Primeira Lista de Álgebra Linear I - 2023.1
Professora Fátima

1. A tabela abaixo apresenta o gasto calórico aproximado de uma pessoa de 60kg, em decorrência de algumas atividades físicas, no decorrer de uma hora.

| Bicicleta | Caminhada | Corrida | Hidroginástica |
|---|---|---|---|
| 252 | 552 | 890 | 300 |

Diana, que tem 60kg, segue o seguinte programa de atividades:

| Dia | Bicicleta | Caminhada | Corrida | Hidroginástica |
|---|---|---|---|---|
| segunda | 1 | 0 | 0 | 1 |
| terça | 0 | 0 | 1 | 0 |
| quarta | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 |
| quinta | 0 | 0 | 0,5 | 1,5 |
| sexta | 0,5 | 1 | 0 | 0 |

Quantas calorias Diana queima em cada dia da semana, em virtude dos exercícios? Tente descrever sua solução em termos de matrizes.

2. Considere as informações das tabelas abaixo:

| | Vitória | Empate | Derrota |
|---|---|---|---|
| Time A | 2 | 0 | 1 |
| Time B | 0 | 1 | 2 |
| Time C | 1 | 1 | 1 |
| Time D | 1 | 2 | 0 |

| | |
|---|---|
| Vitória | 3 pontos |
| Empate | 1 ponto |
| Derrota | 0 pontos |

Quantos pontos cada time fez? Procure descrever sua solução em termos de matrizes.

3. Em um jogo de adivinhação, em cada erro perde-se 1 ponto e cada acerto vale 2 pontos. Tendo ocorrido 5 jogadas, um participante obteve um saldo de 4 pontos. Quantos foram os erros cometidos pelo participante?

4. Um ponto ponto material que se encontra na origem está sujeito a uma força resultante F=(5,4), que é a adição de duas forças: uma que é

proporcional ao vetor $u = (1, -1)$ e outra que é proporcional ao vetor $v = (1, 2)$. Encontre as constantes de proporcionalidade $x$ e $y$ tal que $F = xu + yv$. Interprete geometricamente. Observação: Dizemos que $F$ é uma combinação linear dos vetores $u$ e $v$.

5. Em cada caso, escreva o vetor $w$ como combinação linear dos vetores $u$ e $v$. Interprete geometricamente.

   (a) (sorteio i) $u = (4, 1)$, $v = (-1, 1)$ e $w = (3, 5)$.

   (b) (sorteio ii) $u = (2, 3)$, $v = (5, 1)$ e $w = (2, -10)$.

6. Em uma animação de computador onde cada ponto $(x, y)$ do plano é levado no ponto $T(x, y) = (x+y, -x+2y)$, pede-se encontrar que ponto do plano foi levado em (5,4).

7. Seja $p = (10, 5, 3, 2)$ o vetor-preço de uma lista de produtos e $q = (2, -1, 4, 1)$, a respectiva quantidade dos produtos vendidos ou comprados, sendo que o sinal positivo indica que o referido produto foi vendido e o sinal negativo indica que ele foi comprado. Calcule o saldo obtido com os produtos. Observação: Este saldo pode ser obtido a partir do pruduto interno (ou produto escalar):

$$p \bullet q = (p_1, p_2, p_3, p_4) \bullet (q_1, q_2, q_3, q_4) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4$$

8. Considere o sistema:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

   (a) Suponha que o sistema tenha solução. Se substituirmos a primeira linha do sistema por um múltiplo não nulo dela, o novo sistema obtido possuirá a mesma solução do original?

   (b) Suponha que o sistema tenha solução. Se substituirmos a primeira linha do sistema pela soma desta linha com um múltiplo da segunda linha, o sistema assim obtido possuirá a mesma solução do original?

9. Considere o sistema:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

Na forma matricial, este sistema se escreve como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

E na forma que chamaremos de "vetorial"ele pode ser escrito como: $x(a, c) + y(b, d) = (e, f)$, ou ainda, $xu + yv = w$, onde:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Repare que neste modelo, o vetor $w$ é visto como uma combinação linear dos vetores-coluna $u$ e $v$ da matriz dos coeficientes do sistema. Levando em conta esta notação, considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y & = & 5 \\ -x + 2y & = & 4 \end{cases}$$

(a) Resolva-o, no caso de ser possível, e justifique, quando não houver solução.

