Club GeoGebra Iberoamericano

3

ECUACIONES, SISTEMAS E INECUACIONES

ECUACIONES, SISTEMAS E INECUACIONES

INTRODUCCIÓN

En este nuevo tema vamos a trabajar las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones y las inecuaciones, proponiendo distintas construcciones que nos ayuden a resolver las distintas actividades. Como propuesta de trabajo seguiremos utilizando GeoGebra, aprovechando las opciones de CAS incorporadas a partir de la última versión.

La estructura es similar al tema anterior con una propuesta de actividades que esperamos os ayuden para utilizar GeoGebra como recurso para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

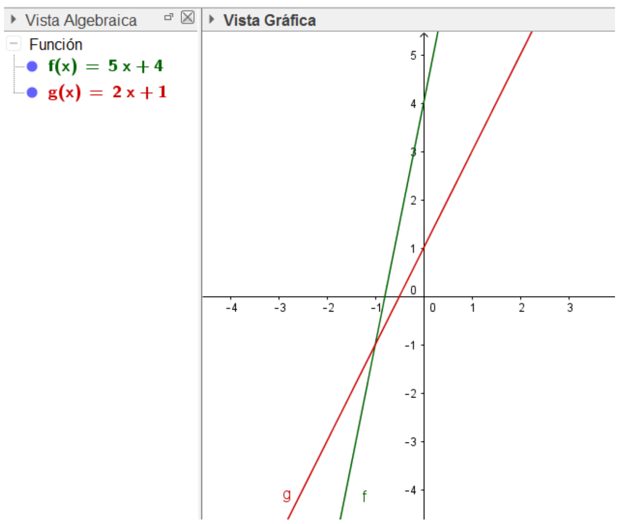
Recordemos que los Club de GeoGebra se realizan gracias a la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) a través de su Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA).

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

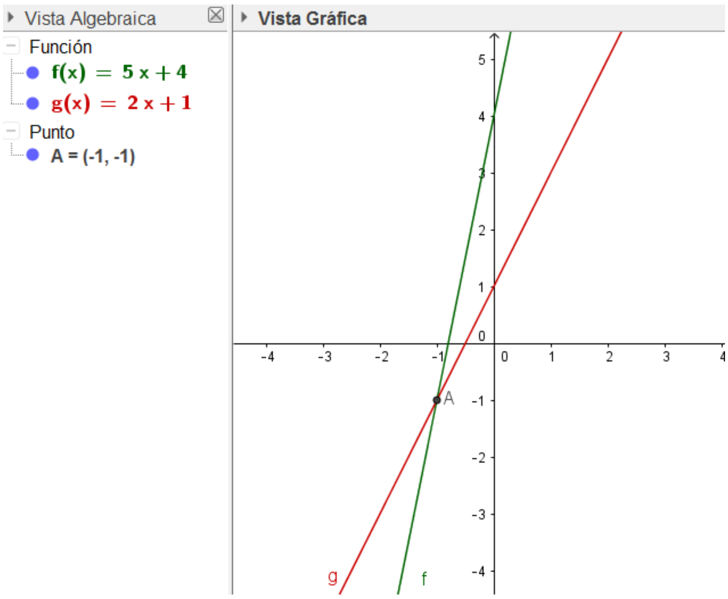
Exponemos a continuación las distintas opciones que GeoGebra ofrece para resolver ecuaciones, de manera que cada usuario las utilice según sus necesidades y sobre todo, en función de los contenidos y con los niveles educativos con los que esté trabajando.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $5x + 4 = 2x + 1$, podemos representar las funciones lineales que corresponden a cada una de las partes de la igualdad.

Para ello, introducimos a través de la línea de entrada las expresiones $5x + 4$ y $2x + 1$, obteniendo la representación de las funciones $f(x) = 5x + 4$ y $g(x) = 2x + 1$ que aparece en la imagen siguiente:



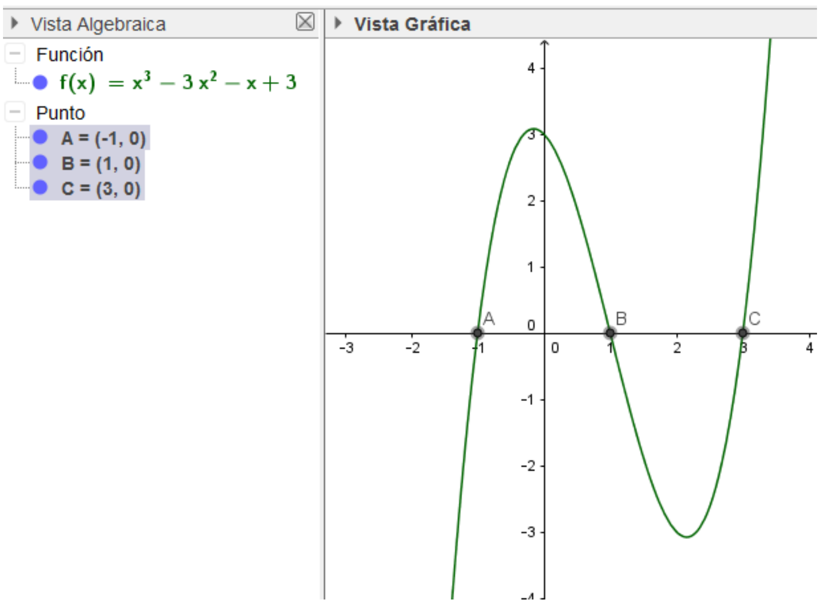
Para encontrar la solución de la ecuación bastará con determinar las coordenadas del punto de intersección, utilizando la herramienta **Intersección**, pulsando sobre la dos funciones.



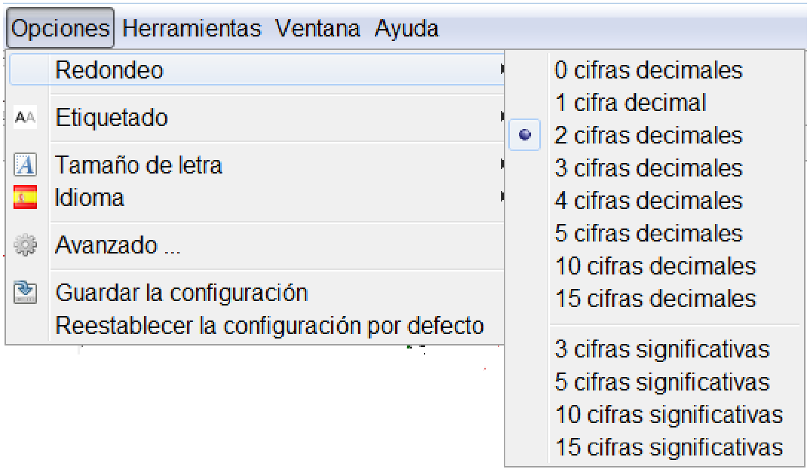
Aparece el punto $A(-1, 1)$. Por tanto la solución de la ecuación será $x = -1$.

Otra forma de resolver una ecuación sería representar la función que corresponde a la expresión de la ecuación, encontrando los puntos de corte con el eje X, utilizando la herramienta **Intersección** o el comando **Raíz**.

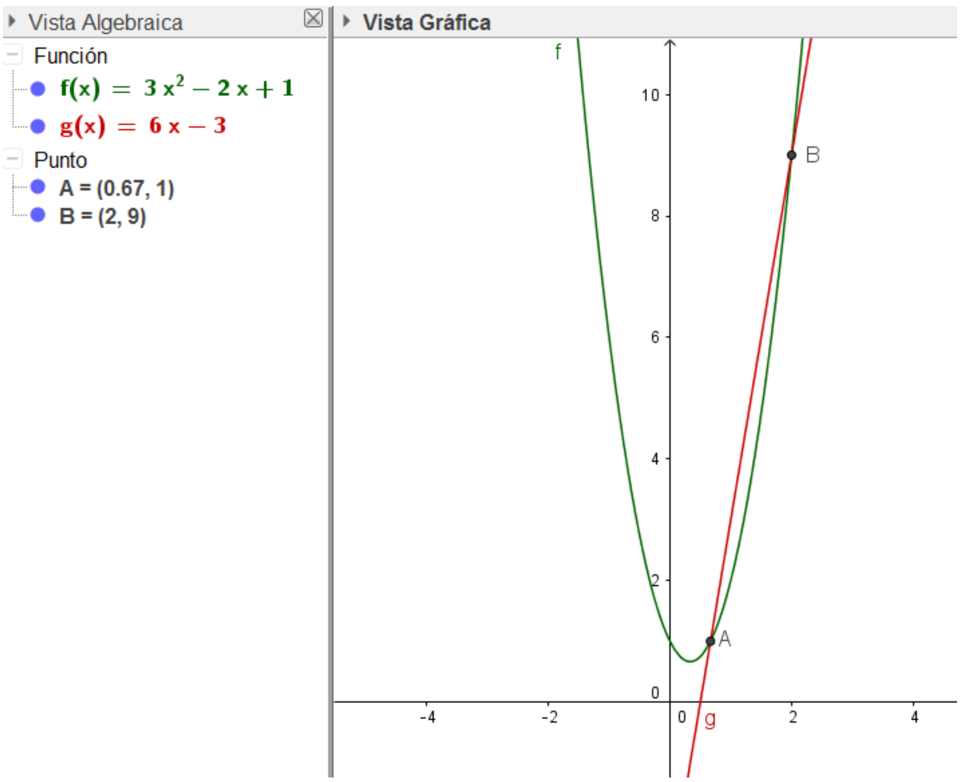
Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, introducimos la expresión de la función desde la línea de entrada, utilizando la herramienta Intersección para determinar los puntos de corte de la función con el eje X, obteniendo los tres puntos que aparecen en la vista algebraica y gráfica cuyas abscisas corresponden a las soluciones de la ecuación.



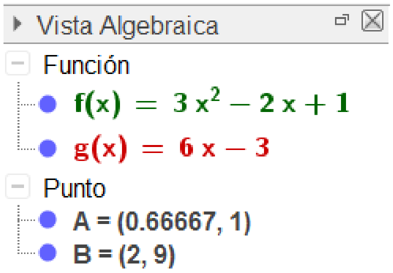
En los ejemplos anteriores, las soluciones han sido números enteros, por lo que desde la Vista gráfica se ha obtenido el resultado, algo que no ocurre cuando la solución no es un valor entero ya que las coordenadas aparecerán representadas de manera aproximada con la precisión establecida a través de la opción **Redondeo**.



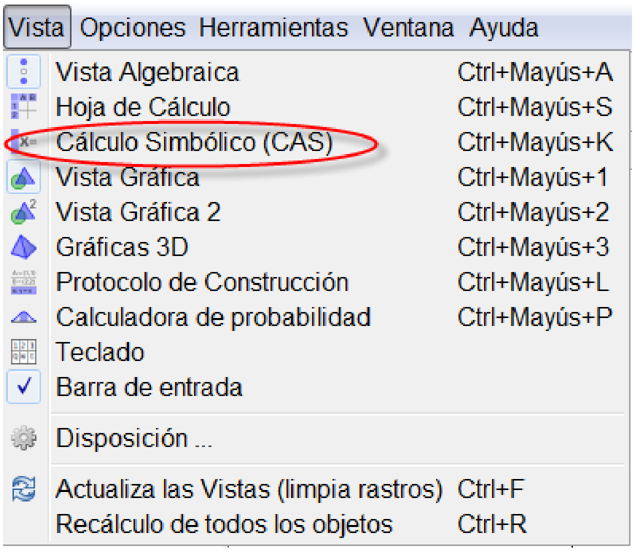
Como podemos observar al resolver a través de la Vista gráfica la ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 6x - 3$ aparecerán las soluciones correspondientes a los puntos A y B representados en la imagen siguiente:



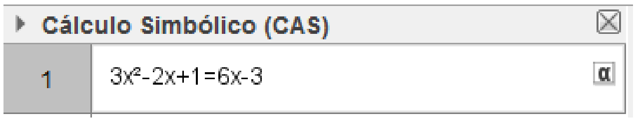
Observamos que una de las soluciones es entera $x = 2$, mientras que la otra aparece en forma decimal, por lo que debemos entender que corresponde a una aproximación. Al cambiar la opción a través de Redondeo aparecen nuevas cifras decimales.



