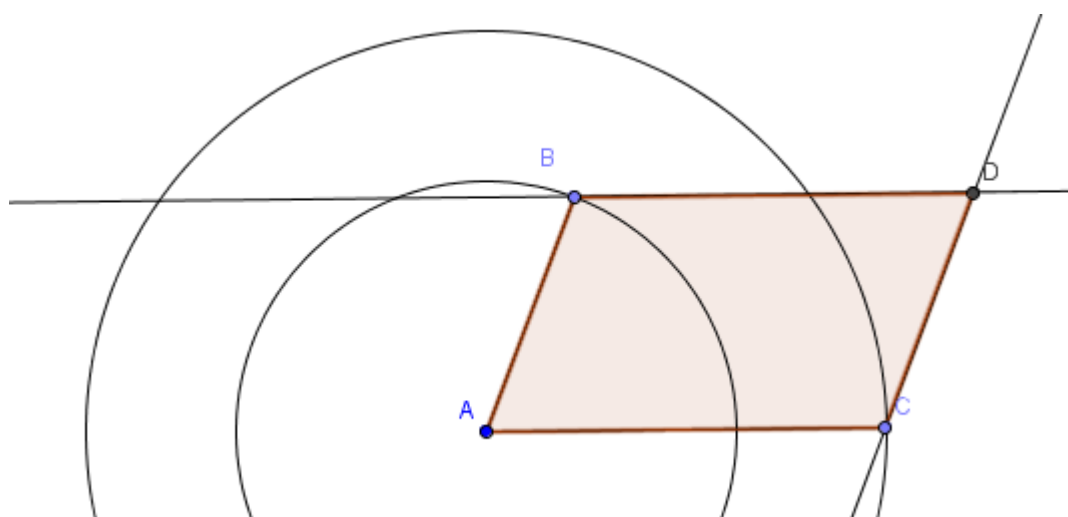
Dibujamos un radio en cada una de las circunferencias utilizando la herramienta **Segmento**.



Ya tenemos dos lados del paralelogramo, por lo que solo nos queda trazar paralelas para obtener el cuarto vértice.



El último paso, será dibujar el paralelogramo utilizando la herramienta **Polígono**.



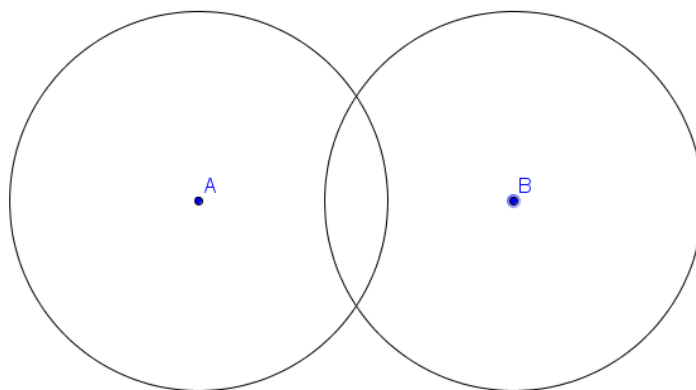
Al mover B o C obtendremos nuevos paralelogramos cuyos lados coinciden con los valores iniciales.

#### Ejemplo 4

*Construye un rombo.*

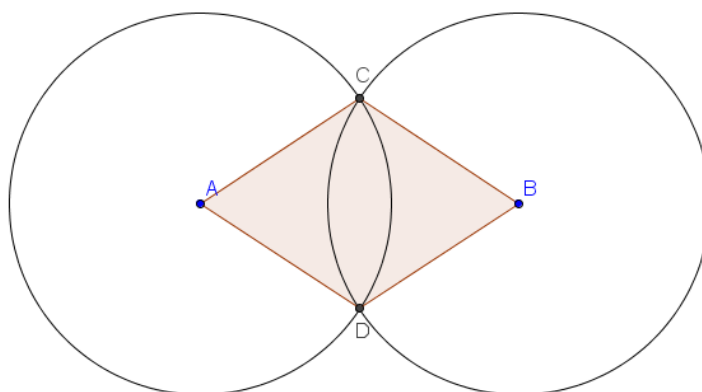
Para obtener un rombo bastará con dibujar dos circunferencias de igual radio que sean secantes.

Para dibujar una circunferencia para un radio concreto disponemos de la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**.



Con la herramienta **Intersección**, obtendremos los puntos C y D, de corte de las dos circunferencias.

Dibujamos el polígono ACBD que será un rombo.



¿Qué polígono obtendrás cuando las dos circunferencias secantes son de radios distintos?


De manera similar se podrá construir cualquier polígono, utilizando en cada caso las herramientas adecuadas a las condiciones o datos disponibles.

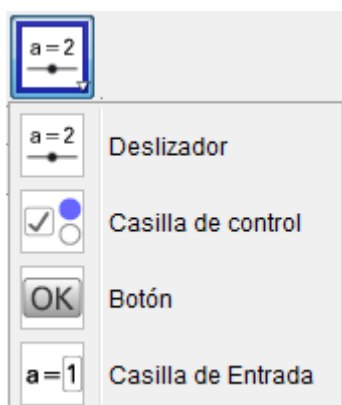
## Deslizadores

Podemos decir que un deslizador es una variable que toma distintos valores que se podrá incluir en una construcción, de manera que al variar su valor, las condiciones cambian y por tanto, el resto de objetos se actualizan a los nuevos valores.

Supongamos que deseamos construir un cuadrado cuyo lado sea variable, por ejemplo, que tome valores de 1 a 5 cm, con incrementos de 0,5 cm.

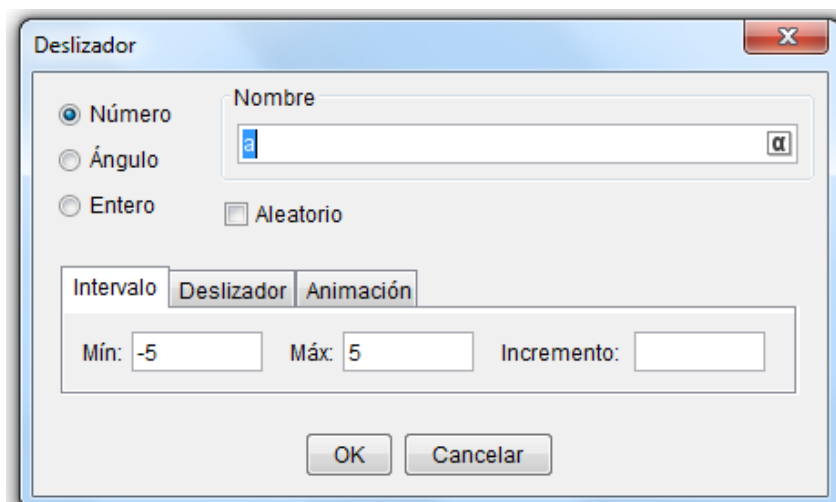
En este caso, la medida del lado será variable, por lo que necesitamos una herramienta que nos facilite estos cambios de medida.