(b) Esboce o gráfico das retas que aparecem na primeira e na segunda linha, e interprete a solução como o ponto de encontro das retas.

(c) Reescreva-o na forma matricial, onde $M$ é a matriz dos coeficientes. Se M for uma matriz quadrada, calcule o seu determinante.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(d) Sejam $l_1 = (a, b)$, $l_2 = (c, d)$ e $X = (x, y)$. Calcule: $l_1 \bullet X$ e $l_2 \bullet X$. O que você observa?

(e) Reescreva o sistema na forma vetorial. Esboce os vetores $u$, $v$ e $w$ no mesmo plano cartesiano. Interprete geometricamente o resultado encontrado.

(f) Relacione $|det(M)|$ com a área do paralelogramo determinado pelos vetores $u$ e $v$, que são os vetores-coluna da matriz M.

(g) Determine o posto da matriz M dos coeficientes. Para isto, escreva antes M na foram escada. Determine também o posto da matriz $A$ ampliada do sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

Se os postos de $M$ e de $A$ coinciderem, compare o valor encontrado com o número $n$ de incógnitas do sistema.

**Lembrete:** O posto de uma matriz é o número de linhas não nulas da matriz escada correspondente à matriz.

(h) Econtre novamente a solução sistema original, utilizando-se a forma escada da matriz ampliada obtida no item anterior.

10. Repita o exercício anterior para os sistemas:

    (a) (sorteio iii))

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x+2y &= 10 \end{cases}$$

    (b) (sorteio iv))

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x+2y &= 20 \end{cases}$$

    (c) (sorteio v))

$$\begin{cases} 3x+5y &= 8 \\ -2x+9y &= 7 \end{cases}$$

11. (RPM 41) Um pesado caminhão parte ao meio-dia da cidade A para a cidade B viajando com velocidade constante de 40 km/h, e às 6 horas da tarde chega à cidade B. Um automóvel parte da cidade B às 2 horas da tarde desse dia e, viajando com velocidade constante pela mesma estrada, chega à cidade A também às 6 da tarde. Pergunta-se em que momento o caminhão e o automóvel se cruzaram na estrada.

12. Crie um sistema com duas equações e duas incógnitas, de modo que:

    (a) As duas retas correspondentes às linhas do sistema coincidam.

    (b) As duas retas correspondentes às linhas do sistema sejam paralelas.

    (c) O sistema possua uma única solução.

13. Decida se os sistemas lineares abaixo são possíveis, ou não. No caso dos sistemas possíveis, apresente a solução. Se o sistema for impossível, justifique. Além disso, encontre o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz ampliada de cada um dos sistemas, caso seja o mesmo, compare-o com o número de incógnitas do sistema.

(a)

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x-y+5z &= -4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+2y+2z &= 5 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+2y+2z &= 2 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+2y+2z &= 2 \\ 3x+3y+3z &= 3 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \\ x+y+z &= 3 \end{cases}$$

(f) (RPM 32)

$$\begin{cases} 2x-3y+2z &= 2 \\ 3x-2y+4z &= 2 \\ 4x-y+6z &= 3 \end{cases}$$

(g) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x+2y-z &= 3 \\ 2x+4y-2z &= 6 \\ 3x+6y-3z &= 9 \end{cases}$$

(h) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x+2y-z &= 3 \\ 2x+4y-2z &= 6 \\ 3x+6y-3z &= 8 \end{cases}$$

(i) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x+2y-z &= 3 \\ 2x+4y-2z &= 6 \\ 3x+6y+z &= 9 \end{cases}$$

(j) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 4 \\ 3x + 6y - 3z &= 5 \end{cases}$$

(k) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 5 \\ x + 2y + z &= 9 \end{cases}$$

(l) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 5x + 2y + 4z &= 6 \end{cases}$$

(m) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x + y + z &= 2 \\ 8x + y + 6z &= 6 \end{cases}$$

(n) (Vol 3 - A Matemática do Ensino Médio)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{cases}$$

(o) (sorteio vi)

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ x - y + 2z &= -2 \\ -5x + 7y - z &= 1 \end{cases}$$

(p) (sorteio vii)

$$\begin{cases} 5x - y + z &= 2 \\ -2x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

(q) (sorteio viii)

$$\begin{cases} 4x - y + z &= 2 \\ -2x - y + 4z &= 3 \\ 2x - 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

14. Crie um sistema com três equações e três incógnitas, de modo que:

    (a) Os três planos coincidam.