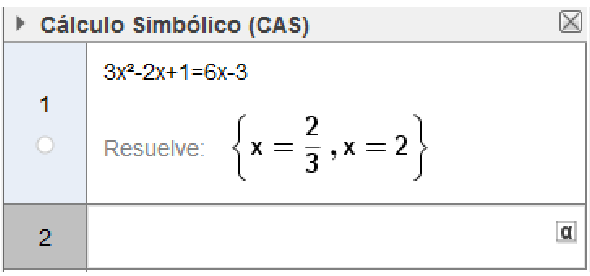
Para obtener las soluciones de una ecuación en forma exacta es necesario recurrir a la **Vista Cálculo Simbólico (CAS)**.



Una vez abierta la Vista CAS basta escribir la expresión de la ecuación



pulsando a continuación la herramienta **Resuelve** disponible en la barra de herramientas de esta vista, para que aparezcan las soluciones de la ecuación.



Este procedimiento servirá para resolver cualquier ecuación utilizando desde la Vista CAS.

Cada herramienta tiene asociado un comando que devolverá los mismos resultados. Para la herramienta anterior disponemos de los comandos **Soluciones** y **Resuelve** que se aplicará sobre la ecuación que se desea resolver, utilizando para ello la sintaxis

Soluciones[ecuación] **Resuelve[ecuación]**

2	Resuelve[3x-1/x=x+1] → $\left\{x = -\frac{1}{2}, x = 1\right\}$
3	Soluciones[x³-3x] → $\left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}$

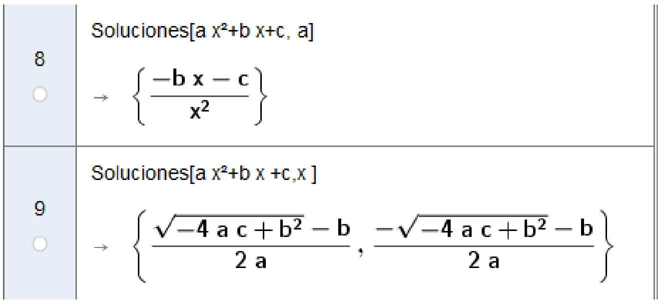
Observamos a través de la imagen siguiente, que las opciones anteriores no resuelven ecuaciones cuyas soluciones no son reales.

4	Resuelve[x²+x+1] → $\{\}$
5	Soluciones[x²+x+1] → $\{\}$

Cuando las soluciones no son reales hay que recurrir a los comandos **SolucionesC** o **ResuelveC.**

6	SolucionesC[x²+x+1] → $\left\{\frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-i\sqrt{3}-1}{2}\right\}$
7	ResuelveC[x²+x+1] → $\left\{x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,i-1\right), x = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,i-1\right)\right\}$

Cuando la ecuación contiene más de una incógnita será necesario incluir un segundo argumento que indique con respecto a cuál se desea resolver, utilizando el comando **Soluciones[ecuación, variable] o Resuelve[ecuación, variable]**



Con las herramientas y comandos anteriores afrontaremos la resolución de distintas ecuaciones.

Actividad 1

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a. $\frac{2x-1}{4} - 2(x-3) = 5 + \frac{3x}{2}$

b. $\frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x-1}$

c. $\sqrt{x^2-1} + x = 3x - 2$

Actividad 2

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a. $V_x^4 = 20V_x^2$

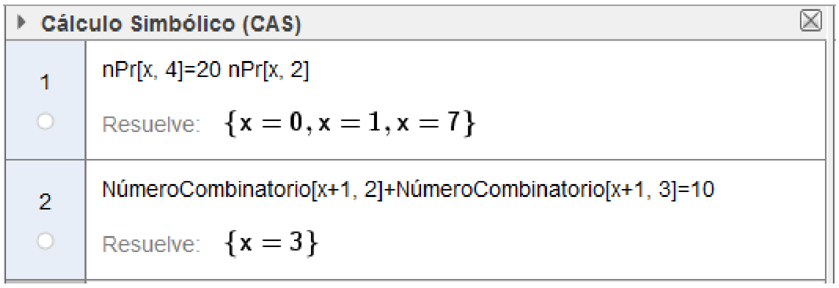
b. $\binom{2}{x+1} + \binom{3}{x+1} = 10$

Para resolver estas ecuaciones combinatorias sólo necesitamos conocer la forma de representar las variaciones y las combinaciones.

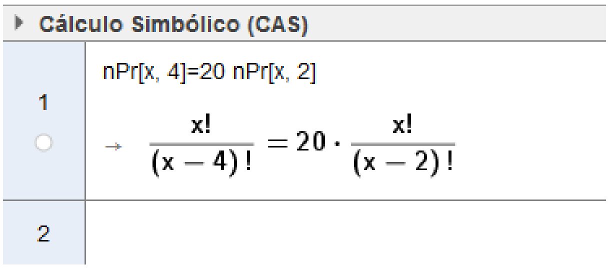
Para representar las variaciones de m elementos tomados de n en n utilizaremos la expresión **nPr[m, n]** y para representar un número combinatorio hay que escribir **NúmeroCombinatorio[m, n]**.

Por tanto, ya podemos resolver las ecuaciones anteriores.

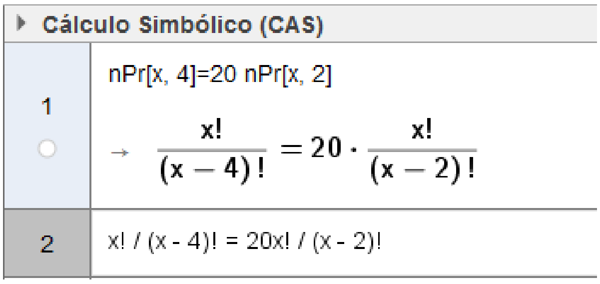
Escribimos las expresiones y utilizamos la herramienta **Resuelve**.



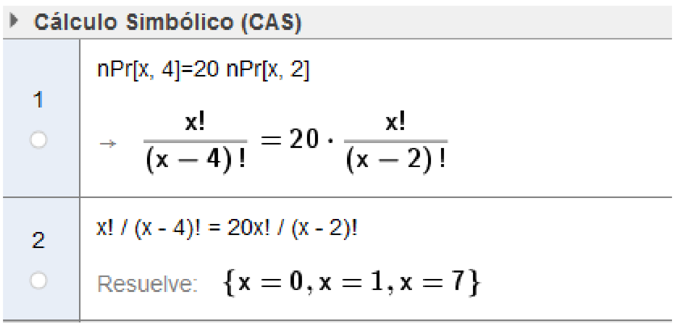
Si al escribir la expresión de la ecuación pulsamos la tecla **Enter** aparecerá la expresión que corresponde a cada número combinatorio, tal y como podemos observar en la imagen siguiente:



Para resolver la ecuación, al pulsar la barra espaciadora se copiará la expresión anterior



Por lo que bastará con utilizar la herramienta **Resuelve** para obtener la solución de la ecuación.



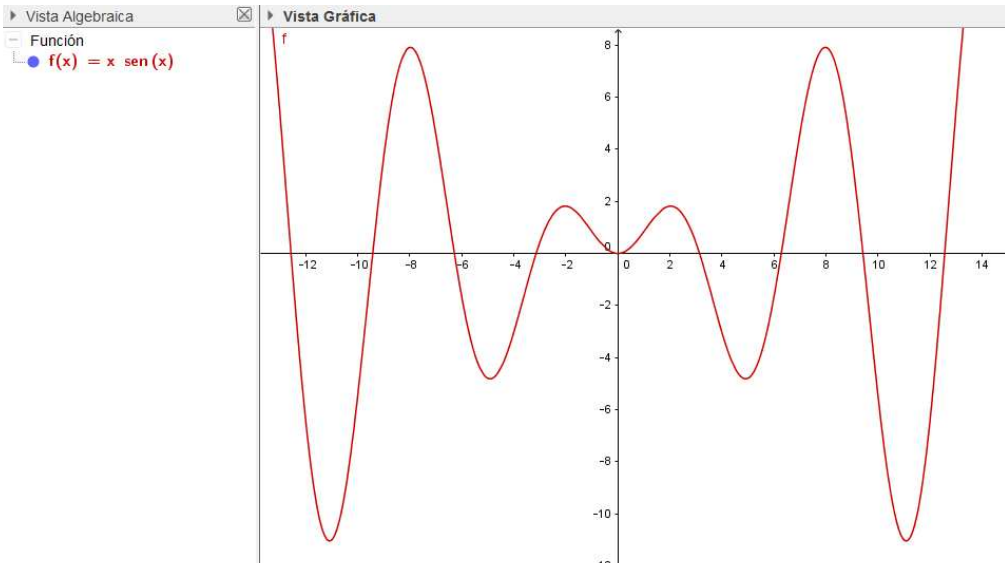
Exponemos que ocurre a continuación al resolver otros tipos de ecuaciones.

Actividad 3

Resuelve la ecuación $x\, sen\, x = 0$.

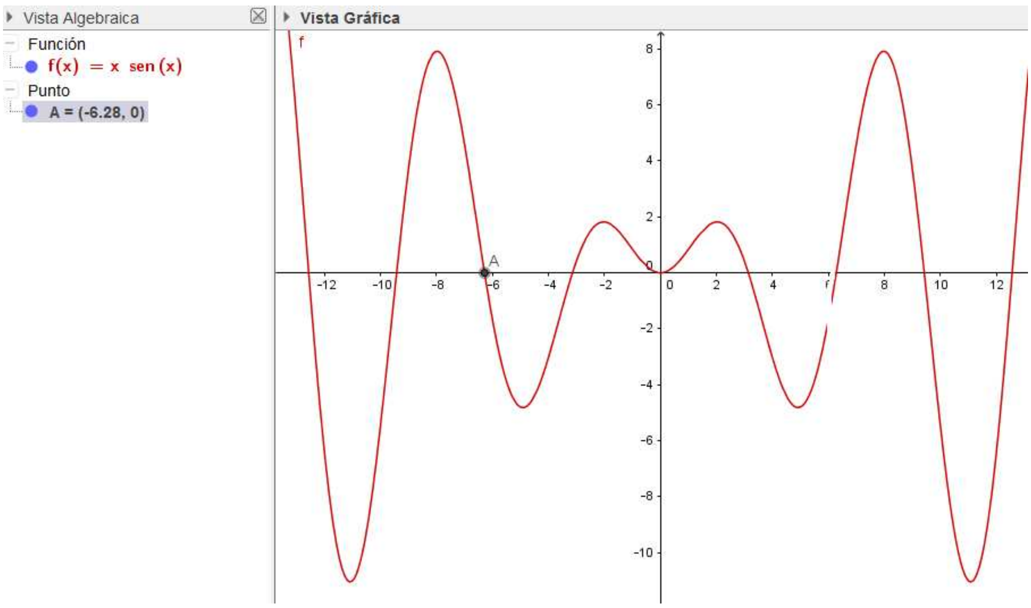
Observemos que ocurre al utilizar las distintas vistas que GeoGebra ofrece, comenzando por la vista algebraica y gráfica, para posteriormente resolverla desde la vista CAS.

Introducimos la expresión de la función a través de la línea de entrada, lo que hace que aparezca representada la función $f(x) = x\, sen\, x$.

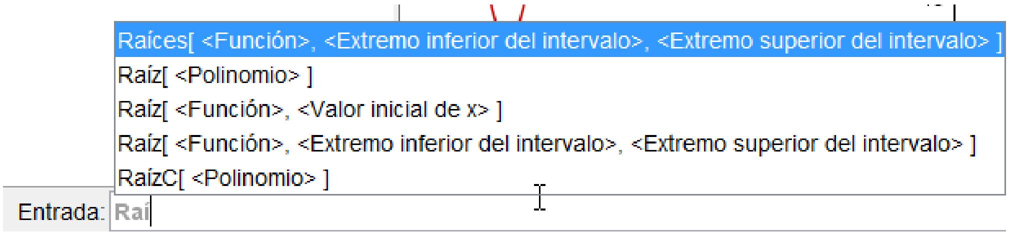


Observamos que la ecuación tiene infinitas soluciones.

