Plans et droites

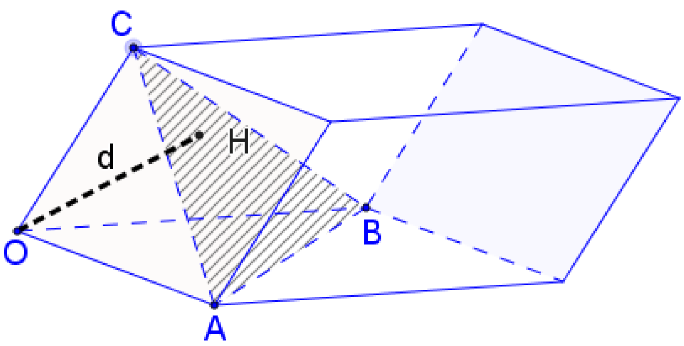
(*Dans la suite, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct* $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$)

Produit vectoriel – Produit mixte

Ex.1

On donne les points A (2 ; 1 ; -1), B (3 ; 2 ; 2) et C (-2 ; 1 ; -3).

1) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Calculer la longueur de la hauteur [AH] du triangle ABC.



Ex.2

On donne les points :

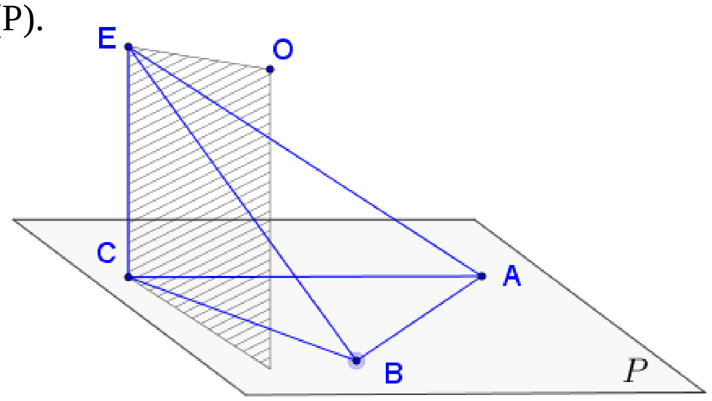
A (3 ;2 ; -3), B (2 ;1 ; -1) et C (4 ; 0 ; 1).

1) Calculer le volume du parallélépipède de côtés [OA], [OB] et [OC].
2) Calculer OH la distance de O au plan (ABC).

Ex.3

On donne les points A (-1 ;2 ; 1), B (-2 ;1 ; 0), C (-1 ; 1 ; -1) et E (1 ; -3 ; 1).

1) Montrer que les A, B et C déterminent un plan (P).
2) Montrer que (EC) est perpendiculaire à (P).
3) Montrer que les plans (OEC) et (P) sont perpendiculaires.
4) a - Montrer les quatre points A, B, C et E sont non coplanaires.
   b - Calculer l'aire du triangle ABC.
   c - Calculer, selon deux méthodes, le volume du tétraèdre EABC.



Ex.4

A, B et C sont trois points donnés.

Déterminer le lieu des points N tels que: $\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NB} \wedge \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Droites et plans

Ex.5

On donne les deux droites distinctes (D) et (D') définies par :

(d) : x = - m + 1, y = 2m, z = - 2m + 3.

(d') : x = t + 3, y = - 2t – 6, z = 2t + 5. Où m et t sont deux paramètres réel.

1) a - Démontrer que (D) et (D') sont parallèles.
   b - Vérifier qu'une équation du plan (P) contenant (D) et (D') est : $4x + y - z - 1 = 0$.

2) Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point B (0 ; 1 ; 1) sur la droite (d).

Ex.6

On considère le plan (P) d'équation $3x - 4y + z = 0$ et le point A (-1 ; 5 ; -3).

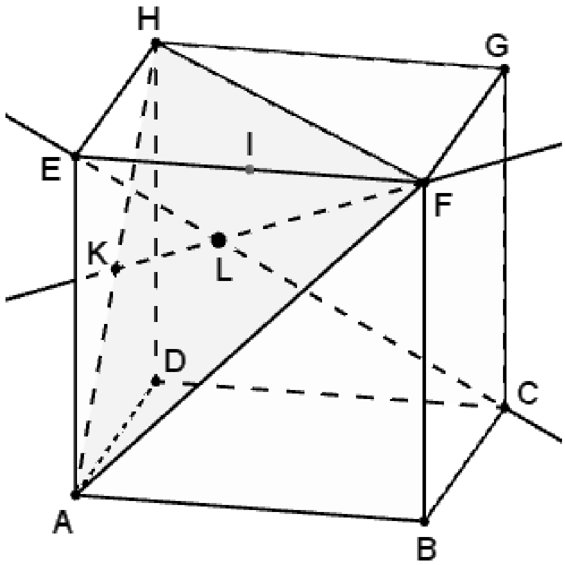
1) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (P).
2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (P).
   Démontrer que les coordonnées de H sont (2 ; 1 ; -2).
3) Calculer la distance de O à (d).
4) a- Déterminer une équation du plan (Q) perpendiculaire à (P) et contenant les points A et O.
   b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de (P) et (Q).

