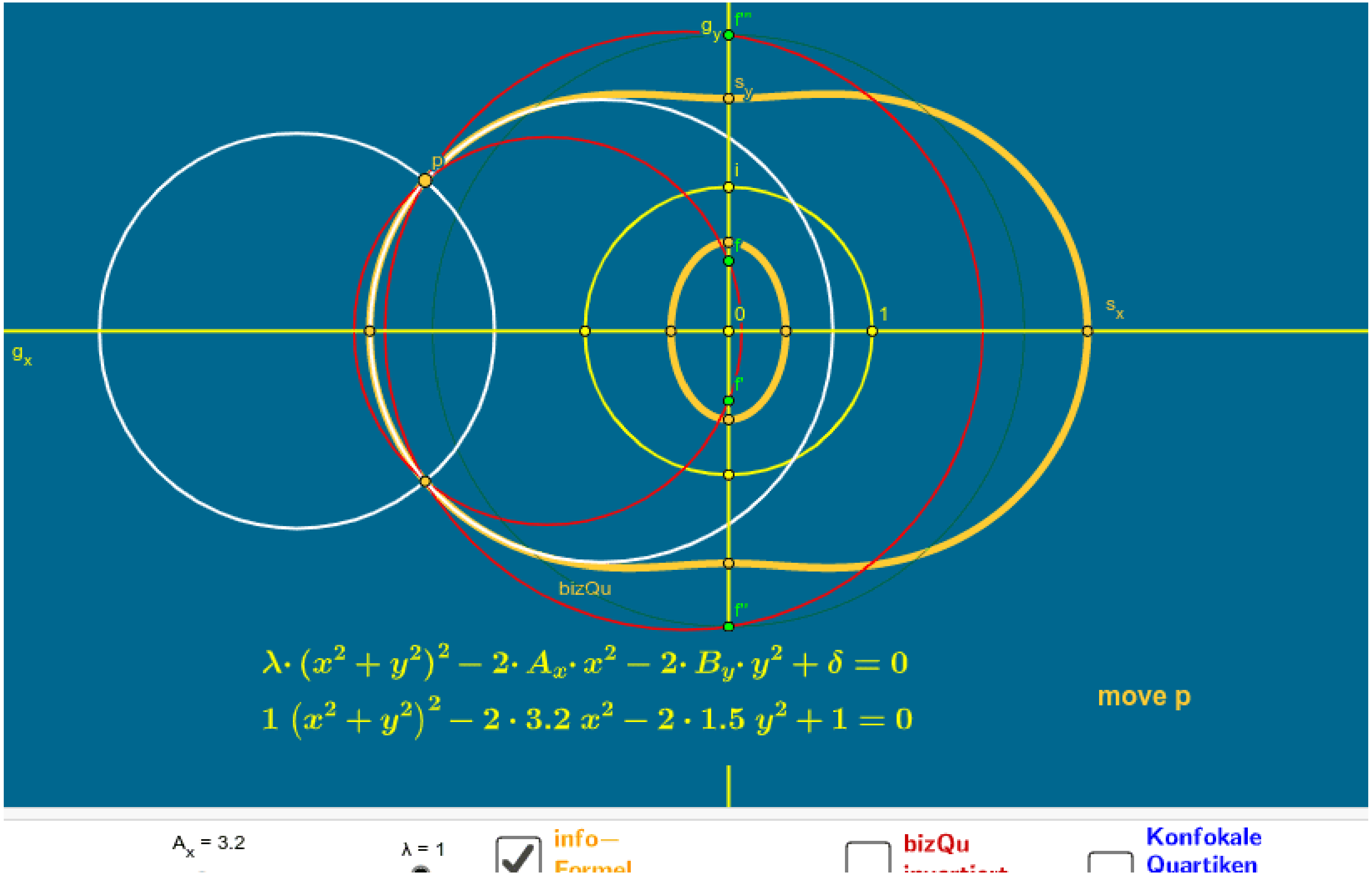
Bizirkulare Quartiken - Die Formeln

Autor: Walter Füchte

Thema: Kreis, Kegelschnitte, Gleichungen, Symmetrie



Diese Aktivität ist eine Seite des ***geogebra-books*** Moebiusebene (*17.Juni 2021*)

Zusammenhänge - in Kurzfassung:

Eine ***komplex-differenzierbare*** Funktion $g : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, welche einer ***Differentialgleichung*** des Typs genügt

- $(g')^2 = (g - f_1) \cdot (g - f_2) \cdot (g - f_3) \cdot (g - f_4)$ mit $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{C}$

ist eine $\hookrightarrow$ ***doppelt-periodische elliptische Funktion***, wenn die "***Brennpunkte***" f_1, f_2, f_3, f_4 verschieden sind.
Die ***Lösungskurven*** $x \mapsto g\,(x + i \cdot y)\,, y = \mathbf{const}$ bzw. $y \mapsto g\,(x + i \cdot y)\,, x = \mathbf{const}$ sind
konfokale bizirkulare Quartiken, wenn die $\hookrightarrow$ ***absolute Invariante*** $\mathcal{J}$ der ***Brennpunkte*** reell ist.
Bizirkulare Quartiken sind implizit durch Gleichungen des Typs gegeben:

- $\lambda \cdot \left(x^2 - y^2\right)^2 + L\,(x, y) \cdot \left(x^2 + y^2\right) + Q\,(x, y) = 0$ mit linearem $L\,(x, y)$, quadratischem $Q\,(x, y)$ und reellen Koeffizienten.