Si utilizamos la herramienta Intersección, GeoGebra devuelve una sola de las soluciones de la ecuación, tal y como aparece en la imagen siguiente:



Al intentar utilizar el comando **Raíz**, observamos que aparecen distintas opciones, diferenciando funciones polinómicas del resto de funciones.



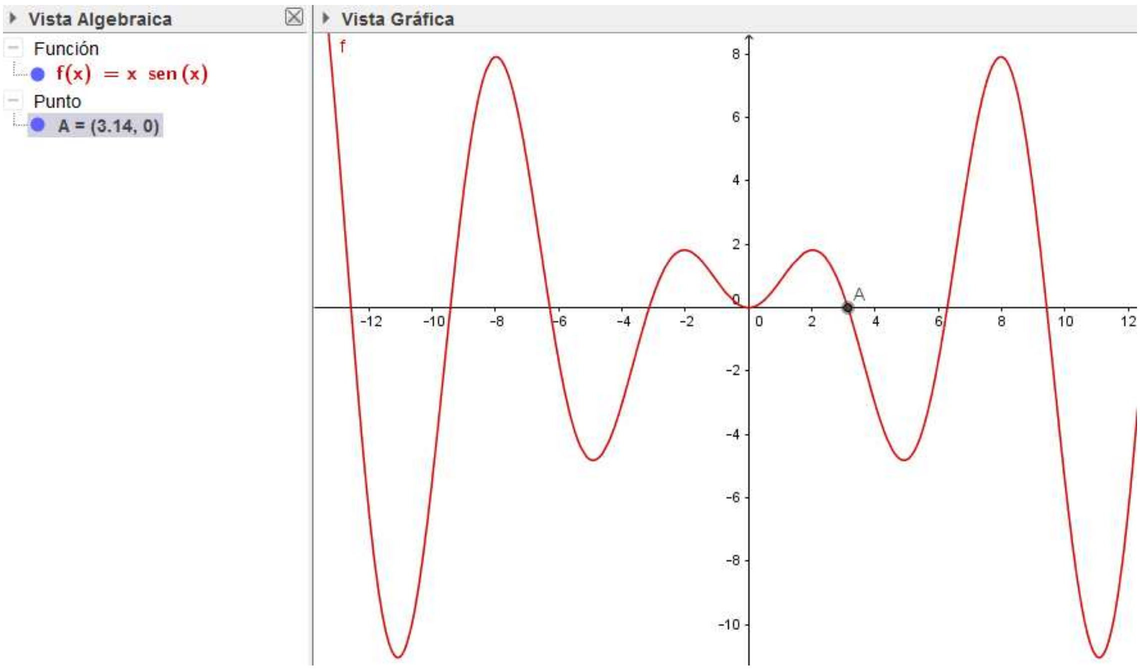
En este caso, para obtener una raíz hay que establecer el intervalo en el que se desea obtener, utilizando la sintaxis:

Raíz[función, extremo inferior, extremo superior]

Por ejemplo, para obtener la primera raíz positiva ejecutaremos el comando

Raíz[f(x), 2, 4]

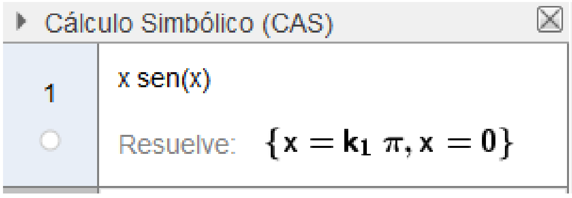
El resultado aparece en la imagen siguiente:



Un proceso similar realizaremos para cualquier otra raíz.

Comprobemos ahora qué ocurre al resolver esta ecuación desde la vista CAS.

Al escribir la expresión de la ecuación y pulsar la herramienta **Resuelve**, obtenemos la expresión siguiente para las soluciones:



Lo que nos dice que una solución es $x = 0$, y el resto de soluciones serán $x = k\,\pi$, siendo k un número entero.

A continuación te proponemos resolver varias ecuaciones, utilizando en cada caso, la vista y opciones que consideres adecuadas.

Actividad 4

Resuelve

a. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+7} = 4$

b. $2^{2x-1} = 4$

c. $2\log x = \log(5x-6)$

Actividad 5

Resuelve utilizando GeoGebra el siguiente problema: un pastor vende 5/7 de las ovejas que tiene. Después compra 60 y así tendrá el doble de las que tenía antes de la venta.

¿Cuántas ovejas tenía en un principio?

SISTEMAS DE ECUACIONES

Para resolver sistemas de ecuaciones se utilizan los mismos comandos y las ecuaciones del sistema se escribirán encerradas entre llaves (como una lista, separadas por comas y lo mismo para las incógnitas.

La sintaxis será:

Soluciones[{ecuación1, ecuación2,…},{x, y, z, …}]

o

Resuelve[{ecuación1, ecuación2,…},{x, y, z, …}]

Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-3 \\ 4x-y-5z=4 \end{array}\right\}$$

Bastará con ejecutar el comando con la sintaxis siguiente:

Soluciones[{3x+2y-3z=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,y,z}]

El programa devolverá, en este caso, la solución única, al ser el sistema compatible determinado

1	Soluciones[{3x+2y-3z=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,y,z}]
○	$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Si el sistema es compatible indeterminado devolverá las soluciones en función de la última variable, tal y como ocurre en la actividad siguiente:

Actividad 6

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=1 \\ y+2z=-3 \\ x-3y+z=4 \end{array}\right\}$$

Escribimos en la vista CAS la siguiente sintaxis:

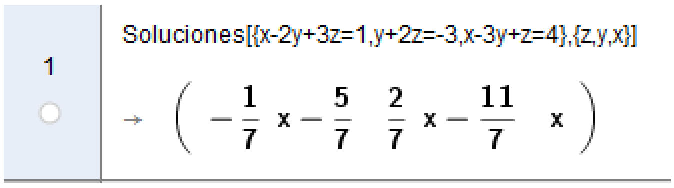
Soluciones[{x-2y+3z=1,y+2z=-3,x-3y+z=4},{x,y,z}]

Aparecerán las soluciones

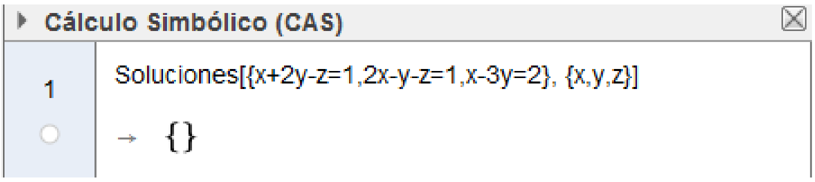
1	Soluciones[{x-2y+3z=1,y+2z=-3,x-3y+z=4},{x,y,z}]
○	$\rightarrow \begin{pmatrix} -7z-5 & -2z-3 & z \end{pmatrix}$

Si queremos obtener las soluciones en función de otra de las variables no tenemos nada más que cambiarlas en la sintaxis y ponerla la última.

Soluciones[{x-2y+3z=1,y+2z=-3,x-3y+z=4},{z,y,x}]



Cuando el sistema sea incompatible, aparecerá como resultado { }, como ocurre en el sistema siguiente:



Actividad 7

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales, en caso de ser compatible indeterminado resolverlo en función de x.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z+t=1 \\ x+y+2z-t=2 \\ x-3y+z-3t=-2 \end{array}\right\}$$

De manera análoga se resolverán sistemas de ecuaciones no lineales.

Actividad 8

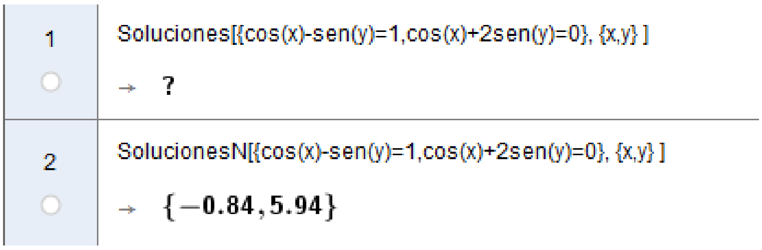
Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$$

Actividad 9

Resuelve $\begin{cases} \cos x - \operatorname{sen} y = 1 \\ \cos x + 2\operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$

Utilizando el comando Soluciones, observamos que no aparece solución, por lo hay que recurrir a los comandos **SolucionesN** o **ResuelveN** para resolver de forma numérica (aproximada).



Actividad 10

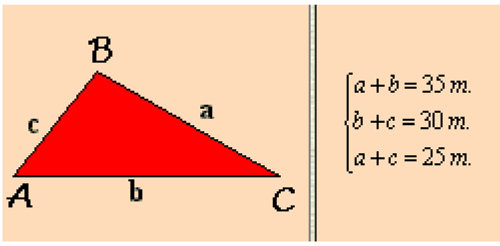
Resuelve utilizando los comandos anteriores, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

Actividades de investigación I

a. Resuelve con GeoGebra el siguiente problema: calcula los números naturales de tres cifras de modo que la segunda cifra sea el doble que la primera y la tercera sea la suma de las dos primeras.
Una vez obtenidos, comprueba que la suma de las cifras de cada uno de ellos es un múltiplo de 6 y explica por qué.

b. Halla los lados del triángulo ABC con los datos que se indican en la imagen siguiente:



Discusión de sistemas

Los mismos comandos anteriores permitirán realizar la discusión de un sistema de ecuaciones en función de uno o más parámetros.

Actividad 11

Discute según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

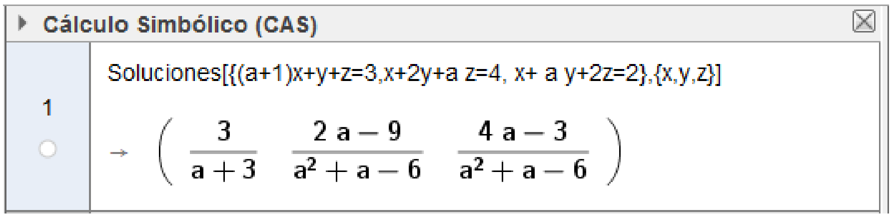
$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + a\,z = 4 \\ x + a\,y + 2z = 2 \end{cases}$$

Introducimos el sistema de ecuaciones utilizando el comando Soluciones con la sintaxis adecuada.

Soluciones[{(a+1)x+y+z=3,x+2y+a z=4, x+ a y+2z=2},{x,y,z}]

Observemos que entre el parámetro y la incógnita hemos insertado un espacio en blanco, aunque también se puede incluir el signo de multiplicación (*).

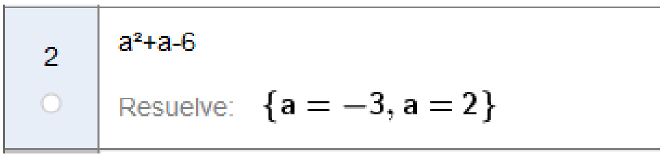
Aparece la expresión de la solución:



A partir de la expresión anterior, el usuario tendrá que analizarla para determinar si el sistema tiene solución o no en función de los valores del parámetro.

La expresión de las soluciones es una fracción, en la que x tiene como denominador $a+3$, por lo que cuando ese valor se anule, el sistema no tendrá solución. Por tanto, podemos deducir que si $a=-3$, el sistema es incompatible.

Analicemos ahora el denominador de las otras dos incógnitas que es a^2+a-6. Resolvemos esta ecuación cuyas soluciones son -3 y 2.



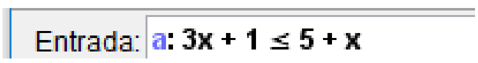
Por tanto para estos valores el sistema es incompatible.