Ex.7

On considère un cube ABCDEFGH d'arête AB = 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.



1) a- Calculer l'aire du triangle IGA.

   b- Calculer le volume du tétraèdre ABIG.

   c- Déduire que la distance du point B au plan (AIG) est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
2) a- Ecrire une équation du plan (AFH).

   b- La droite (CE) coupe le plan (AFH) en un point L.
   Calculer les coordonnées de L.

   c- Montrer que L est un point de la droite (FK).

   d- Montrer que L est le centre de gravité du triangle AFH.

Ex.8

On donne le plan (P) d'équation : $x - 2y + z + 1 = 0$, et les points A (2 ; - 2 ; - 1), B (1 ; 0 ; - 2) et C (2 ; 1 ; - 1).

1) Déterminer une équation du plan (Q) contenant A, B et C.

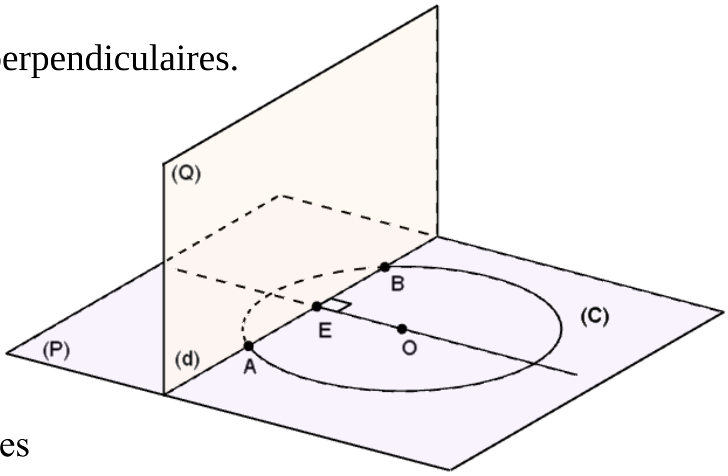
2) Démontrer que les plans (P) et (Q) se coupent suivant la droite (BC).

3) a- Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   b - Calculer la distance de A à (BC).

4) Soit (d) la droite définie par $x = t - 1$, $y = t+1$, $z = t + 2$, où t est un paramètre réel.
   a - Vérifier que (d) est incluse dans (P).
   b - Soit M un point variable de (d) . Démontrer que l'aire du triangle MBC est indépendante de la position de M sur (d).

Ex.9

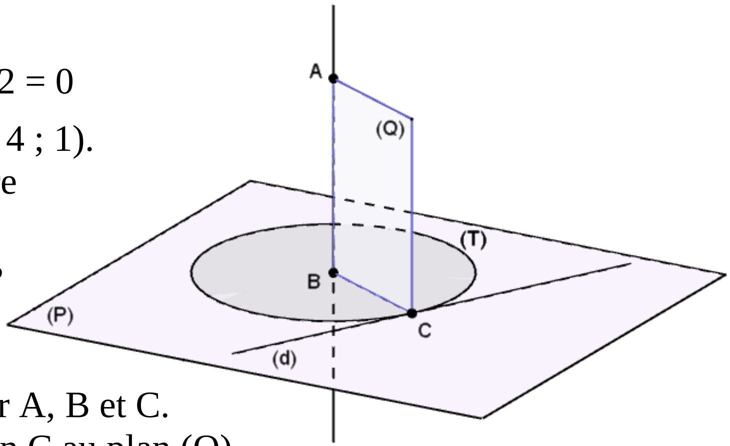
On donne le plan (P) d'équation $2x - y + z = 0$ et le plan (Q) d'équation $x + y - z + 2\sqrt{3} = 0$.
Soit (d) la droite d'intersection de (P) et (Q).



1) Démontrer que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d).
3) On désigne par (C) le cercle du plan (P) de centre O et de rayon 3.
   Démontrer que (d) coupe (C) en deux points A et B, et calculer la longueur du segment [AB].
4) On désigne par E le milieu du segment [AB].
   a - Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (OE).
   b - Déterminer les coordonnées du point F symétrique de O par rapport au plan (Q).