Die reell *9-dimensionale* Klasse dieser Kurven ist invariant unter ***Möbiustransformationen***.
Das Produkt zweier ***Kreisgleichungen*** ist eine spezielle **b i z i r k ulare** *Quartik*.
Sonderfälle: **(*)** 2 der ***Brennpunkte*** fallen zusammen; wählt man diesen ***doppelt-zählenden Brennpunkt*** als ∞, so sind
die Lösungskurven ***konfokale*** 2-achsige ***Kegelschnitte***. Eine Lösung der Differentialgleichung $(g')^2 = (g - 1) \cdot (g + 1)$ ist
zB. $z \mapsto g\,(z) = \sin\,(z)$; auch $\cos(z)$ oder $\sinh(z)$ führen zu ***konfokalen Kegelschnitten***: $\hookrightarrow$ sin, $\hookrightarrow$ cos, $\hookrightarrow$ sinh.
(**) ein 3-facher ***Brennpunkt***, gewählt als ∞, ergibt $\hookrightarrow$ ***konfokale Parabeln***.
(***) 2 doppelt-zählende ***Brennpunkte***, bzw. ein **4**-fach zählender ***Brennpunkt*** führen auf das Quadrat eines ***Kreisbüschels***.

Normalformen:

Ist die ***absolute Invariante*** $\mathcal{J}$ reell und nicht-negativ, so sind die ***Brennpunkte konzyklisch***. Sind sie verschieden,

so besitzen die 2-teiligen Lösungs-***Quartiken*** **4** orthogonale ***Symmetrie-Kreise***, einer davon ist imaginär.
In $\hookrightarrow$ ***Normalform*** sind die ***Koordinatenachsen*** und der ***Einheitskreis*** die ***Symmetrie-Kreise***.

Die ***Brennpunkte*** $f, -f, \frac{1}{f}, -\frac{1}{f}$ liegen auf einem der ***Symmetrie-Kreise***.

Ist $\mathcal{J} \leq 0$, so besitzen die 1-teiligen Lösungs-***Quartiken*** **2** ***Symmetrie-Kreise***, die 4 ***Brennpunkte*** liegen paarweise spiegelbildlich auf diesen.

In ***Normalform*** sind die ***Koordinatenachsen*** die ***Symmetrie-Kreise***, die ***Brennpunkte*** $f, -f, \frac{i}{f}, -\frac{i}{f}$ liegen auf diesen.

Brennkreise - doppelt-berührende Kreise:

Die 4 ***Brennpunkte*** werden aufgeteilt in 2 ***Punkte-Paare***: für die 1-teiligen ***Quartiken*** in die beiden spiegelbildlichen Punkte-Paare, für die anderen Fälle ist jede Aufteilung möglich (!).
Es ergeben sich jeweils **2** ***Kreisbüschel***: für 1-teilige muss eines ***elliptisch***, das andere ***hyperbolisch*** sein,
in den anderen Fällen sollten die ***Büschel*** vom gleichen Typ sein. Bei zusammenfallenden ***Brennpunkten*** ist ein geeignetes ***parabolisches Kreisbüschel*** möglich.
Durch fast jeden Punkt der Ebene geht aus jedem der beiden ***Kreisbüschel*** genau ein Kreis: "***Brennkreis***".
Die ***Quartiken*** sind ***Winkelhalbierende*** dieser ***Kreise***, die ***Symmetrie-Kreise*** der beiden ***Büschelkreise*** sind ***doppelt-berührende Kreise***, oder die ***Orthogonalkreise*** zu diesen!

Die Formeln:

Die ***impliziten Gleichungen*** der ***bizirkularen Quartiken*** In ***Normalform:***

- $\lambda \cdot (x^2+y^2)^2 - 2 \cdot A_x \cdot x^2 - 2 \cdot B_y \cdot y^2 + \delta = 0$ mit $\lambda \in \{0,1\}$, $A_x, B_y \in \mathbb{R}$ und $\delta \in \{-1,0,1\}$.