Por lo que la discusión del sistema sería:

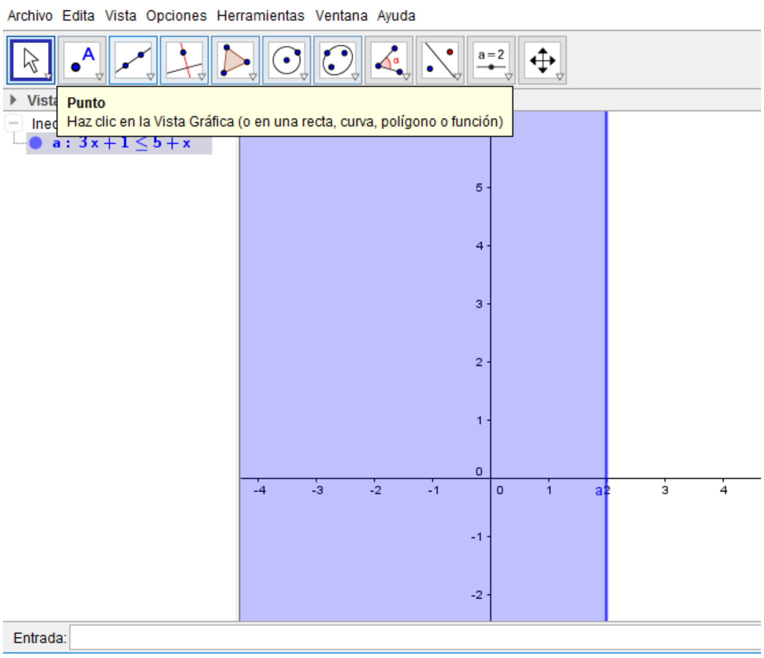
Si a = 2 o a = -3 el sistema es incompatible, en los demás casos, el sistema es compatible determinado.

INECUACIONES

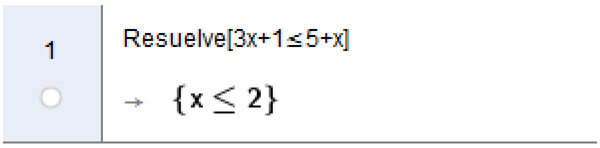
Para representar y por tanto, resolver una inecuación, basta con escribirla en la línea de entrada de GeoGebra, tal y como se muestra en el ejemplo siguiente:



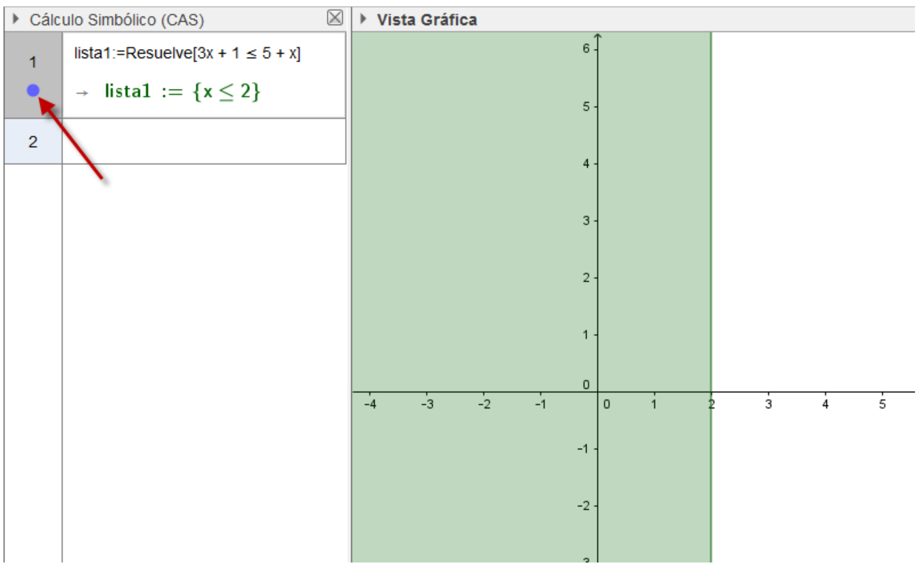
Al pulsar **Enter** la inecuación aparecerá en la Vista algebraica y su solución en la Vista gráfica, tal y como se muestra en la imagen siguiente:



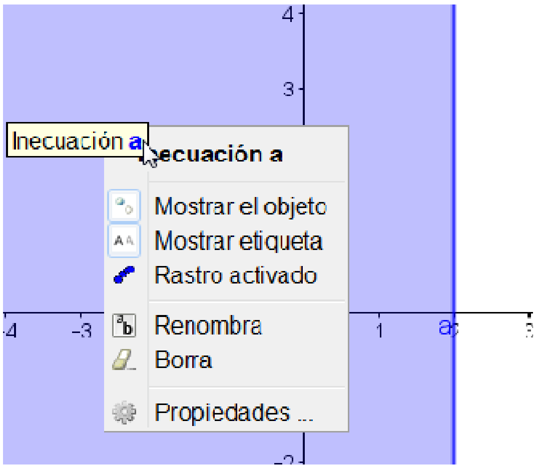
También se puede resolver en la vista CAS utilizando el comando o la herramienta Resuelve.



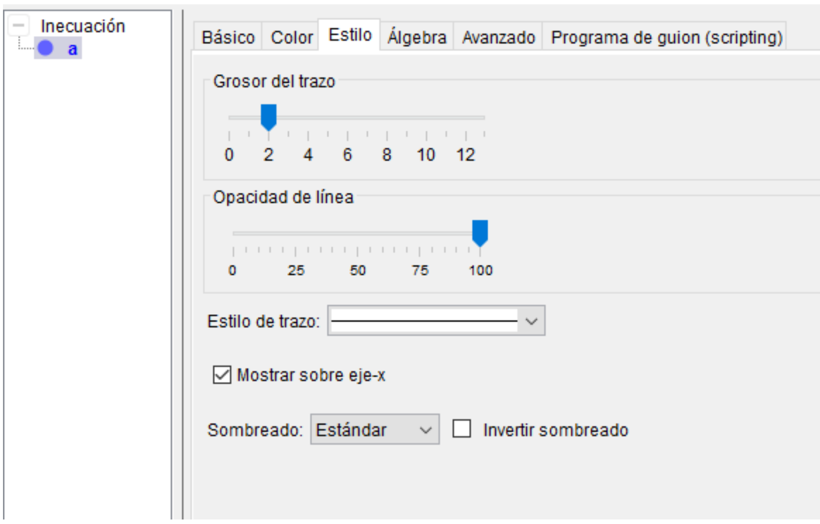
En este caso no aparece la representación en la Vista gráfica, por lo que será necesario marcar el círculo que aparece debajo del número de línea para representar el conjunto solución.



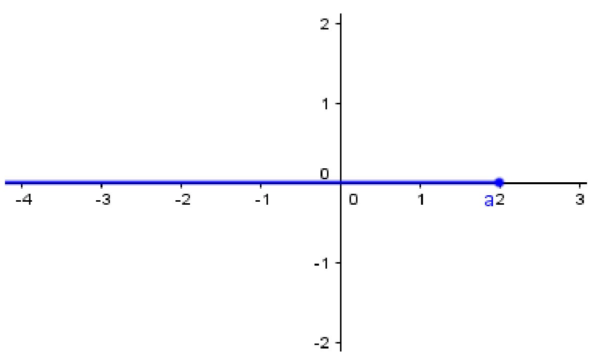
Para representar el conjunto solución de una inecuación de primer grado sólo en el eje X hay que acceder a las propiedades. Para ello, pulsaremos el botón derecho del ratón sobre el conjunto solución, seleccionando la opción **Propiedades** (también se puede hacer sobre la expresión de la inecuación en la Vista algebraica).



A continuación, pulsamos sobre la pestaña **Estilo**, marcando la opción **Mostrar sobre eje X**.

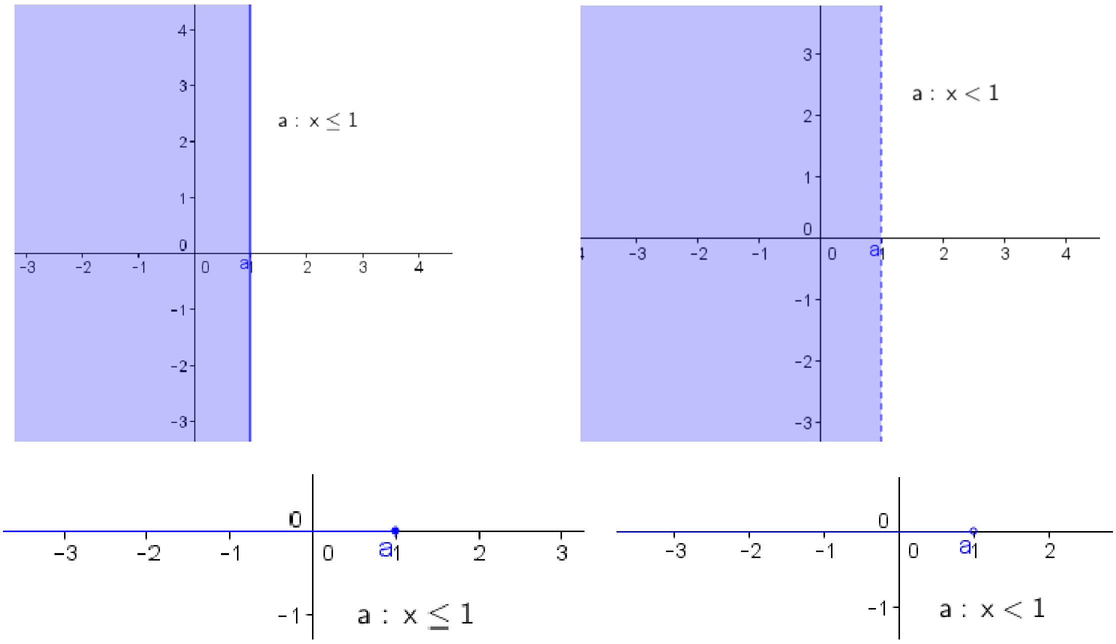


Obtendremos la representación siguiente:



De lo que podemos deducir que el conjunto solución de la inecuación es $x \leq 2$

Al observar la representación del conjunto solución en el plano o en el eje X, podemos deducir si el intervalo es abierto o semiabierto, tal y como muestran las imágenes siguientes:



En las dos primeras imágenes aparece la línea continua para representar menor o igual y línea discontinua para la representación de la condición menor estricto.

Lo mismo ocurre al representar en el eje X, para menor o igual aparece el punto relleno y para menor estricto el punto está hueco.

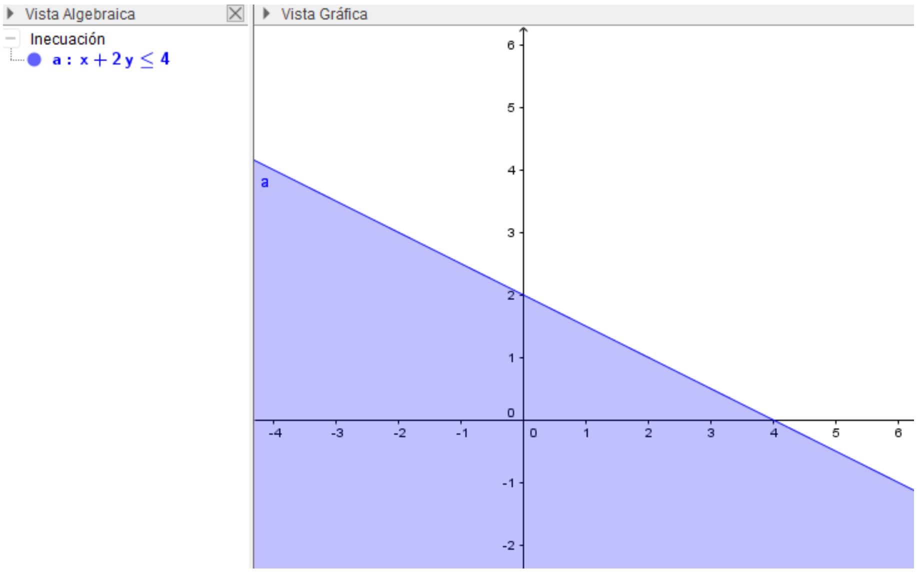
De esta forma, en cualquiera de los casos podemos deducir el conjunto solución.

