Coordenadas cilíndricas y esféricas

Larson, R. & Edwards, B. (2010). CÁLCULO 2 de varias variables. 9ª Edición. Mc.GRAW-HILL. México.
Pérez, J. & Paniagua, J. (2016). Geometría Analítica e introducción al Análisis Vectorial. 1ª Edición. Fondo Editorial ITM. Medellin.

Coordenadas cilíndricas

Ya se ha visto que algunas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Algo semejante ocurre con las superficies en el espacio. En esta sección se estudiarán dos sistemas alternativos de coordenadas espaciales. El primero, el **sistema de coordenadas cilíndricas**, es una extensión de las coordenadas polares del plano al espacio tridimensional.

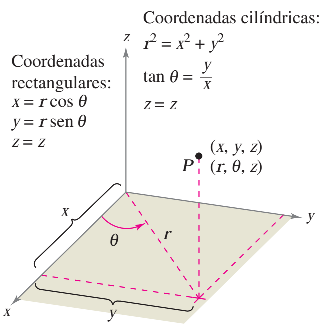


Figura 11.66

EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

En un **sistema de coordenadas cilíndricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (r, θ, z).

1. (r, θ) es una representación polar de la proyección de P en el plano xy.
2. z es la distancia dirigida de (r, θ) a P.

Para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas (o viceversa), hay que usar las siguientes fórmulas, basadas en las coordenadas polares, como se ilustra en la figura 11.66.

Cilíndricas a rectangulares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z$$

Al punto (0, 0, 0) se le llama el **polo**. Como la representación de un punto en el sistema de coordenadas polares no es única, la representación en el sistema de las coordenadas cilíndricas tampoco es única.

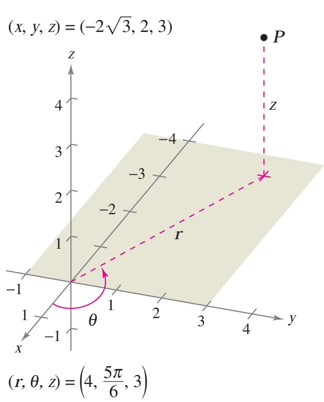


Figura 11.67

EJEMPLO 1 Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Convertir el punto $(r, \theta, z) = \left(4, \dfrac{5\pi}{6}, 3\right)$ a coordenadas rectangulares.

Solución Usando las ecuaciones de conversión de cilíndricas a rectangulares se obtiene

$$x = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$z = 3.$$

Por tanto, en coordenadas rectangulares, el punto es $(x, y, z) = \left(-2\sqrt{3}, 2, 3\right)$, como se muestra en la figura 11.67.

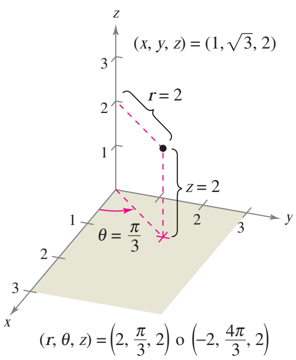


Figura 11.68

EJEMPLO 2 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Convertir el punto $(x, y, z) = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ a coordenadas cilíndricas.

Solución Usar las ecuaciones de conversión de rectangulares a cilíndricas.

$$r = \pm\sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$z = 2$$

Hay dos posibilidades para r y una cantidad infinita de posibilidades para θ. Como se muestra en la figura 11.68, dos representaciones adecuadas del punto son

$$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right) \qquad r > 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante I.}$$

$$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right). \qquad r < 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante III.}$$

Ejemplo 8.1.1 *Hallar las coordenadas cilíndricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son* $(2, -1, 4)$.

Solución

La situación descrita se muestra en la Figura 8.2.

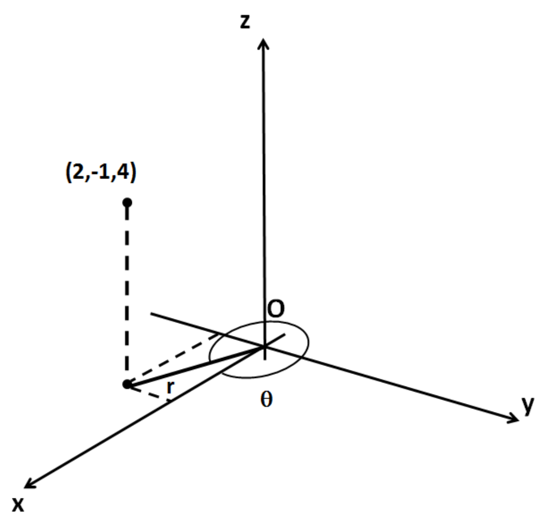


Figura 8.2: Coordenadas cilíndricas del punto $(2, -1, 4)$

Las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) son:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$
$$r = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Luego las coordenadas cilíndricas del punto son $\left(\sqrt{5}\,, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), 4\right)$.