    (b) Apenas dois planos coincidam, e a solução do sistema seja uma reta.

    (c) Os três planos sejam paralelos.

    (d) Dois planos sejam paralelos, e o terceiro os intersecte segundo retas paralelas.

    (e) Três planos distintos têm uma reta em comum.

    (f) O sistema seja impossível, mas três planos distintos se intersectem dois a dois.

    (g) O sistema possua uma única solução.

    **Lembrete 1:** Dizemos que $V$ é um espaço vetorial sobre o corpo $K$ quando além do fechamento da operações de adição $(+ : V \times V \to V)$ e multiplicação por escalar $(. : K \times V \to V)$, as propriedades abaixo são satisfeitas:

    i) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$

    ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$

    iii)$\exists\ 0 \in V$, tal que $u + 0 = u$, $\forall u \in V$ (elemento neutro).

    iv)Para cada $u \in V$, $\exists -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$

    v)$s(u + v) = su + sv$, $\forall u, v \in V$, $\forall s \in K$

    vi) $(s + t)v = sv + tv$, $\forall v \in V$, $\forall s, t \in K$

    vii)$(st)v = s(tv)$, $\forall v \in V$, $\forall s, t \in K$

    viii))$\exists\ 1 \in K$, tal que $1v = v$, $\forall v \in V$

    **Lembrete 2**: Considerando-se o exposto acima, dizemos que $S \subset V$ é um *subespaço vetorial* de $V$ se $S$ é ainda um espaço vetorial sobre o mesmo corpo e com as mesmas operações.

**Conjunto LI e LD**: Um subconjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial real é um conjunto linearmente independente(LI),quando a única solução para a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$$

for

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e "0"significa o elemento neutro do espaço vetorial $V$.

Caso contrário dizemos que o conjunto é linearmente dependente(LD). Observe que se algum $a_i$ for não nulo, $v_i$ poderá ser escrito como combinação linear dos outros vetores.

15. Diga se os seguintes conjuntos são LD ou LI. Justifique sua resposta. Interprete geometricamente.

    (a) $\{(1,2),(3,4)\}$
    (b) (sorteio ix)) $\{(-1,5),(4,1)\}$
    (c) $\{(1,2),(-3,-6)\}$
    (d) $\{(-1,2),(2,-4)\}$
    (e) (sorteio x)) $\{(-1,-2),(1,2)\}$
    (f) $\{(1,2),(3,4),(7,10)\}$
    (g) $\{(1,0,1),(2,1,0)\}$
    (h) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,0)\}$
    (i) $\{(1,2,3),(1,4,5),(2,6,8)\}$
    (j) (sorteio xi)) $\{(1,2,3),(1,4,5),(3,10,13)\}$
    (k) $\{(1,2,3),(1,4,5),(1,0,0)\}$
    (l) $\{(1,2,3),(2,4,6),(1,0,0)\}$
    (m) (sorteio xii)) $\{(1,0,2),(0,-1,3),(0,0,5)\}$
    (n) $\{(1,2,3),(1,4,5),(1,0,0),(-5,6,7)\}$

**Base de um espaço vetorial** Dizemos que o conjunto ordenado $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ é uma base para o espaço vetorial real $V$ se e só se ocorrem as duas condições:

1. $V$ é gerado por $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ , isto é,

$$V = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n, \text{ onde } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Re\}$$

   Em decorrência desta última igualdade acima segue-se que:

   - Dado $v \in V$ existem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$

   - Se um vetor não pertence a $V$, ele não é combinação linear dos vetores de $\beta$.

2. $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente(LI), isto é,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

   Note que a recíproca da afirmação é sempre verdadeira. É preciso estar atento(a) ao "sentido da seta".

Se $V \neq \{0\}$, a dimensão de $V$ é o número de elementos da base. Um subconjunto de um espaço vetorial é linearmente dependente(LD) quando ele não é linearmente independente.

1. Diga se os conjuntos abaixo são ou não espaços vetoriais reais. Em caso positivo, encontre uma base e determine a dimensão. Caso contrário, justifique.