Actividad 12

Resuelve las inecuaciones siguientes:

a. $2(1-x)+3<2+x$
b. $4x-\frac{1}{2}>1-x$
c. $x-3(2-x)\geq x$
d. $x^2-3x-4<0$

De manera análoga GeoGebra resolverá una inecuación con dos incógnitas, cuya expresión también hay que introducirla a través de la línea de entrada o acceder a la Vista CAS de manera similar a las inecuaciones anteriores, tal y como aparece en la imagen siguiente:



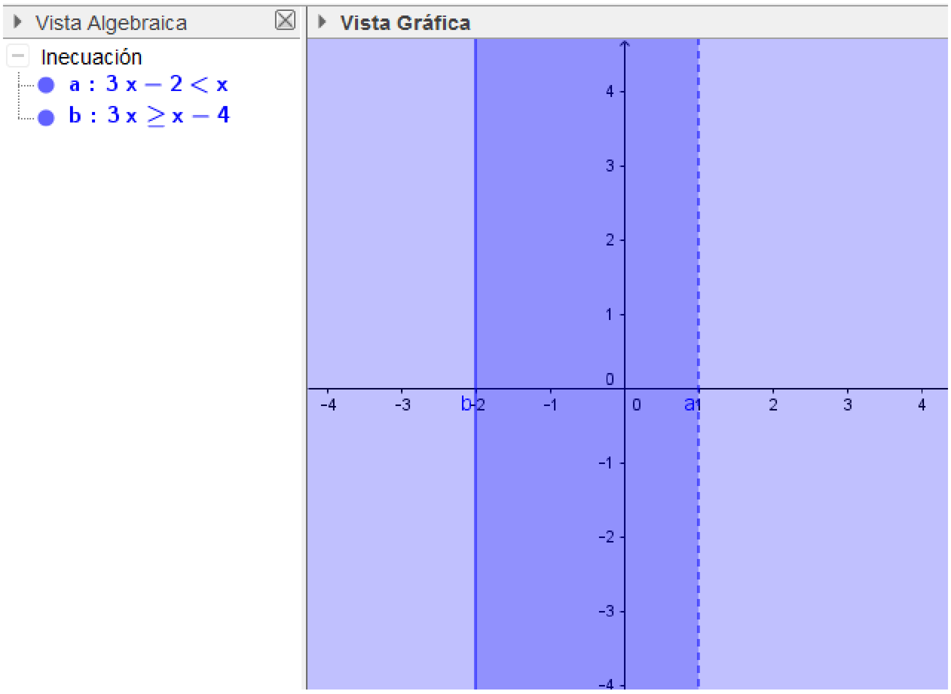
Actividad 13

Resuelve las inecuaciones siguientes:

a. $x + y > 6$
b. $-2x + 3y \leq 3$
c. $-4x + y < 1$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE INECUACIONES

Para resolver un sistema de inecuaciones con una o dos incógnitas, hay que introducirlas de una en una, a través de la línea de entrada.

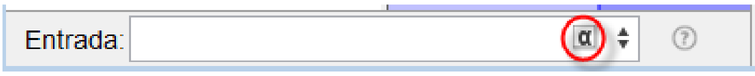


Observemos que GeoGebra asigna un nombre a cada una de las inecuaciones.

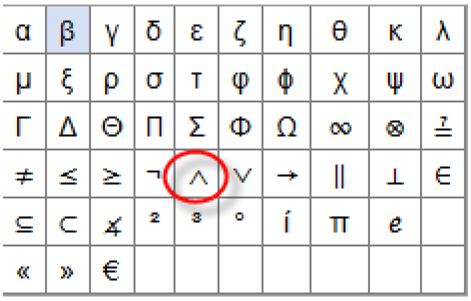
Para representar el conjunto solución del sistema hay que obtener la intersección de los conjuntos correspondientes a las dos inecuaciones. Para ello utilizaremos el operador **y**, cuya representación en GeoGebra es Λ.

Este símbolo está disponible al pulsar sobre 

que aparece a la derecha en la línea de entrada.

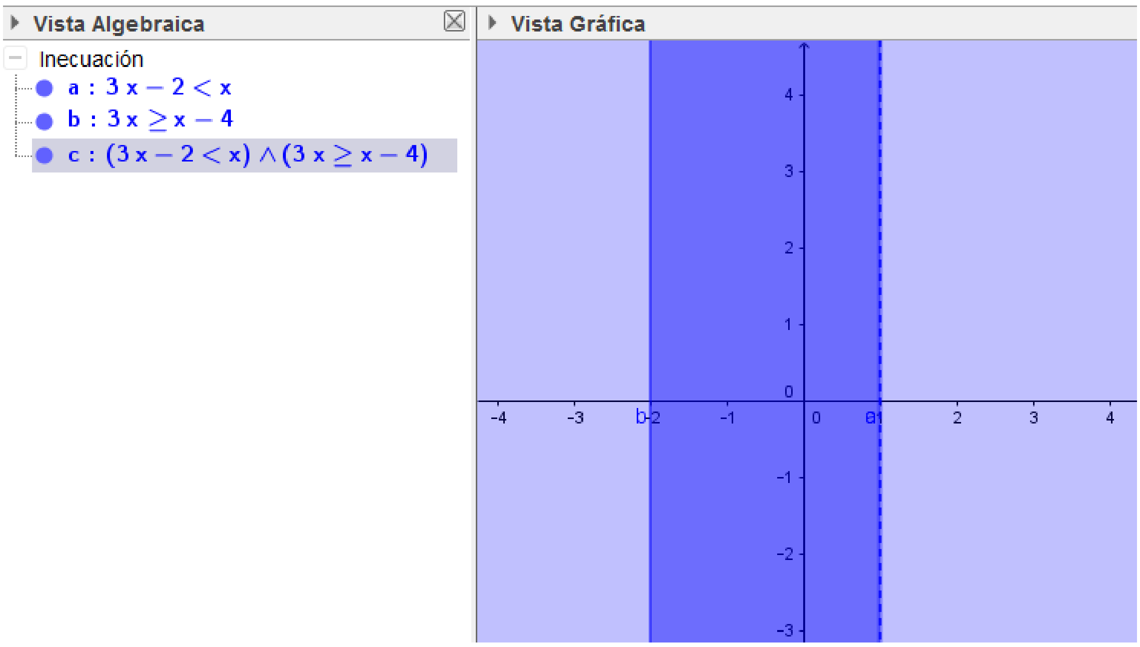


Aparecerá el cuadro de símbolos en el que encontramos el operador **y**.

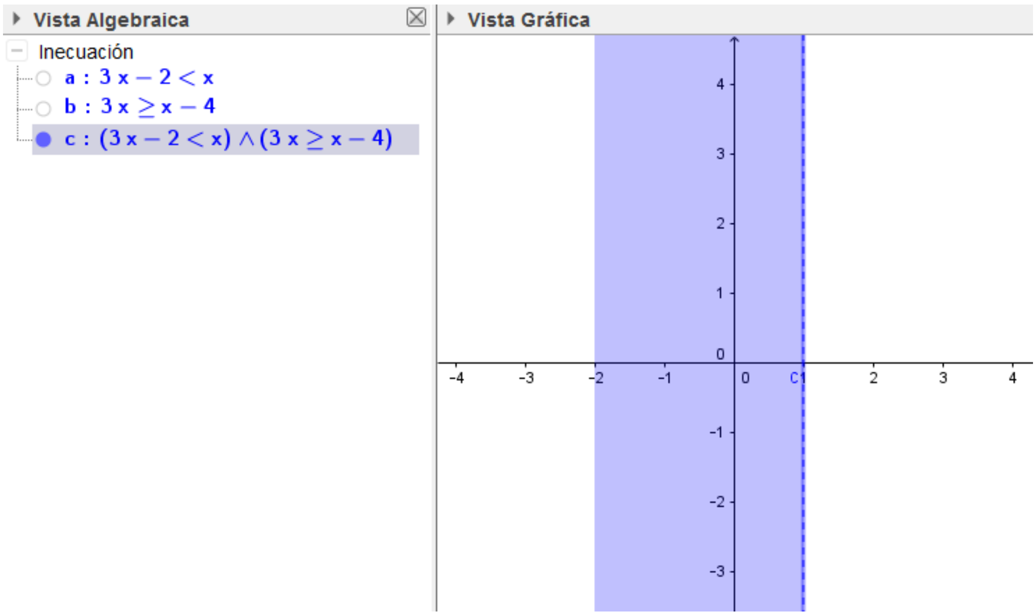


Para obtener el conjunto solución de las dos inecuaciones escribiremos **a Λ b**, ya que a es el nombre de la primera inecuación y b el nombre de la segunda.

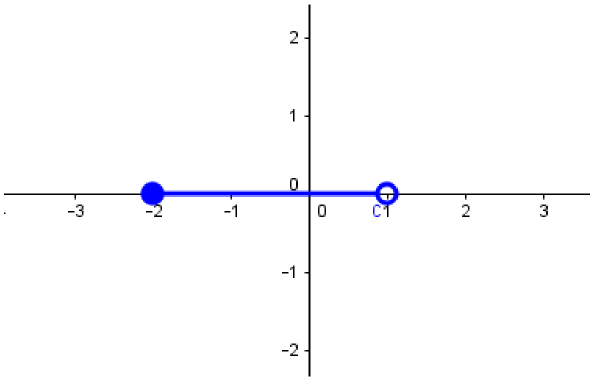
Aparece el conjunto solución del sistema de inecuaciones.



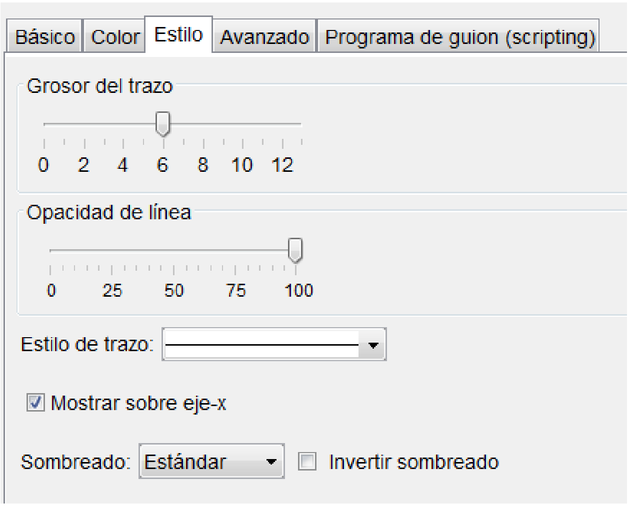
Para obtener una mejor representación es conveniente ocultar los conjuntos soluciones correspondientes a cada una de las inecuaciones del sistema.



Accediendo a las propiedades de las distintas inecuaciones podemos representarlas todas en el eje X, por lo que obtendremos el conjunto solución siguiente:



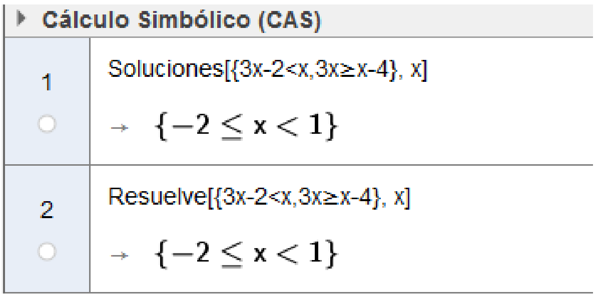
En la imagen anterior, hemos aumentado el grosor del trazo de la representación, modificando su valor en la opción **Estilo**.