Esto se consigue con ayuda de la herramienta **Deslizador**  que se encuentra en el bloque de herramientas que hemos denominado **Control**.



Una vez seleccionada esta herramienta, al pulsar en la vista gráfica, aparecerá el cuadro de diálogo siguiente:

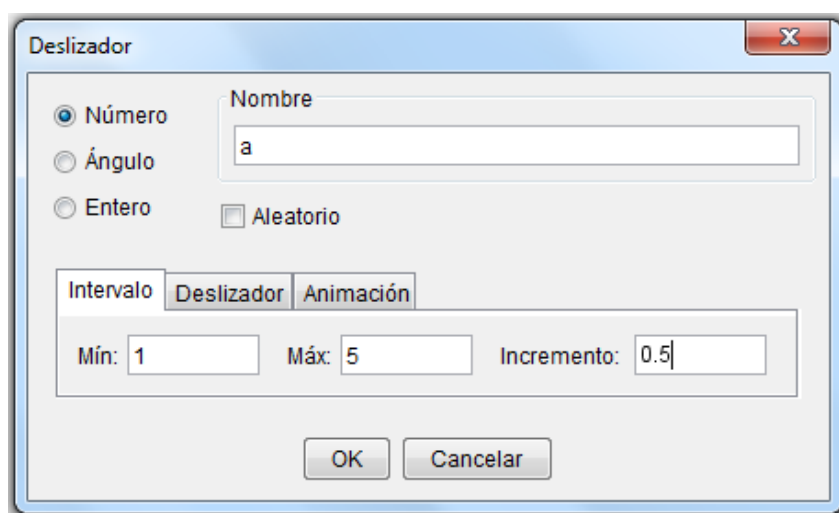




Podemos observar que hay varios tipos de deslizadores: *número*, *ángulo* o *entero*, y que cada deslizador, al igual que todos los objetos en GeoGebra, tendrá un nombre; en este caso, por defecto es a.

Además, tendrá unos valores asignados: valor inicial (*Mín.*), valor final (*Máx.*) y un *incremento*.

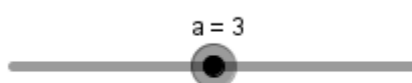
Podemos dejar el tipo y el nombre, aunque necesitamos modificar los valores para ajustarlo al objetivo que nos hemos planteado. En nuestro caso, el valor mínimo será 1, el máximo es 5 y el incremento será de 0.5.



Al pulsar el botón **OK**, aparecerá lo siguiente en la vista gráfica.

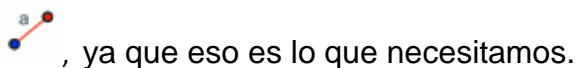


Podemos comprobar que ocurre al desplazar el punto que aparece en el deslizador; observaremos que cambia de valor, pasando por 1.5, 2, 2.5,..., 5, que corresponden a los valores e incremento indicados.

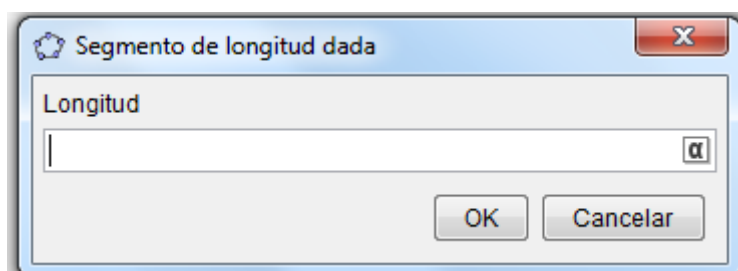


Ya hemos conseguido la variable correspondiente al lado, por lo que el siguiente paso será construirlo.

El lado es un segmento, por lo que utilizaremos la herramienta segmento, aunque en esta ocasión recurrimos a **Segmento de longitud dada**

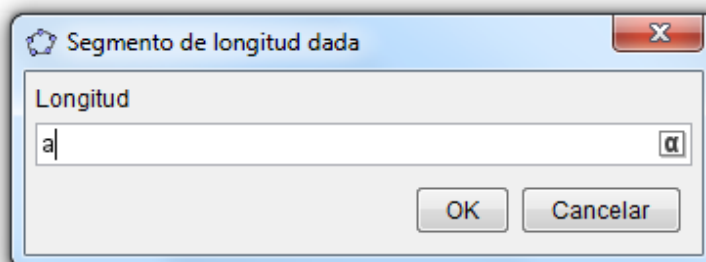
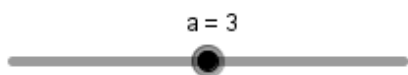


Una vez seleccionada esta herramienta, haremos clic en cualquier parte de la vista gráfica, aparecerá el cuadro de diálogo siguiente:

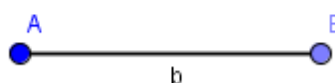
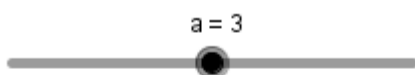


Tenemos que introducir el valor del lado que en nuestro caso corresponde al valor que tenga el deslizador.

Para que el lado vaya cambiando al variar el valor del deslizador, es necesario escribir el nombre del deslizador; en este caso a.



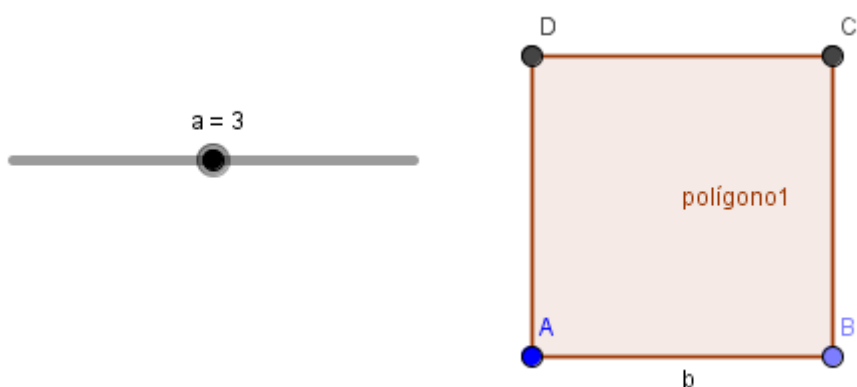
Al pulsar el botón **OK** aparecerá el segmento cuya medida coincide con el valor que en ese momento tenga el deslizador.



Podemos comprobar que al variar el valor del deslizador, el lado se ajusta al correspondiente valor.