Ex.10

On donne le plan (P) d'équation : $2x + y - 2z - 2 = 0$
et les points A $(-1 ; 1 ; 3)$, B $(1 ; 2 ; 1)$ et C $(0 ; 4 ; 1)$.



1) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire en B au plan (P).
2) Soit (T) le cercle dans le plan (P) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$.
   Montrer que le point C appartient à (T).
3) Ecrire une équation du plan (Q) déterminé par A, B et C.
4) On désigne par (d) la droite perpendiculaire en C au plan (Q).
   a- Donner un système d'équations paramétriques de (d).
   b- Calculer la distance de A à (d).
   c- Démontrer que la droite (d) est tangente au cercle (T).

Ex.11

On considère le point A $(1 ; 0 ; 1)$ et les deux plans (P) et (Q) d'équations respectives
$2x - y - 2 = 0$ et $x + 2y - z = 0$.
1) a- Vérifier que A est un point commun à (P) et (Q).
   b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) intersection de (P) et (Q).

2) a- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (D) perpendiculaire en A à (P).
   b- Calculer les coordonnées d'un point E de (D) tel que $AE = \sqrt{5}$.

3) a- Montrer que les points B $(0 ; -2 ; 0)$ et C $(2 ; 2 ; t)$ appartiennent à (P). (t est un réel)
   b- Calculer t pour que le triangle ABC soit rectangle en B et trouver dans ce cas le volume du tétraèdre EABC.

Ex.12

On donne les points : A (0 ; 1 ; – 2), B (2 ; 1 ; 0), C (3 ; 0 ; – 3) et H (2 ; 2 ; – 2).

1) Montrer que $x - 2y - z = 0$ est une équation du plan (P) déterminé par les points H, A et B et vérifier que le point C n'appartient pas à ce plan.

2) a- Montrer que le triangle HAB est isocèle en H.

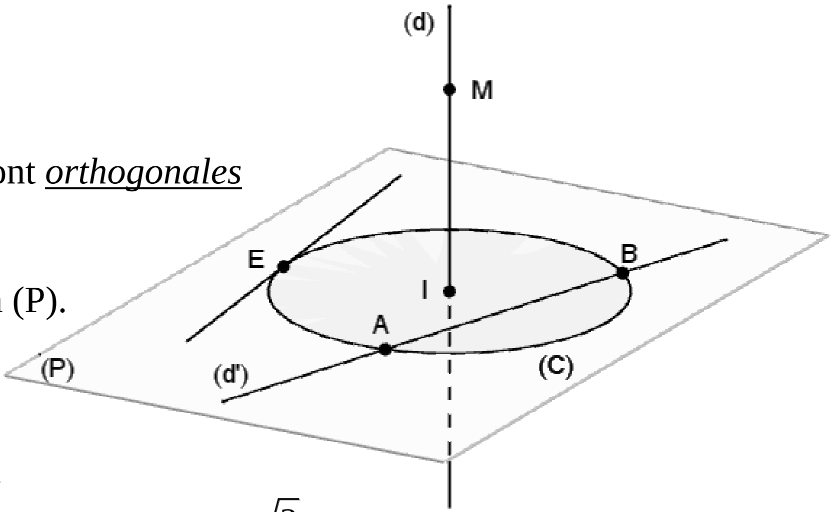
b- Montrer que (CH) est perpendiculaire à (P).

c- Prouver que CA = CB et déterminer un système d'équations paramétriques de la bissectrice intérieure (δ) de l'angle $\widehat{ACB}$.

3) Soit T le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC).
Montrer que T appartient à (δ).

Ex.13

On donne le plan (P) d'équation $x - y - z + 1 = 0$ et les droites (d) et (d') définies par :
(d) : $x = m$; $y = -m$; $z = -m + 1$ et
(d') : $x = -t + 1$; $y = t$; $z = -2t + 2$
(m et t sont des paramètres réels).



1) Démontrer que les droites (d) et (d') sont *orthogonales* et ne *sont pas coplanaires*.

2) a- Prouver que (d) est perpendiculaire à (P).
b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (d) et (P).

3) Prouver que (d') est contenue dans (P).

4) Montrer que la distance de I à la droite (d') est égale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Soit (C) le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$, contenu dans le plan (P).
a- Montrer que (C) coupe la droite (d') en deux points A et B.
b- Montrer que la longueur du segment [AB] est égale $\sqrt{6}$.
c- Trouver l'équation de la bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$.

6) M est un point de (d).
Calculer les coordonnées de M, pour que le volume du tétraèdre MABI soit égale $\dfrac{1}{2}$

7) a- Montrer que E (1 ; 0 ; 2) est un point de (C).
b- Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) en E.