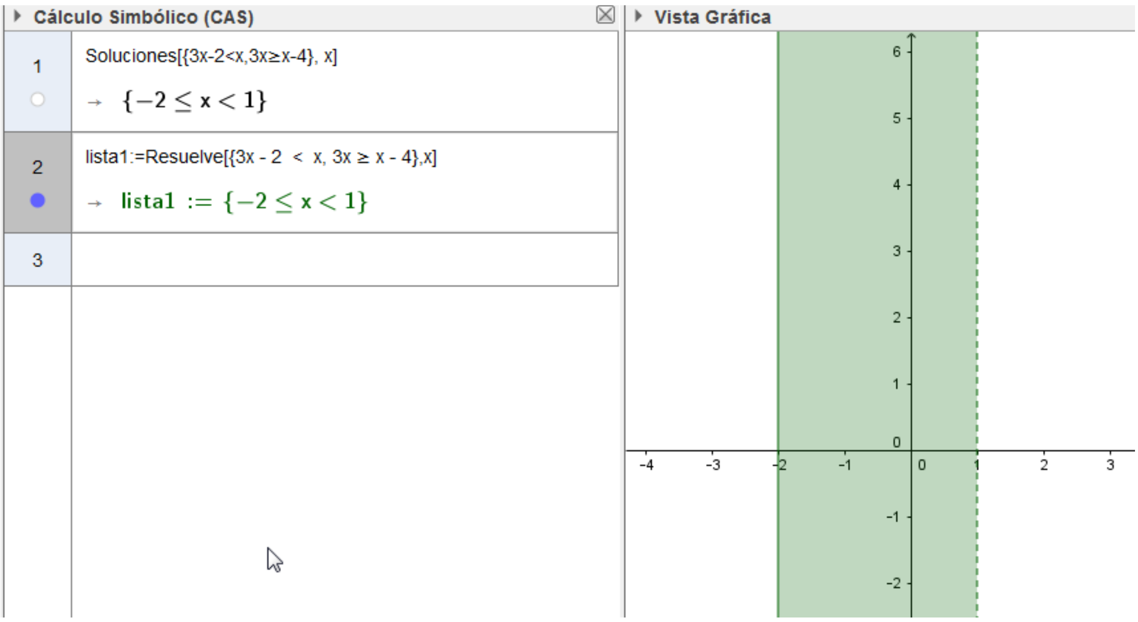


Una vez realizado el proceso podemos deducir el conjunto solución correspondiente al sistema de inecuaciones, que en este caso será $-2 \leq \mathrm{x} \leq 1$

Para realizar este proceso desde la Vista CAS utilizaremos los comandos Soluciones o Resuelve escribiendo las inecuaciones entre llaves, de manera similar a como se hizo para los sistemas de ecuaciones.

En este caso aparecerá directamente el conjunto solución que también podemos representar al marcar el círculo correspondiente a la etiqueta de la línea de la Vista CAS.





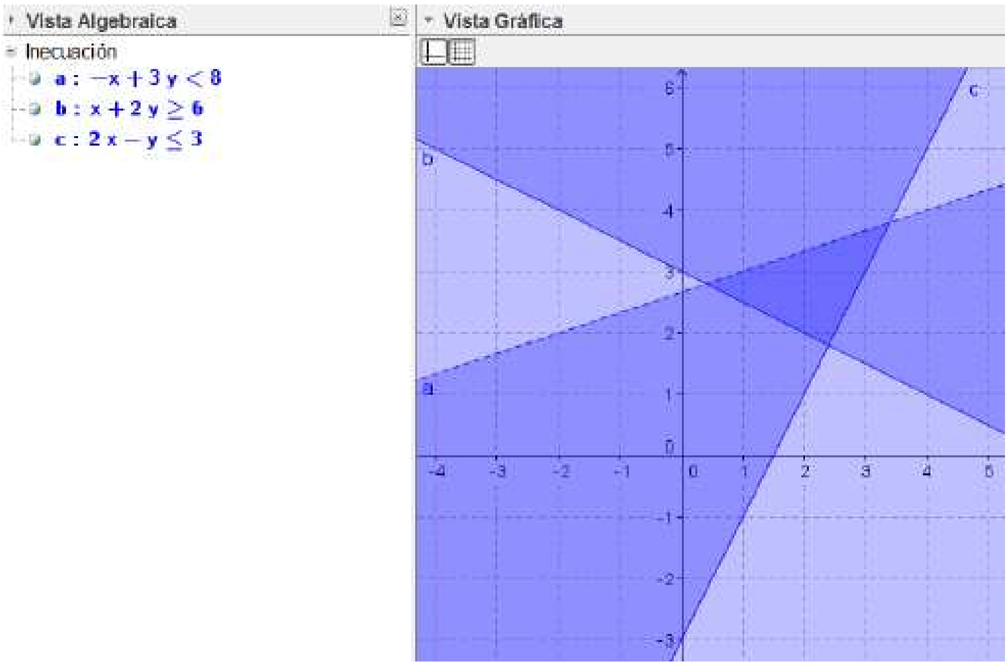
De manera análoga se obtendrá el conjunto solución de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

Actividad 14

Representa el recinto limitado por las siguientes inecuaciones y calcula sus vértices

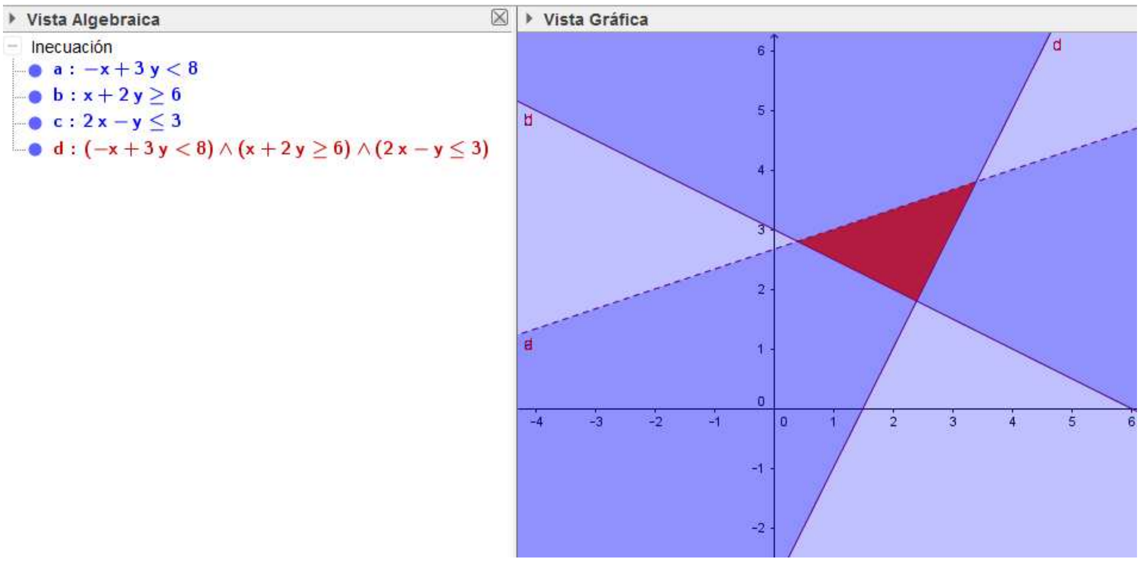
$$\begin{cases} -x + 3y < 6 \\ x + 2y \geq 6 \\ 2x - y \leq 3 \end{cases}$$

Al escribir las tres inecuaciones aparecerán los conjuntos soluciones de cada una de ellas.



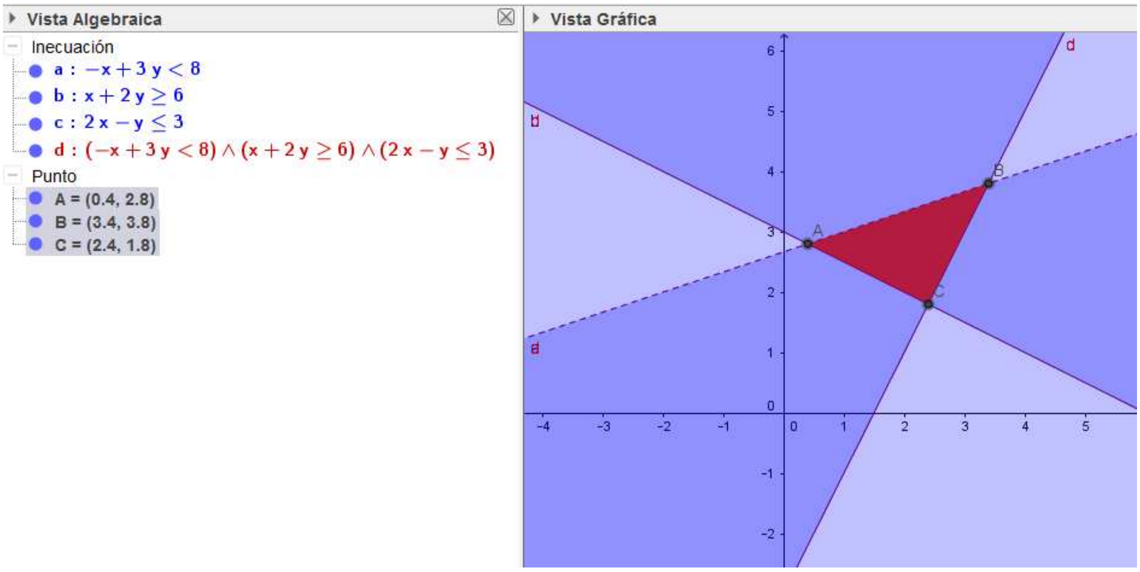
Para representar sólo el recinto correspondiente a la intersección utilizaremos el operador y cuya representación ya conocemos del ejemplo anterior.

Escribiremos en la línea de entrada **a Λ b Λ c**, ocultando, si lo consideramos necesario, previamente los conjuntos soluciones correspondientes a cada una de las inecuaciones.



Utilizando el comando **Vértices** obtendremos las coordenadas de los vértices del triángulo obtenido como conjunto solución.

Basta con escribir, a través de la línea de entrada, **Vértices[e]** ya que e es el nombre asignado al sistema de inecuaciones.



Actividad 15

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} 2x + 6 < 0 \\ x + \frac{1}{3} \geq \frac{x}{2} \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 8 \leq x + 14 \\ 2x > \frac{3x}{2} - 1 \end{cases}$

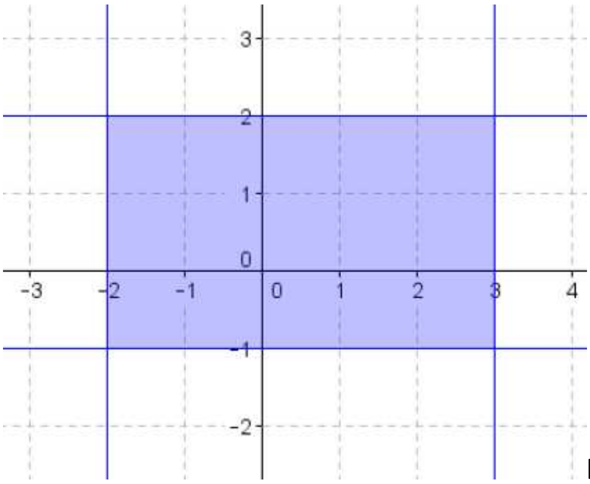
c. $\begin{cases} x + y < 1 \\ 2x - 3y \leq 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases}$

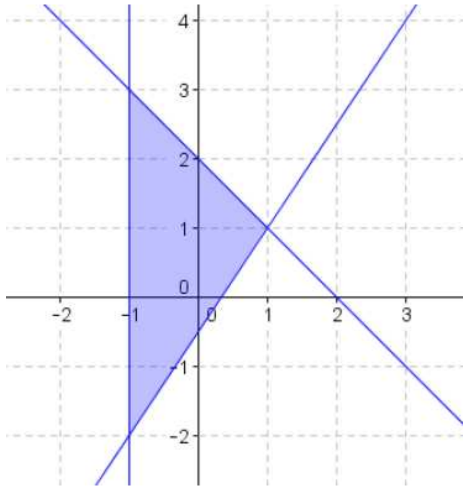
e. $\frac{x+2}{x-2} > 0$

Actividades para investigar II

A. Intenta deducir el sistema de inecuaciones al que corresponde cada uno de los recintos representados en las imágenes siguientes:



a.



b.