Ya solo queda dibujar el cuadrado con ayuda de la herramienta **Polígono regular** cuyo funcionamiento ya conocemos. Seleccionamos la herramienta, marcamos A y B, indicando a continuación 4 como número de lados.

Aparecerá el cuadrado cuyo lado cambiará al mover el modificar el valor del deslizador.



Continuamos con nuevos ejemplos que permitan conocer un poco más de GeoGebra.

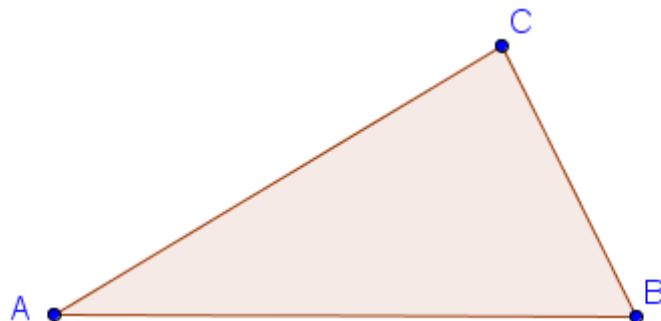
### Ejemplo 5

*Sea ABC un triángulo cualquiera.*

*Construye un nuevo triángulo rectángulo cuya área sea igual a la del triángulo ABC.*

*Construye un nuevo triángulo isósceles que tenga igual área que el triángulo inicial.*

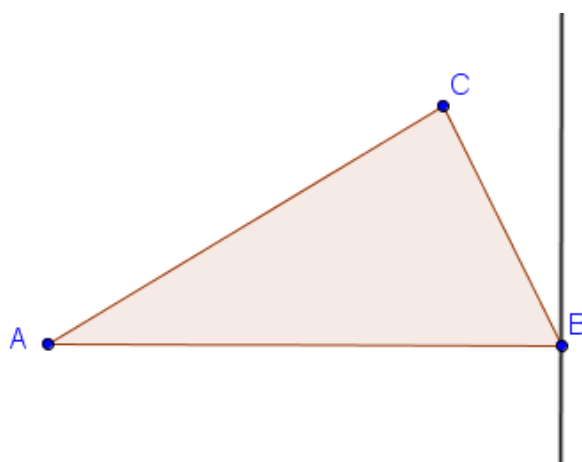
Utilizando la herramienta **Polígono** dibujamos el triángulo ABC.



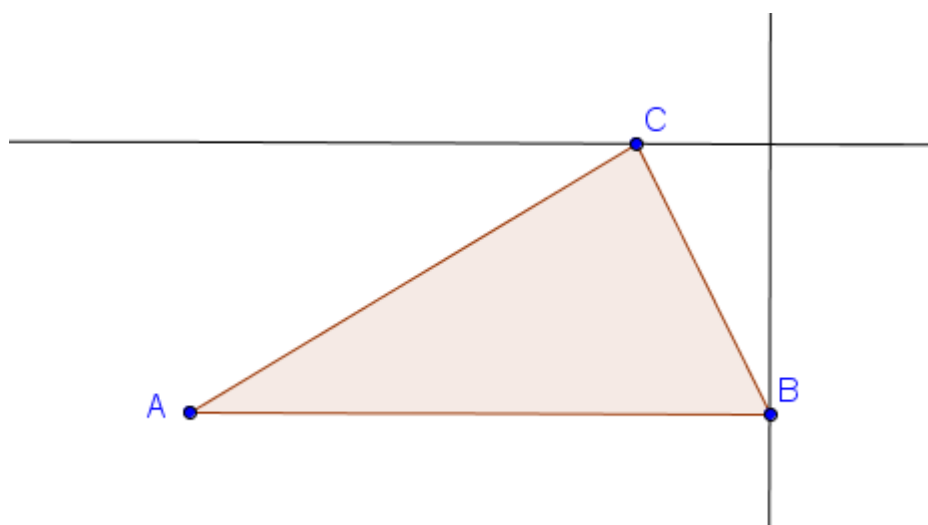
Dos triángulos que tengan la misma base y la misma altura tendrán igual área. Por tanto, podemos mantener AB como base de los nuevos triángulos, por lo que solo nos queda determinar la misma altura y lograr que los triángulos sean del tipo pedido.

Como el primer triángulo tiene que ser rectángulo, tendrá un ángulo recto que conseguiremos trazando la perpendicular a la base por cualquiera de sus vértices o extremos.

Para obtenerla, seleccionamos la herramienta **Recta perpendicular**, pulsando a continuación, sobre la base y el punto B.

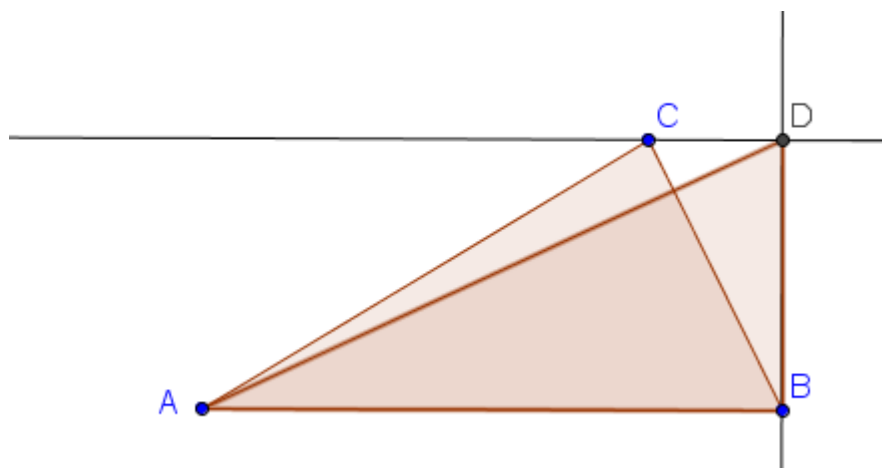


Necesitamos encontrar el tercer vértice del nuevo triángulo de manera que la altura sea la misma que la del triángulo inicial. Dibujamos la recta paralela a la base por el vértice C.

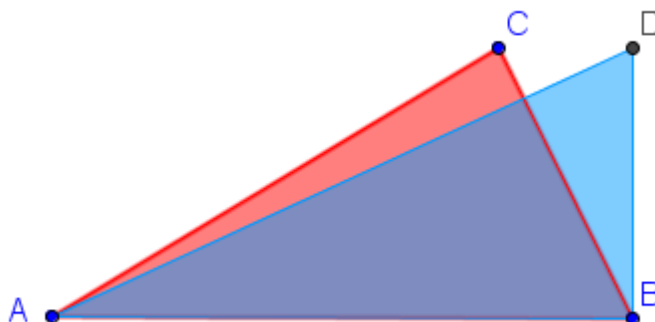


El punto de intersección de estas dos rectas será el vértice del triángulo rectángulo que obtendremos con la herramienta **Intersección**.