   (a) $\{-1, 0, 1\}$
   (b) O conjunto dos números naturais.
   (c) O conjunto dos números inteiros.
   (d) O conjunto dos números racionais.
   (e) O conjunto dos números reais.
   (f) $R^2$
   (g) $\{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$
   (h) $R^3$
   (i) $\{(0,0)\}$
   (j) $R^4$

(k) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, 3x - 2y + 4z = 0\}$

(l) $\{(t-1, t+1, t), t \in \mathbf{R}\}$

(m) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$

(n) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 1\}$

(o) $\{s(1,0,-1) + t(1,1,-2), s, t \in \mathbf{R}\}$

(p) $\{s(1,0,-1) + t(1,1,-2) + k(2,1,-3), s, t, k \in \mathbf{R}\}$

(q) $\{(x,y) \in \mathbf{R}, \text{ tal que } y = x + 1\}$

2. Neste exercício, $< u_1, u_2, \ldots, u_n >$ denota o espaço vetorial real gerado pelos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Para cada um dos espaços vetoriais reais abaixo, determine uma base e a dimensão. Além disso, caso ele seja um plano do $\Re^3$ passando na origem, encontre uma equação para este plano no formato $ax + by + cz = 0$.

   (a) $<$(1,0,-1),(2,1,0)$>$

   (b) $<$(1,3,5),(1,1,1),(3,2,1)$>$

   (c) $<$(1,1,5),(-1 ,1,1),(4,-3,-1)$>$

   (d) (sorteio xiii))$<$(1,1,5),(0,1,3),(1,-1,-1)$>$

3. Verdadeiro ou falso? Justifique.

   (a) Seja $X = \{(2t, 0), t \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, 3s), s \in \mathbf{R}\}$. Então $X$ é um espaço vetorial.

   (b) Seja $X = \{t(1,-1,2) + s(2,0,1) + r(3,-1,4), r, s, t \in \mathbf{R}\}$. Então $X = \mathbf{R}^3$

   (c) O conjunto $\{(1,1,-1), (-2,3,-1), (-4,11,-5)\}$ é linearmente dependente.

   (d) Seja $X = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + z = 0\}$. Então $X$ é um espaço vetorial real.

4. Seja $\beta = \{(3,1), (-1,2)\}$ Encontre $v_\beta$, ou seja, as coordenadas do vetor $v$ na base $\beta$, para cada um dos vetores abaixo. Interprete geometricamente:

   (a) $v = (11, 13)$

   (b) $v = (-6, 5)$

(c) (sorteio xiv)) $v = (3, 1)$

(d) (sorteio xv)) $v = (-1, 2)$

5. Seja $\beta = \{(3, 1), (-1, 2)\}$. Encontre $M_\epsilon^\beta$, a matriz que muda os vetores da base $\beta$ para a base canônica $\epsilon = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Encontre também sua inversa, a matriz $M_\beta^\epsilon$. Confira o exercício anterior usando estas matrizes.

6. Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 2), (0, -2, 3)\}$ Encontre $v_\beta$, ou seja, as coordenadas do vetor $v$ na base $\beta$, para cada um dos vetores abaixo. Interprete geometricamente:

   (a) $v = (-1, -5, 13)$ **R**: $v_\beta = (1, 2, 3)$

   (b) $v = (-1, -4, 8)$ **R**: $v_\beta = (0, 1, 2)$

7. Prove que se uma matriz $2 \times 2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é invertível, então sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

   Sugestão: Verifique que o produto das matrizes $A$ e $A^{-1}$ resulta na matriz identidade.

8. Decida se cada uma das matrizes abaixo é invertível ou não. Calcule a inversa das matrizes invertíveis.

   (a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) (sorteio xvi))

$$Z = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(f) (sorteio xvii) )

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(g) (sorteio xviii))

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Calcule o determinante das seguintes matrizes. No caso das matrizes $2 \times 2$, interprete geometricamente:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \\ 6 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

(b) (sorteio xix))

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(d) (sorteio xx)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Sejam $A$, $B$ e $C$ dadas por:

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+7a & e+7b & f+7c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Suponha que o determinante da matriz $A$ seja igual a 5. Calcule: $det(B)$, $det(C)$, $det(A^{-1})$, $det(3A)$, $det(-A)$, $det(A^3)$.

11. Sejam $A$, $B$ e $C$ dadas por:

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Suponha que o determinante da matriz $A$ seja igual a 10. Calcule:

(a) (sorteio xxi)) $det(B)$, $det(C)$, $det(A^{-1})$.

(b) (sorteio xxii)) $det(2A)$, $det(AB)$.