B. De un cuadrado se sabe que su área es menor o igual que 49 cm2. ¿Cuáles son las posibles medidas de su perímetro? ¿Y de su diagonal?

PROGRAMACIÓN LINEAL

En programación lineal se trata de optimizar (obtener el máximo o el mínimo) de una cierta expresión lineal de acuerdo con una serie de restricciones que aparecerán representadas por inecuaciones lineales.

La expresión que es necesario optimizar se denomina función objetivo.

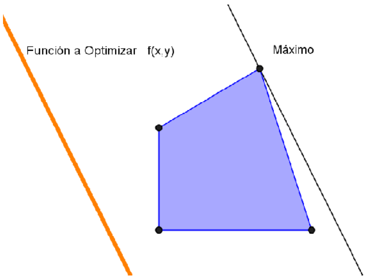
A partir de las restricciones establecidas se obtendrá el conjunto factible para lo cual será necesario resolver el sistema formado por las inecuaciones establecidas por las restricciones.

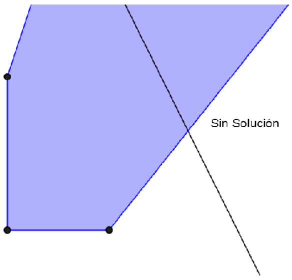
A continuación, hay que determinar el punto o puntos, que optimizan la función objetivo, para lo cual es necesario tener presente el siguiente teorema: “Si una función lineal posee un máximo o un mínimo en un conjunto convexo, toma este valor en un vértice o en un lado de dicho conjunto”.

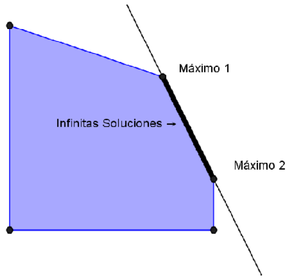
Por tanto, la resolución del sistema de inecuaciones referidas a las restricciones del problema nos permite definir una región factible donde buscaremos las soluciones del sistema

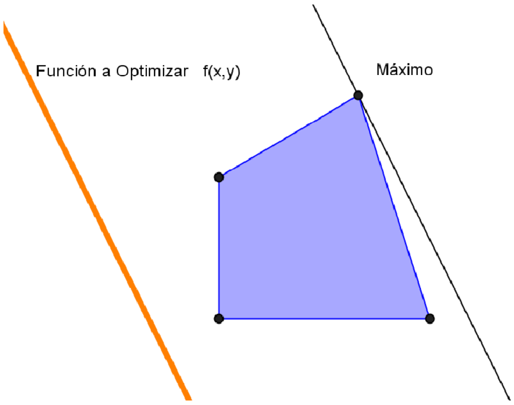
La solución de un problema de programación lineal puede ser única, múltiple, o incluso puede no tener solución, por lo que para hallarlas, sustituiremos los valores de los puntos (x, y) de los vértices de la región en la función objetivo representada por $F(x,y)$.

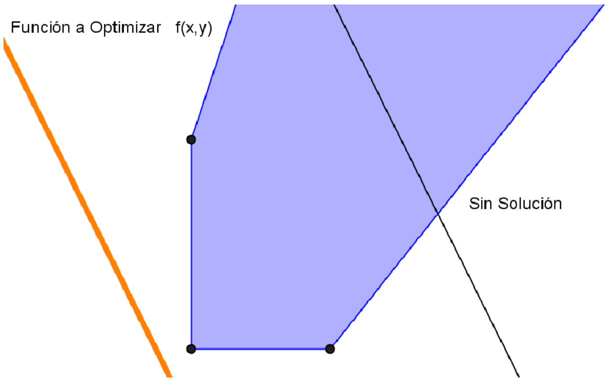
Otra forma de obtener la solución del problema para una función objetivo $F(x,y) = a\,x + b\,y + c$, será representar la recta que pasa por el origen y tiene por vector director $\vec{u}$ = (-b, a), trazando rectas paralelas a la recta anterior para determinar aquella que defina el máximo y el mínimo del recinto

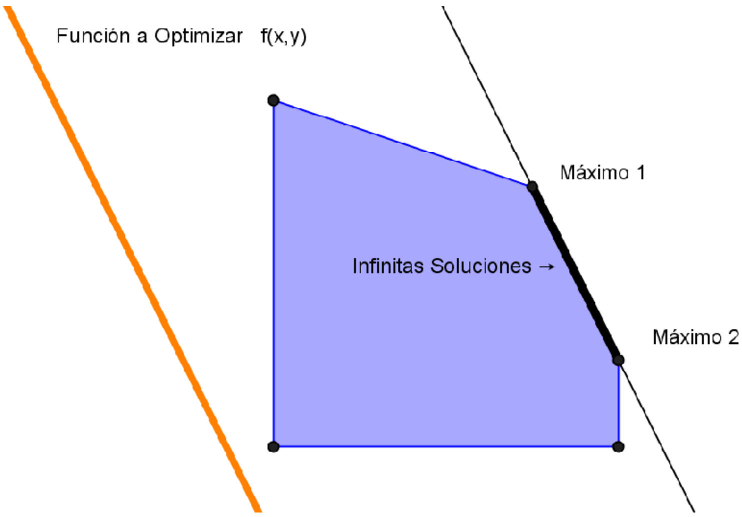

Función a Optimizar f(x,y)
Máximo


Sin Solución


Máximo 1
Infinitas Soluciones →
Máximo 2


Función a Optimizar f(x,y)
Máximo


Función a Optimizar f(x,y)
Sin Solución


Función a Optimizar f(x,y)
Máximo 1
Infinitas Soluciones →
Máximo 2

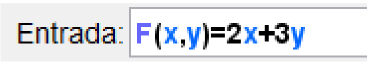
Para describir el proceso de resolución de un problema de programación lineal con GeoGebra, planteamos una nueva actividad.

Actividad 16

Determina los valores que maximizan la función $F(x, y) = 2x + 3y$, sujeta a las siguientes restricciones:

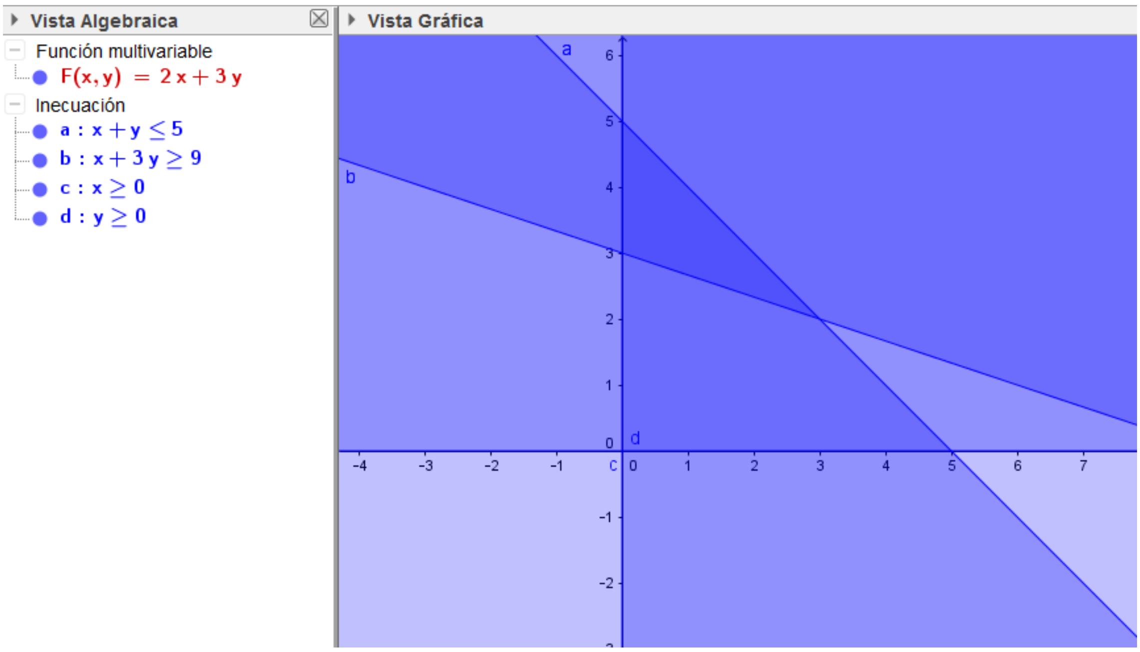
$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar, definimos la función objetivo, introduciendo su expresión a través de la línea de entrada.



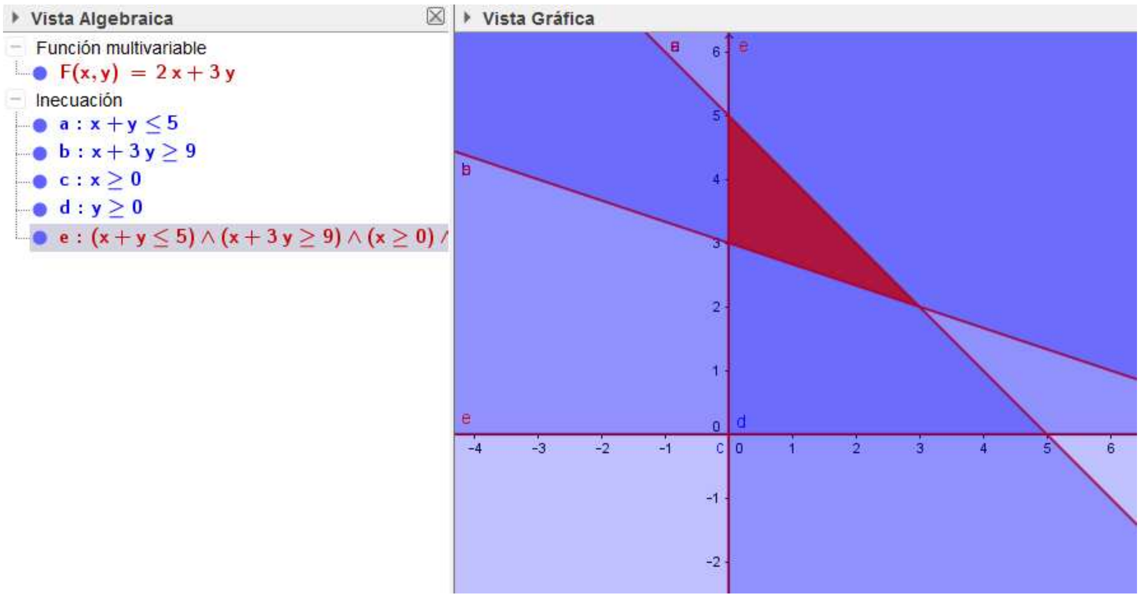
A continuación, representamos cada una de las restricciones, utilizando de nuevo la línea de entrada.

Obtendremos la siguiente representación:

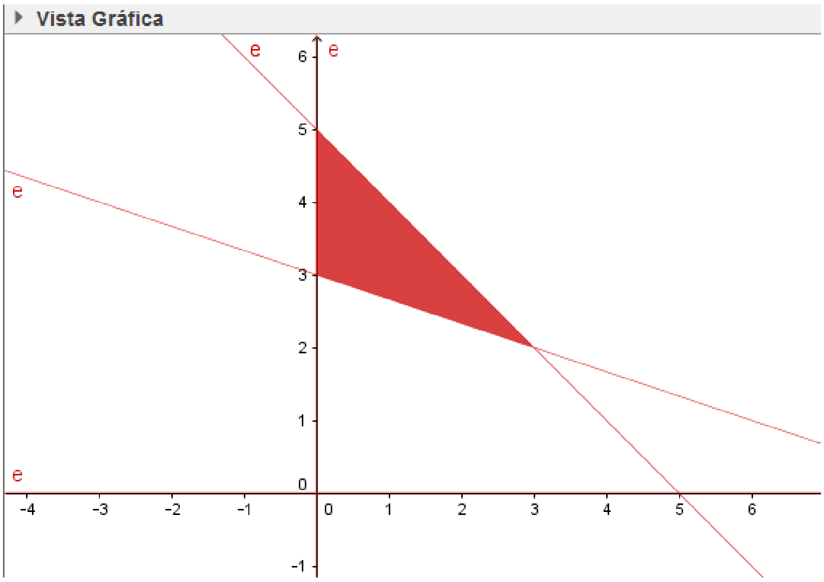


La región factible está formada por el conjunto del plano que verifica todas y cada una de las inecuaciones, por lo que bastará con obtener la intersección de las cuatro restricciones.