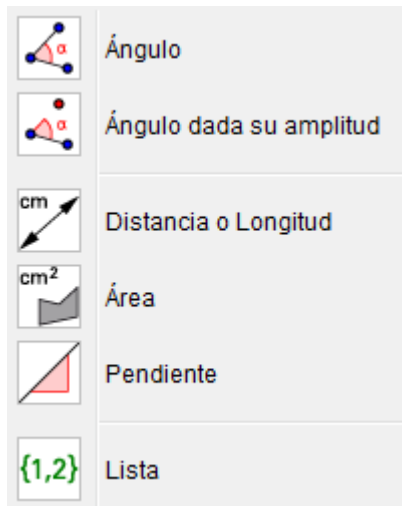
Ya solo queda dibujar el nuevo triángulo con ayuda de la herramienta **Polígono**.



Antes de comprobar que los dos triángulos tiene la misma área, ocultamos las rectas que hemos trazado y cambiamos el aspecto de los triángulos.

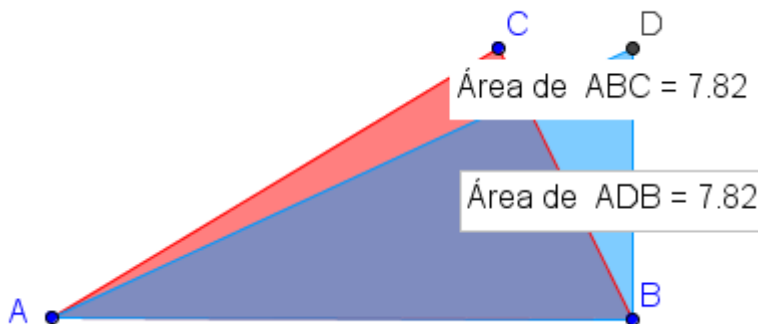


GeoGebra dispone de las herramientas necesarias para realizar medidas, como es el caso del área. Estas herramientas las encontraremos en el bloque **Medidas**.



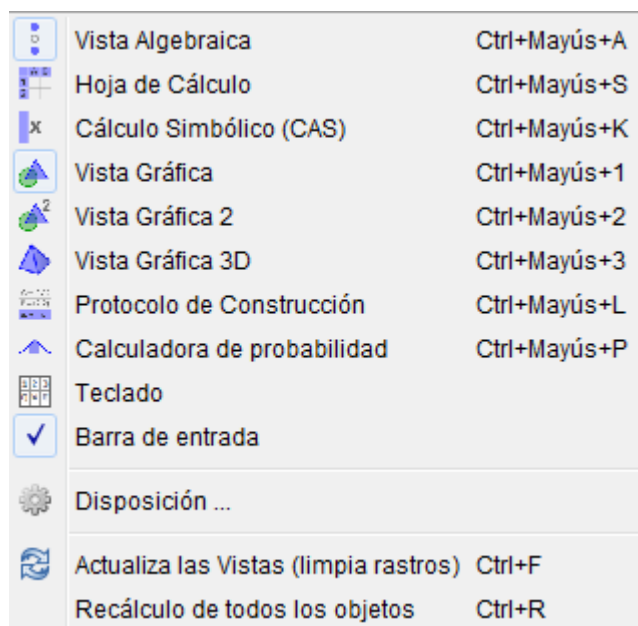
Seleccionamos la herramienta **Área** <sup>cm<sup>2</sup></sup>, pulsando a continuación sobre cada uno de los triángulos.

Aparecerán las medidas de las áreas que como era de esperar, coinciden.

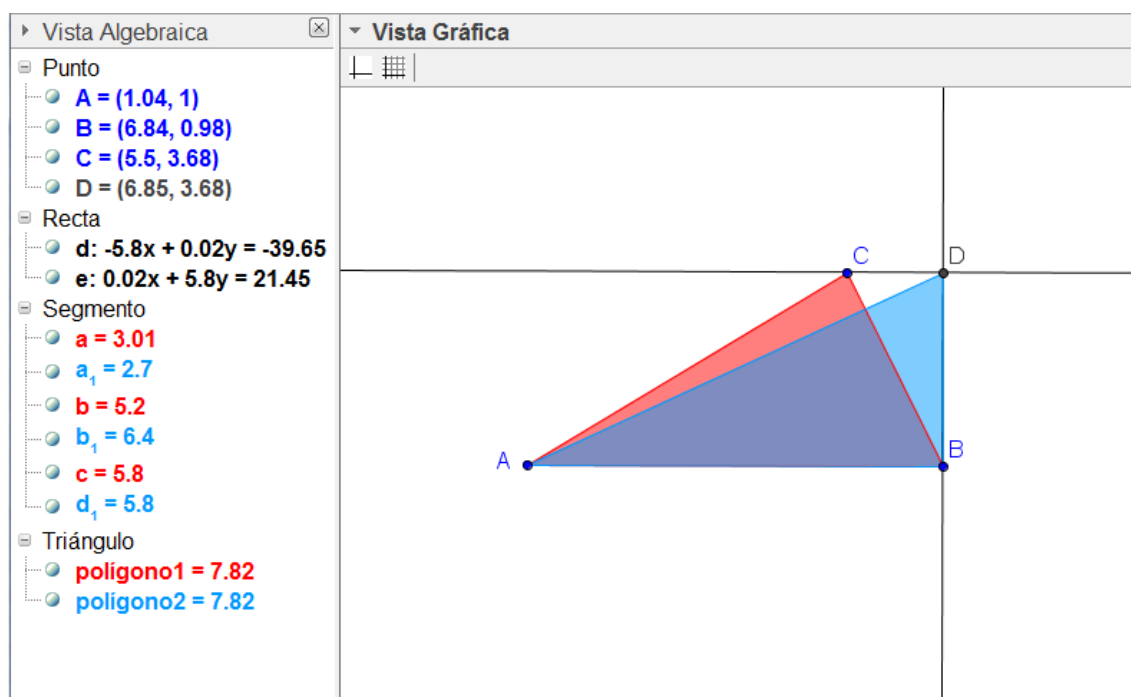


Para obtener la medida del área del triángulo ABC es necesario pulsar en la zona de color rojo, no en la zona común.

Antes de afrontar la construcción del triángulo isósceles, exponemos la información que dará la vista algebraica que podemos activar a través de la opción correspondiente del menú **Vista**.



Al pulsar la opción **Vista algebraica** aparecerá la imagen siguiente:



Analizamos la vista algebraica en la que observamos los cuatro puntos creados, las ecuaciones de las dos rectas que hemos trazado y unos valores para segmentos y otros para triángulos.



Los valores que aparecen en el apartado segmentos corresponden a las medidas de los lados de cada uno de los triángulos que aparecen identificados por el color.