Coordenadas esféricas

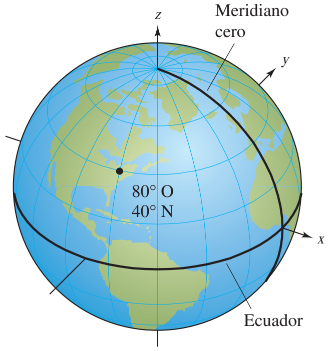


Figura 11.74

En el **sistema de coordenadas esféricas**, cada punto se representa por una terna ordenada: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera coordenadas son ángulos. Este sistema es similar al sistema de latitud-longitud que se usa para identificar puntos en la superficie de la Tierra. Por ejemplo, en la figura 11.74 se muestra el punto en la superficie de la Tierra cuya latitud es 40° Norte (respecto al ecuador) y cuya longitud es 80° Oeste (respecto al meridiano cero). Si se supone que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4 000 millas, este punto sería

$$(4\,000,\ -80°,\ 50°).$$

Radio — 80° en el sentido de las manecillas del reloj, desde el meridiano cero — 50° hacia abajo del Polo Norte

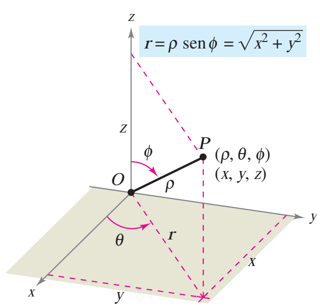
EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

En un **sistema de coordenadas esféricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (ρ, θ, ϕ).

1. ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$.
3. ϕ es el ángulo *entre* el eje z positivo y el segmento de recta $\overrightarrow{OP}$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Hay que observar que la primera y tercera coordenadas, ρ y ϕ, son no negativas. ρ es la letra minúscula *ro*, y ϕ es la letra griega minúscula *fi*.

La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas se ilustra en la figura 11.75. Para convertir de un sistema al otro, usar lo siguiente.



Coordenadas esféricas
Figura 11.75

Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \rho \cos \phi$$

Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Para cambiar entre los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, usar lo siguiente.

Esféricas a cilíndricas $(r \geq 0)$*:*

$$r^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos \phi$$

Cilíndricas a esféricas $(r \geq 0)$*:*

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad \theta = \theta, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

Ejemplo 8.2.1 *Hallar las coordenadas esféricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son* $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.

Solución

En la Figura 8.5 se muestra la ubicación del punto dado.
Con $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 2\sqrt{3}$ y reemplazando en las expresiones que relacionan las coordenadas rectangulares con las esféricas, tenemos:

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2}}\right)$$

$$r = 4 \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \qquad \phi = \frac{\pi}{6}$$

Entonces, las coordenadas esféricas del punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ son $\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

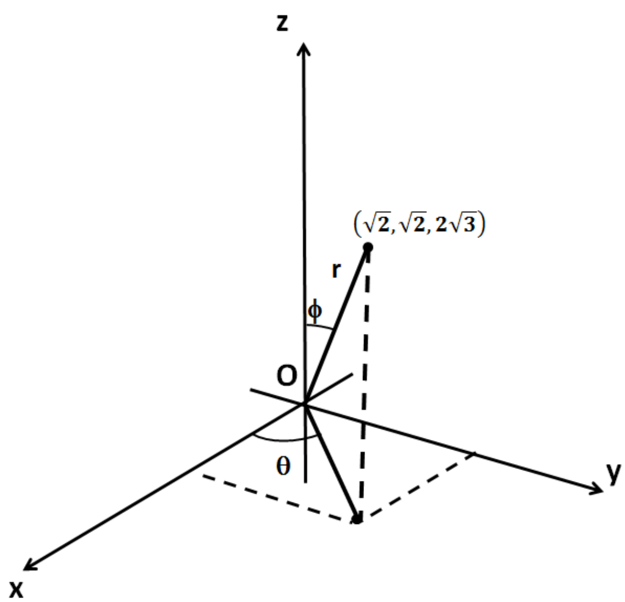


Figura 8.5: Coordenadas esféricas del punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$

Ejemplo 8.2.2 *Hallar las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas esféricas son* $\left(3, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