Fälle:

- $\lambda = 0$: 2-achsige ***Kegelschnitte***;
- $\delta = 0$: 2-achsige ***Kegelschnitte***, invertiert am ***Einheitskreis***;
- $\lambda = 1, \delta = 1$: **2**-teilige ***bizirkulare Quartiken***;

- $\lambda = 1, \delta = -1$: 1-teilige ***bizirkulare Quartiken***.

Scheitel:

$\lambda = 1:$	$s_x = \pm\sqrt{A_x \pm \sqrt{{A_x}^2 - \delta}};$	die Wurzel ist reell zu berechnen, daraus ermittelt man die Anzahl und die Lage der x-Achsen-Schnittpunkte.
	$s_y = \pm i \cdot \sqrt{B_y \pm \sqrt{{B_y}^2 - \delta}};$	auch hier ist die Wurzel reell zu berechnen.
$\lambda = 0:$	$s_x = \pm\sqrt{\dfrac{\delta}{2 \cdot A_x}};$	$s_y = \pm i \cdot \sqrt{\dfrac{\delta}{2 \cdot B_y}}$

Schnittpunkte mit dem ***Einheitskreis*** c_E: $s_E = \pm\sqrt{\dfrac{2 \cdot B_y - (\lambda + \delta)}{2 \cdot (B_y - A_x)}} \pm i \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot A_x - (\lambda + \delta)}{2 \cdot (A_x - B_y)}}$;

Diese Schnittpunkte werden, falls sie existieren, in ***geogebra*** berechnet mit *reell*-rechnender Wurzel!

Sind die ***Achsenschnittpunkte*** vorgegeben, so lassen sich die ***Koeffizienten*** berechnen:

$A_x = \frac{1}{2} \cdot \left({s_x}^2 + \frac{\delta}{{s_x}^2} \right)$ und / oder $B_y = \frac{1}{2} \cdot \left({s_y}^2 + \frac{\delta}{{s_y}^2} \right)$, wobei zur Abkürzung $s_y \equiv y\,(s_y)$ gesetzt sei.

Die ***Brennpunkte:***

$\lambda = 1$	mit $Q_x = \dfrac{\delta - A_x \cdot B_y}{A_x - B_y} = -Q_y$ ergeben sich die **Brennpunkte** : $f = \pm\sqrt{Q_x \pm \sqrt{Q_x^2 - \delta + 0 \cdot i}}$
	Dabei berechnet in **geogebra** die **komplexe** Wurzelfunktion die **Brennpunkte** auch dann, wenn sie auf der y-Achse oder auf dem Einheitskreis liegen!
$\lambda = 0$	$f_\pm = \pm\sqrt{\dfrac{\delta}{2 \cdot A_x} - \dfrac{\delta}{2 \cdot B_y} + 0 \cdot i}$; nicht zu erkennen ist ∞ als doppelt-zählender **Brennpunkt**.
$\lambda = 1$ und **Brennpunkte** f vorgegeben	$Q_x = \dfrac{1}{2} \cdot \left(f^2 + \dfrac{\delta}{f^2} \right)$ Damit kann man die konfokalen Quartiken berechnen.

Konfokale Quartiken durch p_0:

$\lambda = 1$, δ, f und p_0 vorgegeben. Zusammenhang zwischen den Koeffizienten AC_x, BC_y der ***konfokalen Quartiken***:

$BC_y = \dfrac{Q_x \cdot AC_x - \delta}{Q_x - AC_x}$. Zu lösen ist die quadratische Gleichung für AC_x:

- $$\left(x(p_0)^2 + y(p_0)^2\right)^2 - 2 \cdot AC_x \cdot x(p_0)^2 - 2 \cdot \frac{Q_x \cdot AC_x - \delta}{Q_x - AC_x} \cdot y(p_0)^2 + \delta = 0$$

Die **2** Lösungen liefern die 2 ***orthogonalen Quartiken*** durch p_0.

Bemerkungen:
Das Applet oben verwendet die angegebenen Formeln, die Fallunterscheidungen erfordern mitunter aufwendigen Einsatz der Logik.
Obwohl im ***geogebra***-Handbuch angegeben wird, dass ***geogebra komplexe Zahlen*** nicht unterstützt, kann man die fantastische Fähigkeit von ***geogebra***, zwischen reellen und komplexen Funktionen zu unterscheiden, sehr produktiv nutzen:

- sind die Radikanden erkennbar reell, so ergeben sich für negative Radikanden keine Lösungen;
- für erkennbar komplexe Radikanden dagegen, zB. mit dem Trick $+0 \cdot i$, werden auch komplexe Lösungen angezeigt!

Leider sind in ***geogebra*** keine ***elliptischen Funktionen*** implementiert wie etwa die **Weierstraßsche** $\wp$-Funktion oder die **Jacobi**schen Funktionen.
Die ***konfokalen bizirkularen Quartiken*** lassen sich daher nicht wie ***konfokale Kegelschnitte*** mit Hilfe solcher komplexer Funktionen darstellen.