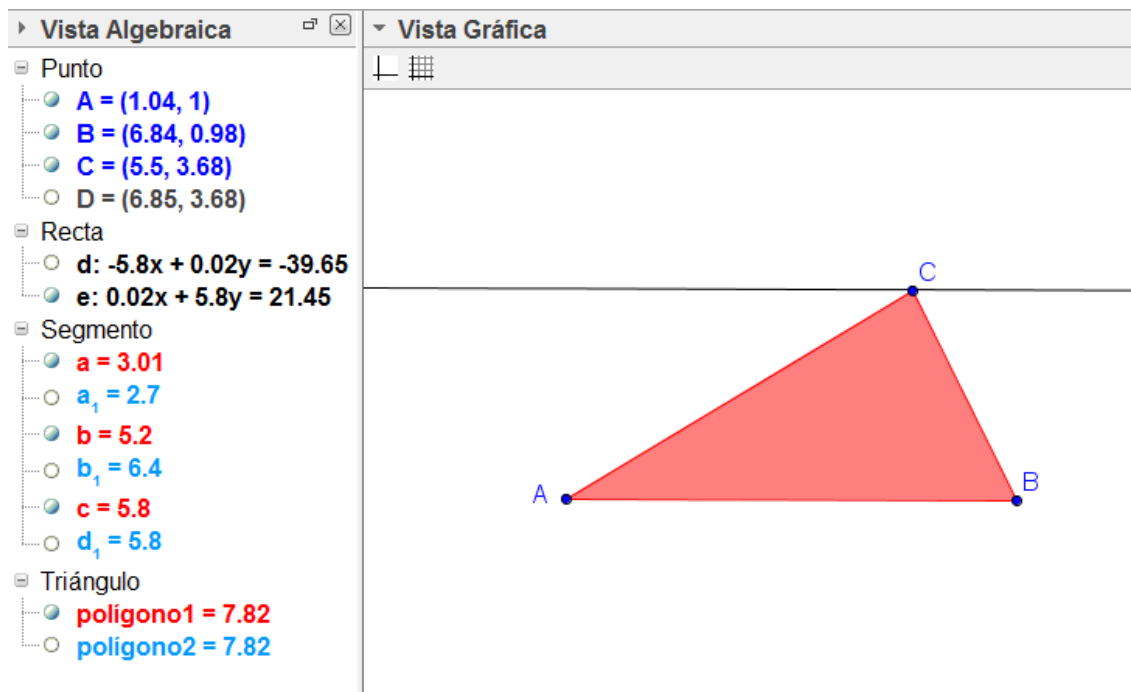
Y las medidas que aparecen como *polígono1* y *polígono2* corresponden a las medidas de las áreas de cada uno de los triángulos. Como podemos observar aparecen también diferenciadas por color.

Estos nombres son los que GeoGebra ha puesto a cada triángulo, que irá numerando siguiendo el orden en el que se han creado.

Podemos ocultar el segundo triángulo para construir un nuevo triángulo, en este caso, isósceles que tenga la misma área que el triángulo inicial.

Recordemos que podemos pulsar sobre los círculos que hay en cada objeto, en la vista algebraica para ocultarlos.

En este caso, es fácil ocultar el segundo triángulo ya que bastará con marcar los objetos que aparecen de color azul.




También, hemos ocultado el punto D y la recta perpendicular.

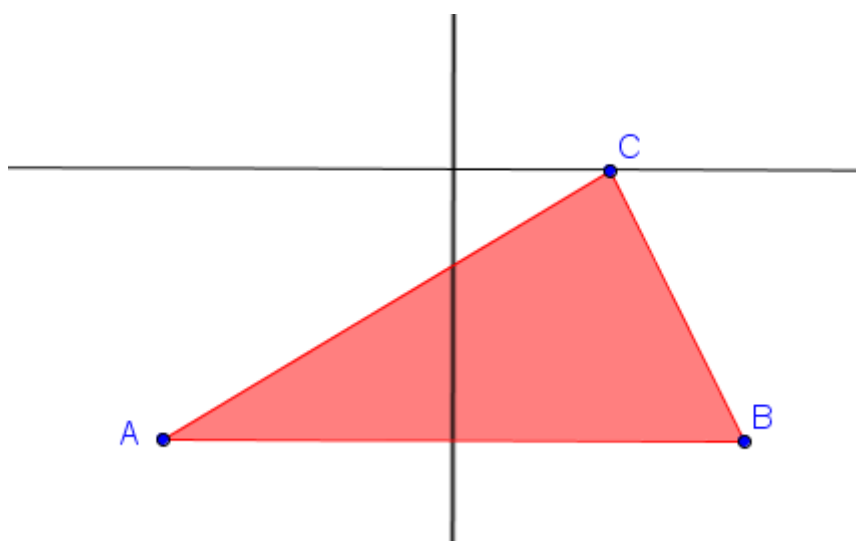
Como tenemos que obtener un triángulo isósceles con la misma área, mantenemos la base que será AB y la altura que será la que marca la paralela por C a la base.

Para el triángulo sea isósceles, el tercer vértice tendrá que encontrarse a la misma distancia de A y de B, para que los dos nuevos lados sean iguales.

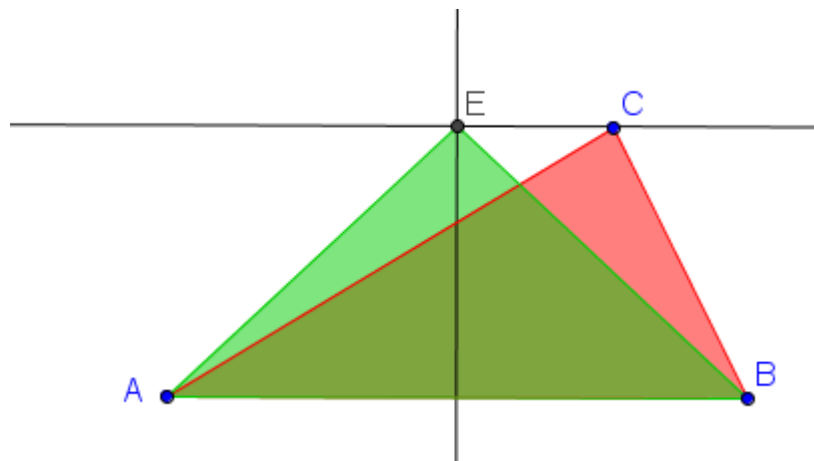
Por tanto, el tercer vértice estará en la perpendicular al lado AB trazada por el punto medio, o lo que es lo mismo, estará en la mediatriz del segmento AB.

GeoGebra dispone de la herramienta **Mediatriz**  que nos dibuja esta recta de manera directa, sin necesidad de obtener previamente el punto medio y trazar posteriormente la perpendicular.