Para ello, utilizaremos el operador **∧** escribiendo, también en la línea de entrada la intersección de las cuatro inecuaciones **a ∧ b ∧ c ∧ d**.

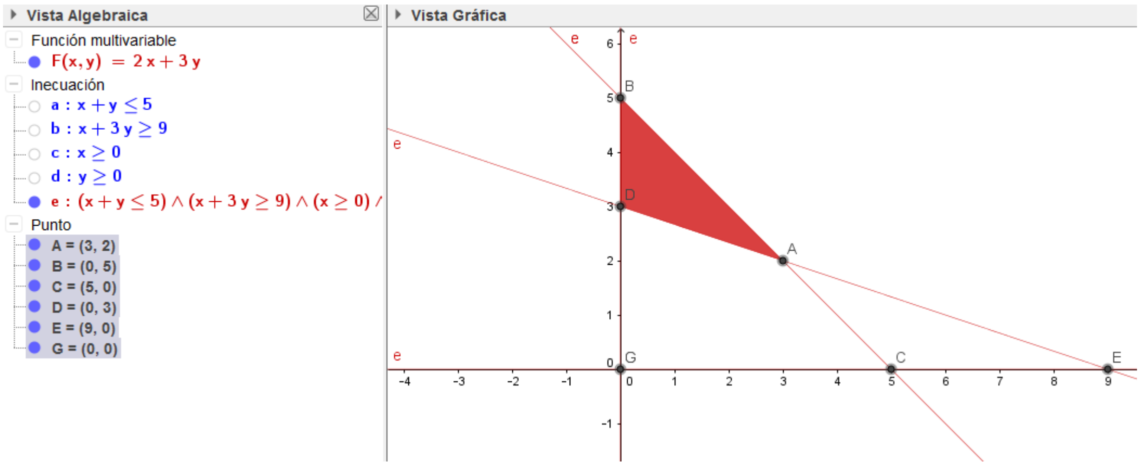


Una vez ocultadas las restricciones iniciales, aparecerá la representación de la región factible.



Recordemos que el conjunto factible se puede obtener directamente sin necesidad de representar previamente cada una de las restricciones, bastaría con escribir la expresión: $(x + y \leq 5) \wedge (x + 3y \geq 9) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$

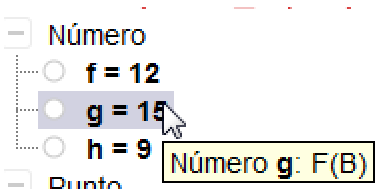
Observamos que la región factible tiene asignado el nombre e, por lo que podemos utilizar el comando **Vértices[e]** para obtener las coordenadas de los vértices del triángulo correspondiente a la región factible. Al ejecutar este comando obtendremos el resultado siguiente:



Aunque aparecen más vértices de los deseados, ya que devuelve todas las posibles intersecciones, nos quedamos con los que corresponden a la región factible que son los que maximizan o minimiza, según el caso, a la función objetivo. En este caso, nos quedamos con los vértices A, B y D.

Ya solo queda obtener el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos, que es posible hallar directamente escribiendo F(A), F(B) y F(D) en la línea de entrada.

Los valores obtenidos aparecerán en la vista algebraica, por lo que bastará con observar cuál es el mayor que en este caso, corresponde al punto B.

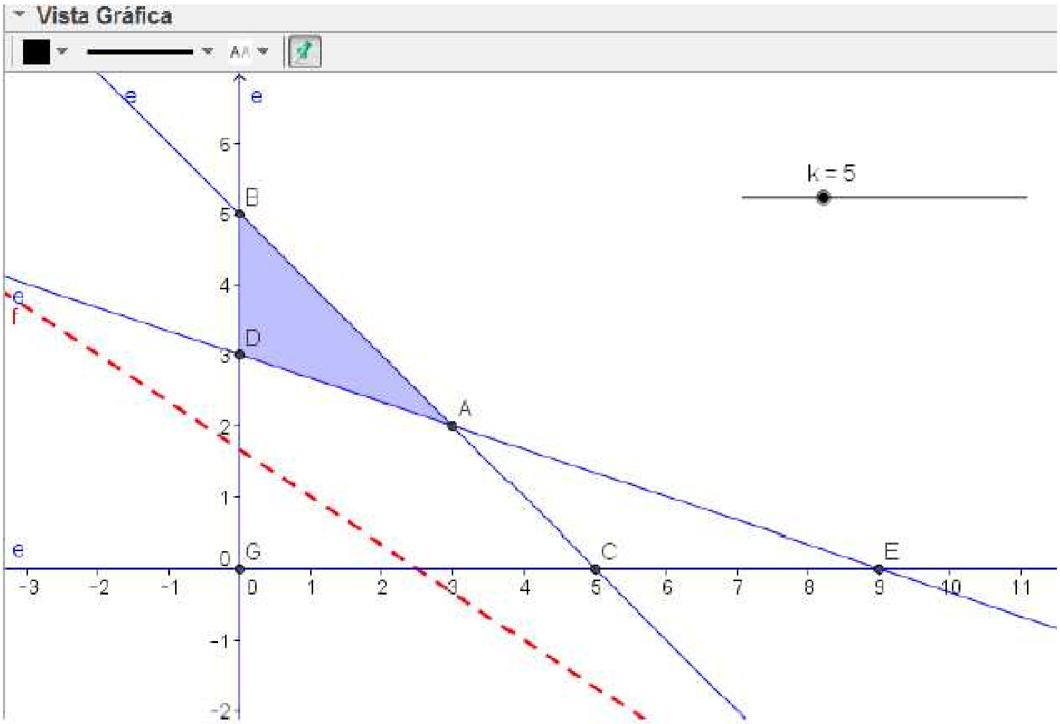


Por tanto, el punto B(0, 5) hace máxima la función objetivo.

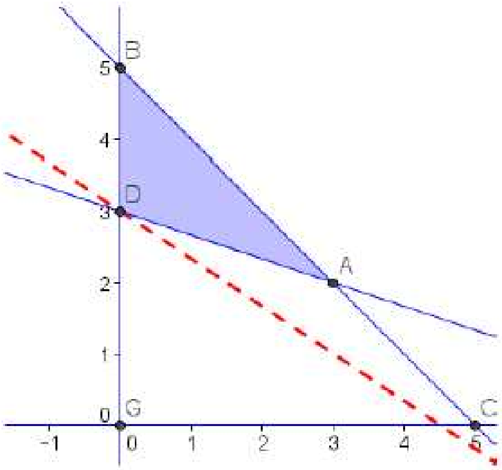
Describimos a continuación, como resolver este mismo problema de manera gráfica, utilizando las rectas de nivel obtenidas a partir de la función objetivo, representando $F(x, y) = k$, dando valores a k

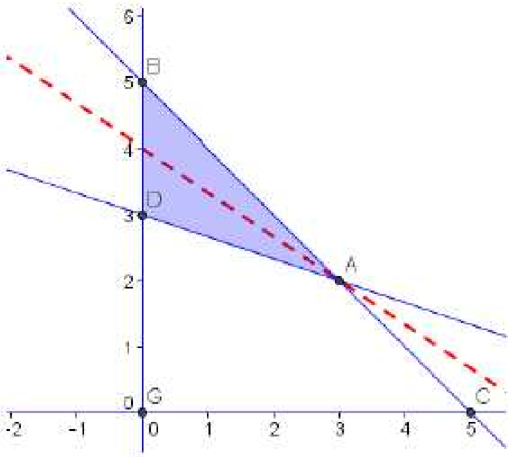
Para ello, necesitamos crear un deslizador para dar valores a k.

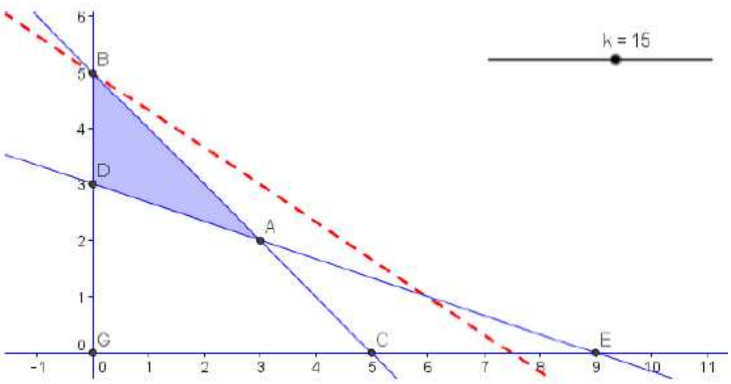
A continuación, representamos la recta $2x + 3y = k$ que corresponde a la expresión de la función objetivo.



Ya solo queda mover el deslizador para obtener el vértice en el que alcanza el mayor valor, que como no podía ser de otra forma, es el vértice B.







Actividad 17

Representa la región que define el sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 3 \\ x + y \leq 10 \\ 2y \geq 3x \end{cases}$$

Halla los puntos en los que se hace máxima y mínima la función F(x,y) = 4x + 3y.

Utiliza para ello los vértices de la región factible del sistema.

Actividad 18

En la región determinada por las inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ 4x + y \geq 8 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Halla el punto en el que la función F(x,y) = 3x + 3y alcanza su mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Utiliza para ello el método de las rectas paralelas.

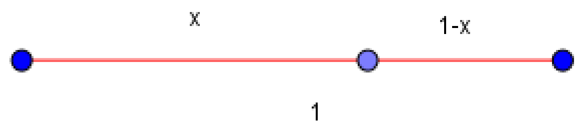
Actividad 19

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo del plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 $ y cada tapiz de tipo B a 3000 $. Si se vende todo lo que se fabrica: ¿cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

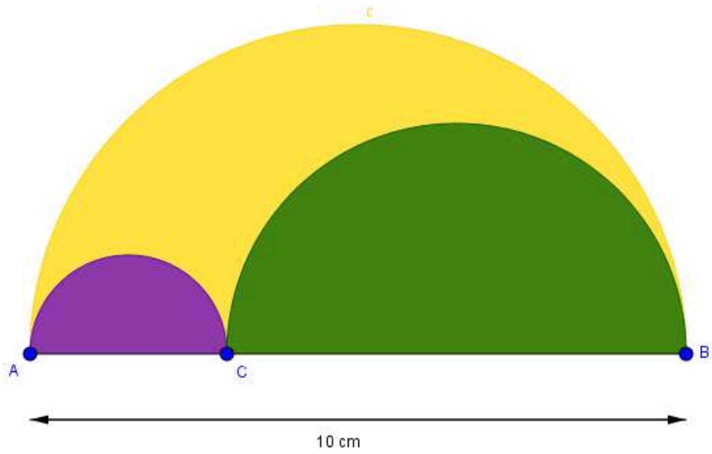
Actividades para investigar III

A. La proporción áurea es aquella que respeta la siguiente condición entre los segmentos de la figura, “El cociente entre el segmento mayor y el menor debe ser igual al cociente entre el segmento mayor y el largo total del segmento, que en este caso vale 1 dm”

Plantea una ecuación y resuélvela para obtener la proporción áurea.



B. Si x es la distancia desde A hasta C, ¿para qué valores de x el perímetro de la semicircunferencia amarilla es mayor o igual que el perímetro de las semicircunferencias morada y verde juntas?



Si x es la distancia desde A hasta C, ¿para qué valores de x el área de la semicircunferencia morada es menor o igual que el área de la semicircunferencia verde?

Si x es la distancia desde A hasta C, ¿para qué valores de x el área de la semicircunferencia amarilla es menor o igual que el área de la semicircunferencia morada?

Si x es la distancia desde A hasta C, ¿para qué valores de x el área de la semicircunferencia amarilla es mayor o que la suma de las áreas de las semicircunferencias morada y verde?