Instrucciones:

a) Duración: 1 hora

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$$C(x) = 0.2x^2 - 50x + 2500$$

Si cada bolso se vende a 90 euros, se pide:

a) [0,5 puntos] Determinar la función beneficio (ingresos menos coste) en función de x (número de unidades producidas), asumiendo que se vende todo lo que se produce.

b) [1 punto] ¿Cuántas unidades deben venderse para que los beneficios sean máximos? Hallar el valor de dichos beneficios máximos.

c) [1 punto] Dentro del intervalo [200, 300] ¿cuántos bolsos deben venderse, como mínimo, para que el beneficio alcance la cantidad de los 19.000 euros?

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si \;\; x \leq 1 \\ a + \ln(x) & si \;\; x > 1 \end{cases}$

a) [1 punto] Encontrar a para que la función sea continua en $x = 1$.

b) [1,5 puntos] Para $a = 0$ hallar el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$ e $y = 1$. Realiza un boceto del área.

Ejercicio 3.- a) [2 puntos] Calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro a.

b) [0,5 puntos] Considera las matrices de orden dos $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, siendo x e y números reales. Comprueba que la matriz M es siempre invertible (admite inversa).

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$.

Determina los valores reales de x para los que se cumple que $|B| = 1$, siendo la matriz $B = \frac{1}{2}A$.

Opción B

Ejercicio 1.- En una granja dedicada a la cría de pollos, el peso de los mismos en función de la edad viene dado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} -x^2 + bx & si\ 0 \leq x \leq 21 \\ c & si\ \ x > 21 \end{cases}$$

Donde x representa la edad en días y P el peso en gramos. Se sabe que la función es continua y que a los 14 días un pollo pesa 2198 gramos.

a) [1 punto] Determina las constantes b y c.

b) [1 punto] Si $b = 171$ y $c = 3150$, representa gráficamente el peso en función de x.

c) [0,5 puntos] Si $b = 171$ y $c = 3150$, obtener la recta tangente y la recta normal a la función en el punto de abscisa $x = 25$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Encuentra los puntos de corte entre las gráficas de las funciones:

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

$g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. Haz un boceto del área.

Ejercicio 3.- a) [2 puntos] ¿Para qué valores de k la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$ no admite inversa?

b) [0,5 puntos] Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtener $|A^3 \cdot B^{-1}|$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tengan determinante igual a 1 y cumpla $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.