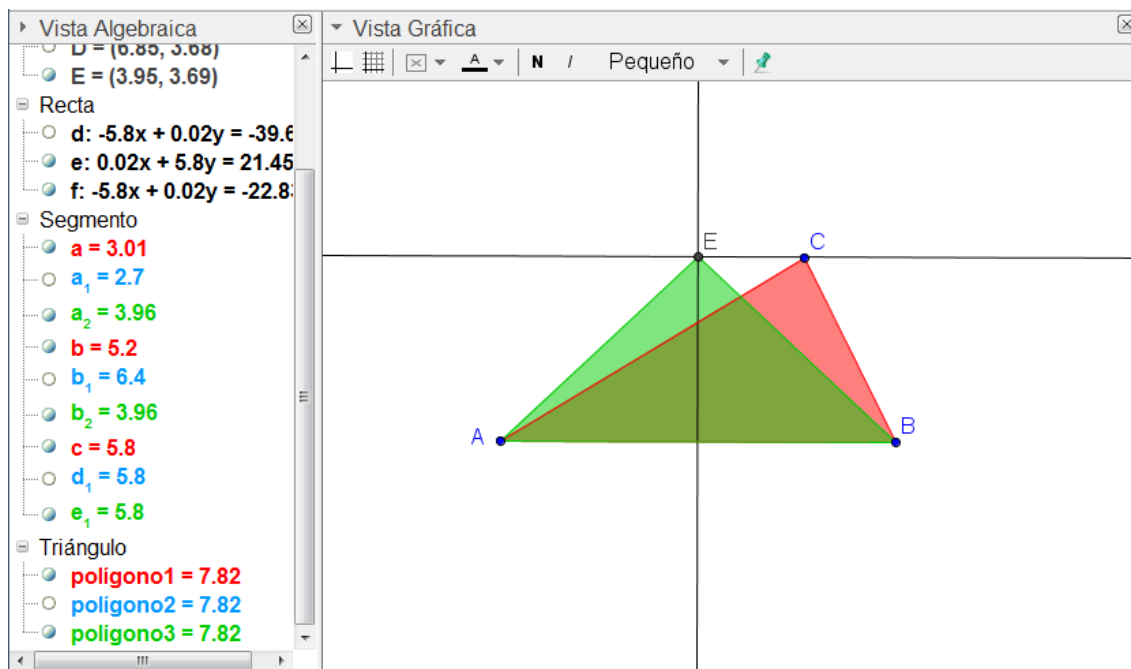
Seleccionamos la herramienta **Mediatriz**, pulsando a continuación sobre el segmento.



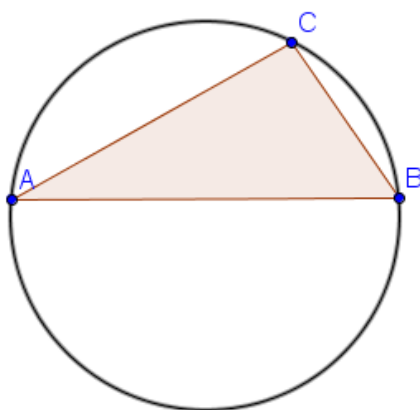
Solo nos queda encontrar la intersección entre las dos rectas que corresponderá al tercer vértice del triángulo buscado.



Podemos observar en la vista algebraica que este nuevo triángulo tiene igual área que el triángulo inicial.

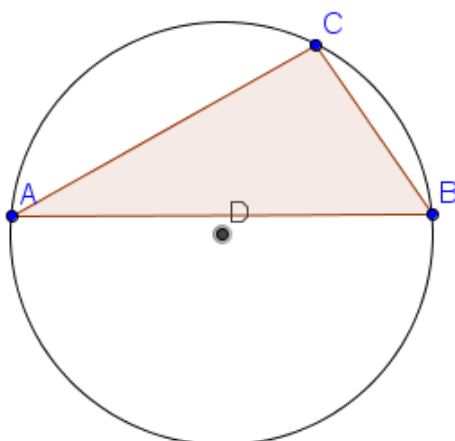


Una vez que ya conocemos el funcionamiento de la herramienta **Mediatriz** podemos realizar nuevas construcciones como es el caso de la circunferencia circunscrita a un triángulo, aunque para obtenerla bastaría con utilizar la herramienta **Circunferencia por tres puntos**.




Para obtener su centro podemos utilizar la herramienta **Punto medio o centro**.

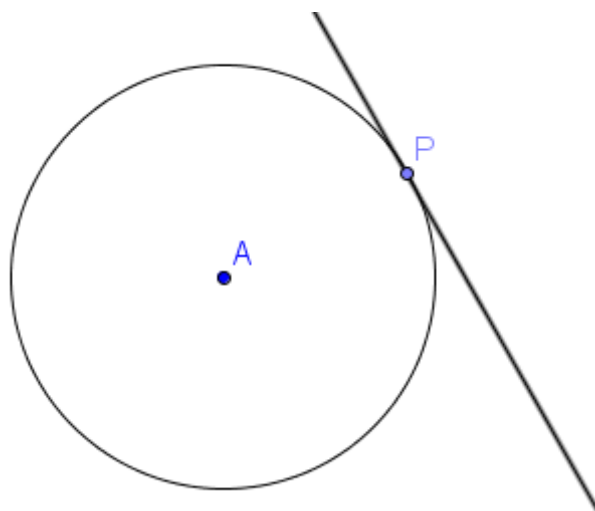
Al pulsar sobre la circunferencia aparecerá su centro que como sabemos, se denomina circuncentro del triángulo.




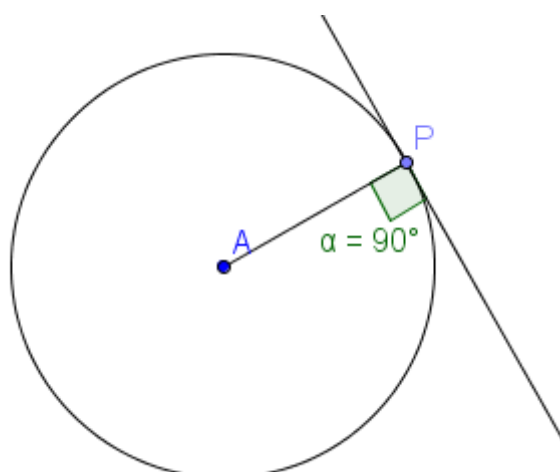
## Tangentes

GeoGebra dispone de la herramienta **Tangentes**  que facilita el trazado de la recta tangente a una curva.