En la Figura 8.6 se muestra la situación dada.
Sabiendo que $r = 3$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ y $\phi = \dfrac{3\pi}{4}$ obtenemos:

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = r\cos\phi$$

$$x = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad y = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad y = \frac{3\sqrt{6}}{4} \qquad z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto dado en coordenadas esféricas $\left(3, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ son $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

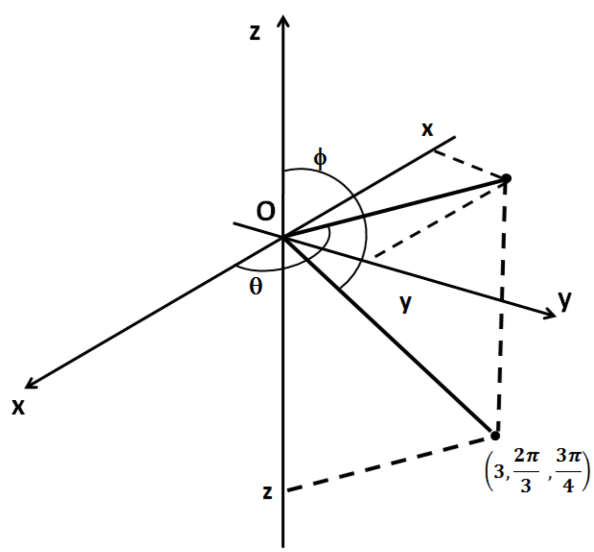


Figura 8.6: Coordenadas rectangulares del punto $\left(3, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

11.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares.

1. $(-7, 0, 5)$

2. $(2, -\pi, -4)$

3. $(3, \pi/4, 1)$

4. $(6, -\pi/4, 2)$

5. $(4, 7\pi/6, 3)$

6. $(-0.5, 4\pi/3, 8)$

En los ejercicios 7 a 12, convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas.

7. $(0, 5, 1)$

8. $\left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\right)$

9. $(2, -2, -4)$

10. $(3, -3, 7)$

11. $\left(1, \sqrt{3}, 4\right)$

12. $\left(2\sqrt{3}, -2, 6\right)$

En los ejercicios 29 a 34, convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas.

29. $(4, 0, 0)$

30. $(-4, 0, 0)$

31. $\left(-2, 2\sqrt{3}, 4\right)$

32. $\left(2, 2, 4\sqrt{2}\right)$

33. $\left(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3}\right)$

34. $(-1, 2, 1)$

En los ejercicios 35 a 40, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas rectangulares.

35. $(4, \pi/6, \pi/4)$

36. $(12, 3\pi/4, \pi/9)$

37. $(12, -\pi/4, 0)$

38. $(9, \pi/4, \pi)$

39. $(5, \pi/4, 3\pi/4)$

40. $(6, \pi, \pi/2)$

En los ejercicios 57 a 64, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.

57. $(4, \pi/4, 0)$

58. $(3, -\pi/4, 0)$

59. $(4, \pi/2, 4)$

60. $(2, 2\pi/3, -2)$

61. $(4, -\pi/6, 6)$

62. $(-4, \pi/3, 4)$

63. $(12, \pi, 5)$

64. $(4, \pi/2, 3)$

En los ejercicios 65 a 72, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.

65. $(10, \pi/6, \pi/2)$

66. $(4, \pi/18, \pi/2)$

67. $(36, \pi, \pi/2)$

68. $(18, \pi/3, \pi/3)$

69. $(6, -\pi/6, \pi/3)$

70. $(5, -5\pi/6, \pi)$

71. $(8, 7\pi/6, \pi/6)$

72. $(7, \pi/4, 3\pi/4)$

En los ejercicios 73 a 88, usar un sistema algebraico por compu tadora o una herramienta de graficación para convertir las coo denadas del punto de un sistema a otro, entre los sistemas c coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

	Rectangulares	*Cilíndricas*	*Esféricas*
73.	$(4, 6, 3)$		
74.	$(6, -2, -3)$		
75.		$(5, \pi/9, 8)$	
76.		$(10, -0.75, 6)$	
77.			$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
78.			$(7.5, 0.25, 1)$
79.	$(3, -2, 2)$		
80.	$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -3)$		
81.	$(5/2, 4/3, -3/2)$		
82.	$(0, -5, 4)$		
83.		$(5, 3\pi/4, -5)$	
84.		$(-2, 11\pi/6, 3)$	
85.		$(-3.5, 2.5, 6)$	
86.		$(8.25, 1.3, -4)$	
87.			$(3, 3\pi/4, \pi/3)$
88.			$(8, -\pi/6, \pi)$