Club GeoGebra Iberoamericano

1

POLÍGONOS

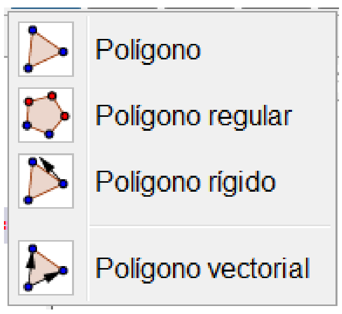
POLÍGONOS

INTRODUCCIÓN

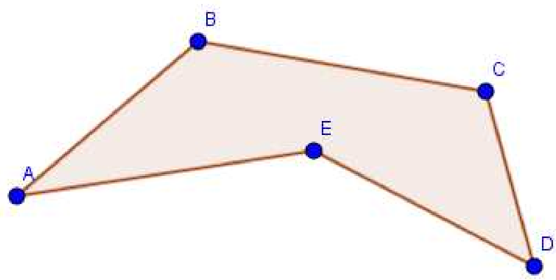
En este primer tema os proponemos trabajar con polígonos en general, proponiendo distintas construcciones que permitan estudiar sus elementos y propiedades, también trabajaremos con polígonos regulares en los que vamos a identificar su apotema y sus diagonales y distinguiremos entre polígonos cóncavos y polígonos convexos, comprobando que GeoGebra es una potente herramienta para desarrollar estos contenidos.

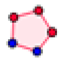
El objetivo de este material es que servir como punto de partida para que cada participante cree materiales propios que pedimos sean compartidos con los demás participantes.

Las herramientas disponibles para dibujar un polígono las encontramos en el menú:



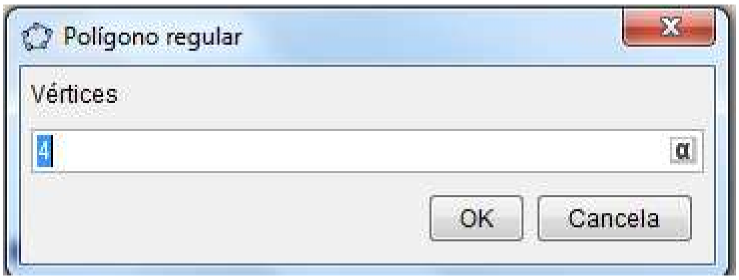
La herramienta **Polígono** permite dibujar cualquier polígono a partir de sus vértices; por lo que una vez seleccionada bastará con crear los puntos o pulsar sobre puntos previamente dibujados, para construir el polígono. Es necesario volver a pulsar sobre el vértice inicial para cerrar el polígono.



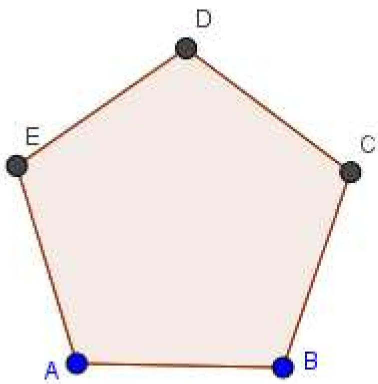
Cuando el polígono que deseamos dibujar es un polígono regular, disponemos de la correspondiente herramienta que se encuentra en el mismo bloque que la herramienta anterior. Esta herramienta es **Polígono regular**  .

Para dibujar un polígono regular solo necesitamos un segmento que corresponde al lado y el número de lados que tendrá.

Por tanto, una vez seleccionada la herramienta, marcamos o creamos los dos puntos correspondientes al lado; aparecerá el cuadro siguiente para que indiquemos el número de lados.

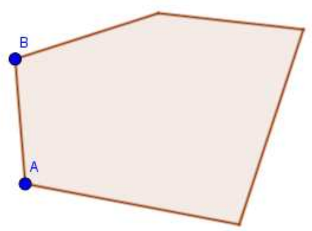


Por ejemplo, si introducimos el valor 6; al pulsar OK aparecerá un hexágono regular.

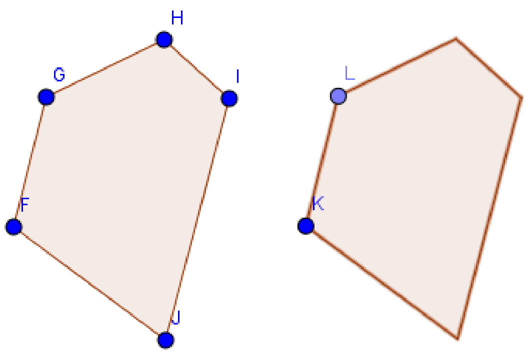


Observamos que solo los puntos A y B son independientes y que el resto dependen de la longitud de este lado que ha determinado el polígono regular.