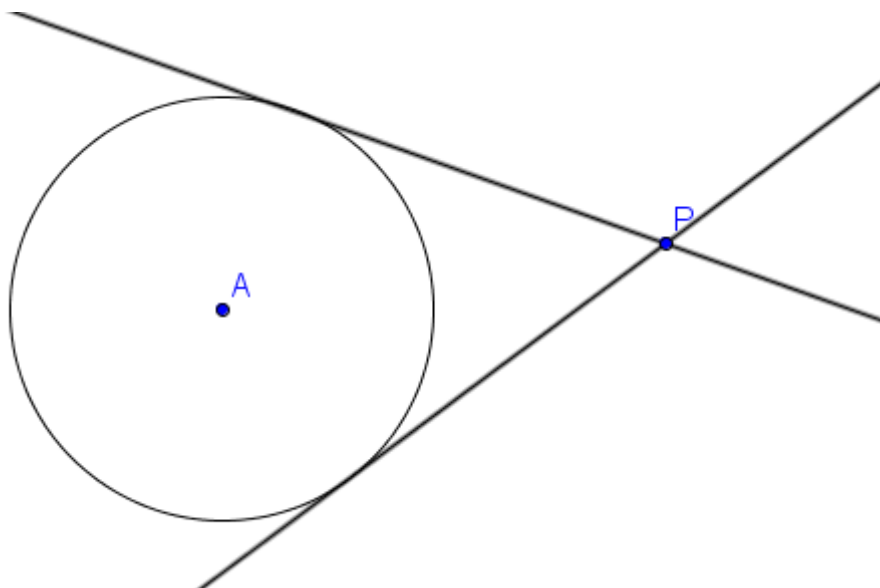
Por ejemplo, para obtener la recta tangente a una circunferencia por un punto de ella, basta con seleccionar esta herramienta, pulsando a continuación sobre la circunferencia y por último, sobre el punto (P).



La recta tangente a una circunferencia por un punto de ella forma un ángulo recto con el radio trazado sobre dicho punto, que podemos medir con ayuda de la herramienta **Ángulo** .




De manera análoga, podemos trazar las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.



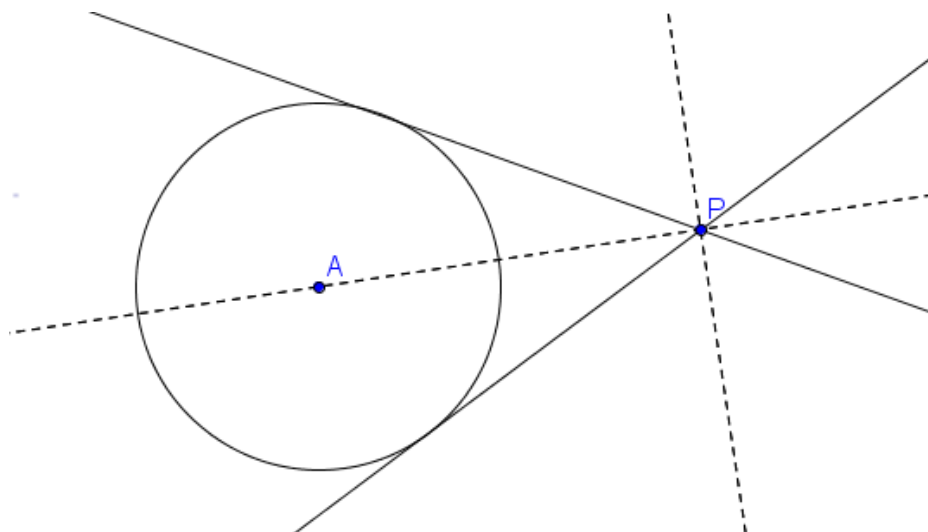
El proceso es similar ya que basta con seleccionar la herramienta **Tangentes**, pulsando a continuación sobre la circunferencia y sobre el punto P.

Podemos comprobar que la recta que une los puntos A y P es la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas tangentes.

Como era de esperar, seguro que lo habéis descubierto, GeoGebra dispone de una herramienta para obtener la bisectriz de un ángulo.

La herramienta **Bisectriz**  se encuentra en el bloque denominado **Construir**.

Una vez seleccionada, bastará con pulsar sobre las dos rectas para que aparezca dibujada.



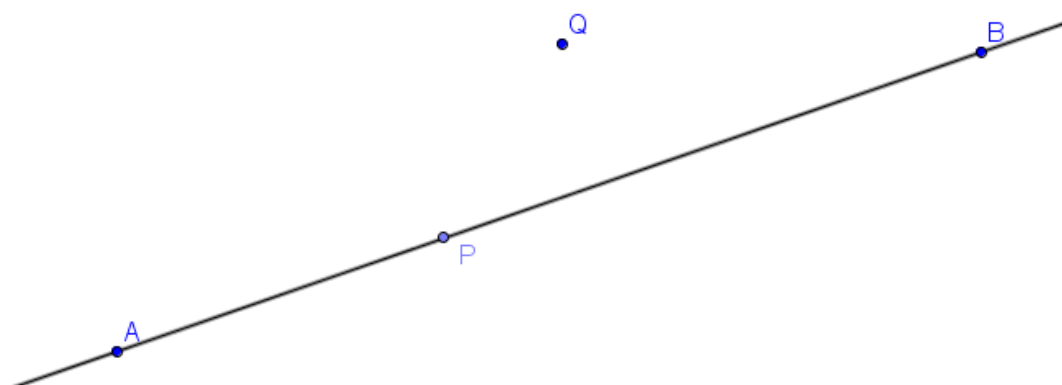
Observamos que aparecen las dos bisectrices de los dos ángulos que forman las dos rectas tangentes.

### Ejemplo 6

*Sea P un punto de una recta y Q un punto que no pertenece a la recta.*

*Dibuja la circunferencia que pasa por el punto Q y es tangente a la recta en el punto P.*

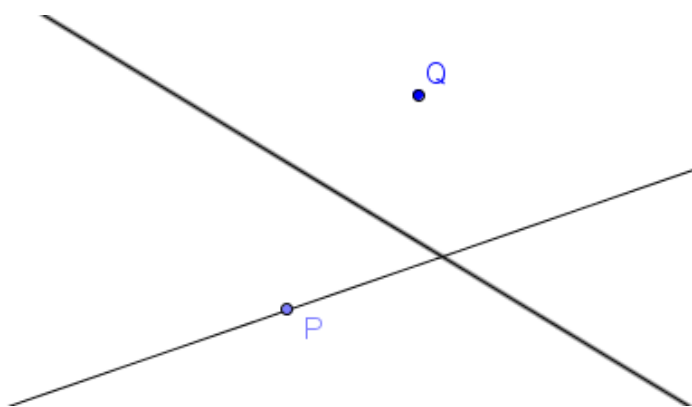
Comenzamos dibujando los objetos iniciales: una recta, un punto P en la recta que no sea ninguno de los puntos (A y B) utilizados para crearla y un punto Q que no pertenezca a la recta.



Para encontrar la circunferencia pedida es necesario determinar su centro.

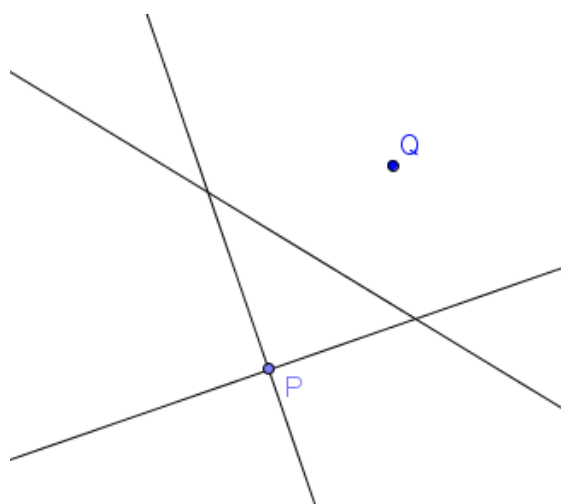
Como P y Q son puntos de la circunferencia, significa que el centro estará a la misma distancia de ellos. Por tanto, el centro estará en la mediatriz de los dos puntos o lo que es lo mismo, en la mediatriz del segmento PQ.

Seleccionamos la herramienta **Mediatriz**, pulsando a continuación sobre P y Q. Aparece la mediatriz, sin necesidad de haber dibujado previamente el segmento PQ.



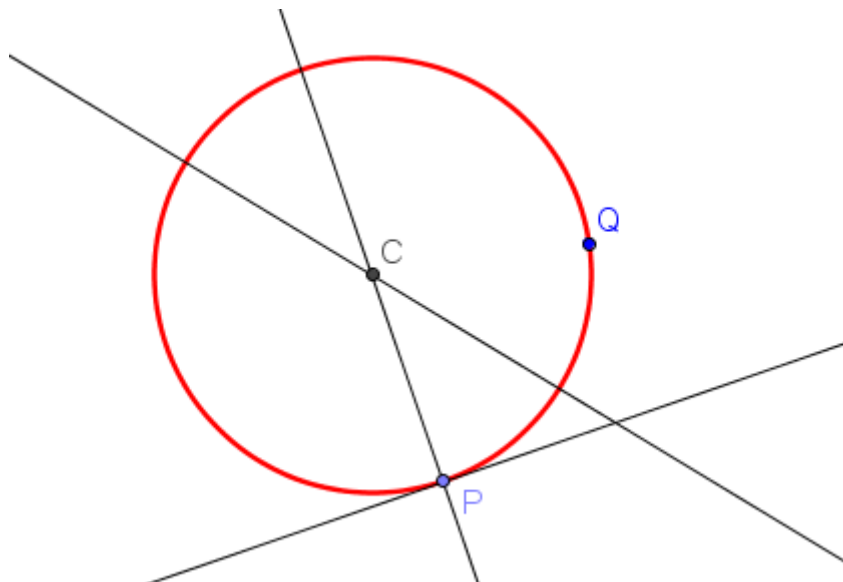
La recta inicial es la tangente a la circunferencia en P, por lo que el radio trazado por P será perpendicular.

Esto supone que el centro se encontrará en la recta perpendicular a la recta por el punto P que trazamos utilizando la herramienta **Recta perpendicular**.





El punto de intersección de esta recta con la mediatriz dará el centro de la circunferencia que trazaremos utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** para obtener la circunferencia cuyo centro es C y un punto que puede ser P o Q.

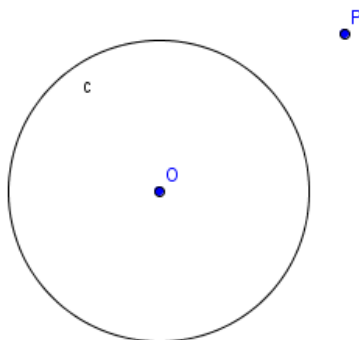


Comprobaremos que la construcción está bien hecha moviendo los objetos iniciales. Por ejemplo, si movemos los puntos P o Q, la circunferencia seguirá cumpliendo las condiciones pedidas.

### Actividades para practicar

1. Construye un cuadrado de 3,65 cm de lado.
2. A partir de dos segmentos, construye el rectángulo que tiene al primer segmento como lado y al segundo como diagonal.
3. Construir un rombo a partir del segmento correspondiente a lado.
4. Construye un rombo a partir de dos segmentos, de manera que el primero sea el lado del rombo y el segundo la diagonal.
5. Utilizando un deslizador, dibujar un polígono regular cuyo número de lados dependa del deslizador.

- 6. A partir de un polígono cualquiera, construir un nuevo polígono de un lado menos y cuya área sea igual a la del polígono inicial.
- 7. Dibuja una circunferencia  $c$  cuyo centro llamamos  $O$  y un punto exterior  $P$ .

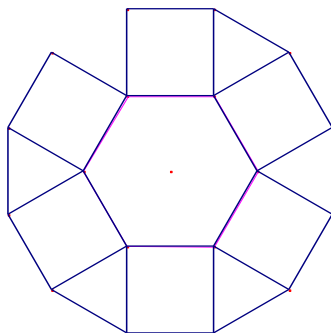


Construye la circunferencia de centro  $P$  que sea tangente a la circunferencia  $c$ .

- 8. Dibuja una circunferencia  $c$  cuyo centro es  $O$  y un punto  $A$  en la circunferencia. Sea  $P$  un punto interior a la circunferencia.

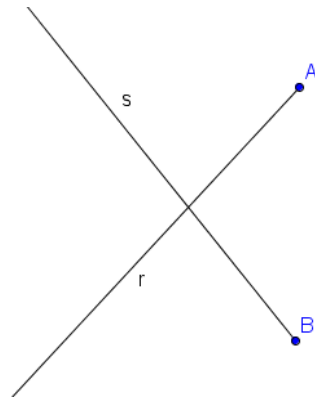
Traza la circunferencia que pasa por el punto  $P$  y es tangente a la circunferencia  $c$  en el punto  $A$ .

- 9. Dibuja un hexágono regular y sobre cada uno de sus lados construye un cuadrado. Une los vértices por medio de segmentos para obtener una figura similar a la siguiente:



¿Es regular esta figura?

10. Las rectas  $r$  y  $s$  son las alturas del triángulo  $ABC$  en los vértices  $A$  y  $C$ .  
Determina el vértice que falta y construye el triángulo.



11. Sobre dos semirrectas con el mismo origen  $A$ , construir una circunferencia tangente a ellas.
12. Dados tres segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; construir el triángulo cuyos lados son los tres segmentos dados.