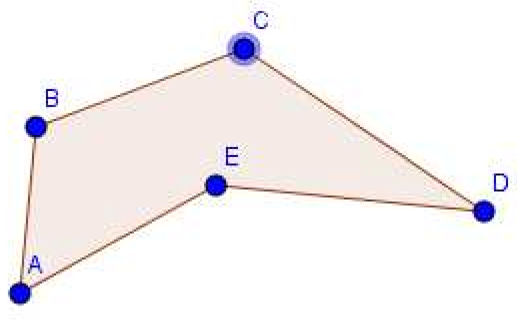
Otra de las herramientas de este bloque es **Polígono rígido**  para dibujar un polígono a partir de sus vértices de manera que no se podrá deformar. Podemos observar que al construirlo solo serán visibles los dos primeros vértices que permitirán desplazarlo por la vista gráfica sin deformarlo.



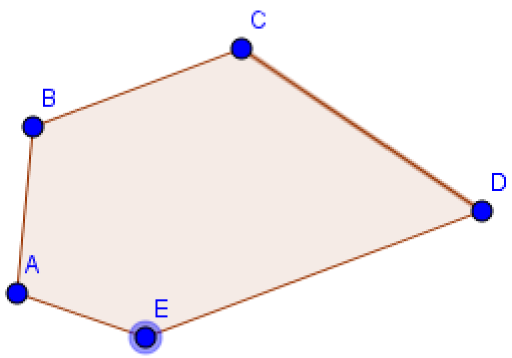
También permite hacer una copia de un polígono previamente construido, para lo que basta con seleccionar la herramienta y pulsar sobre el polígono del cual se desea hacer una copia.



La herramienta que nos queda es **Polígono vectorial** crea un polígono, de manera que si se desplaza arrastrando el primer vértice creado se mantendrá como un polígono rígido, mientras que la mover el resto de vértices el polígono cambiará su forma.



En el polígono anterior, al arrastrar el punto A el polígono no cambia su forma, será por tanto un polígono rígido, mientras que si se arrastran los otros vértices cambiará su forma.



Con estas herramientas afrontaremos las actividades que proponemos a continuación.

Actividad 1

Dados dos puntos fijos A y B ¿cómo debe estar colocado un tercer punto C para que se pueda construir un cuadrado que tenga A, B y C como vértices del mismo? ¿Y un rectángulo? ¿Y un trapecio regular?

Actividad 2

Realiza las construcciones siguientes

a) Construye un cuadrado a partir del segmento correspondiente al lado.

b) Dado un segmento AB, construir un cuadrado en el que una de sus diagonales sea el segmento AB.

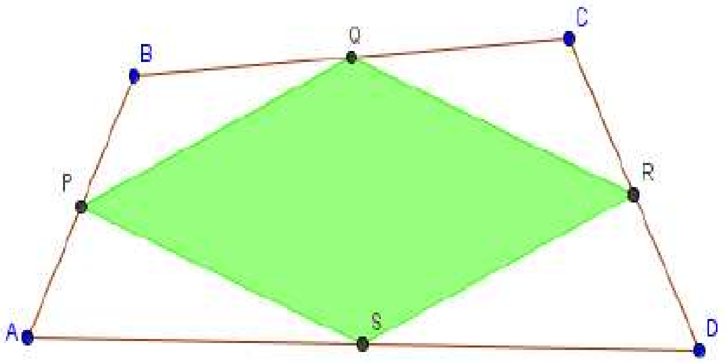
c) Construye diversos cuadriláteros: un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide, un trapecio y un trapezoide.

Actividad 3

Dibuja un cuadrilátero cualquiera y haz una clasificación de los cuadriláteros atendiendo a sus diagonales (cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, paralelogramo, trapecio, trapezoide).

Actividad 4. Cuadrilátero de Varignon

El cuadrilátero de Varignon PQRS se obtiene al unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera ABCD.

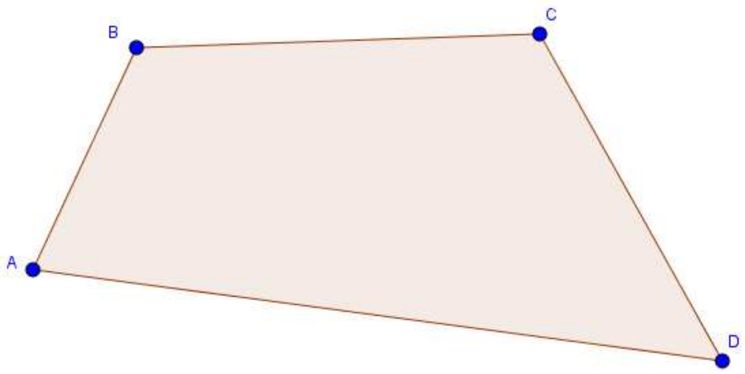


Dibuja un cuadrilátero y traza el cuadrilátero de Varignon.

- Comprueba que el cuadrilátero de Varignon es un paralelogramo.
- Comprueba igualmente que el área del cuadrilátero de Varignon es la mitad del área del cuadrilátero inicial.
- Dibuja las diagonales del cuadrilátero ABCD para investigar cuando el cuadrilátero de Varignon será un rectángulo.
- ¿Y cuándo será un cuadrado?

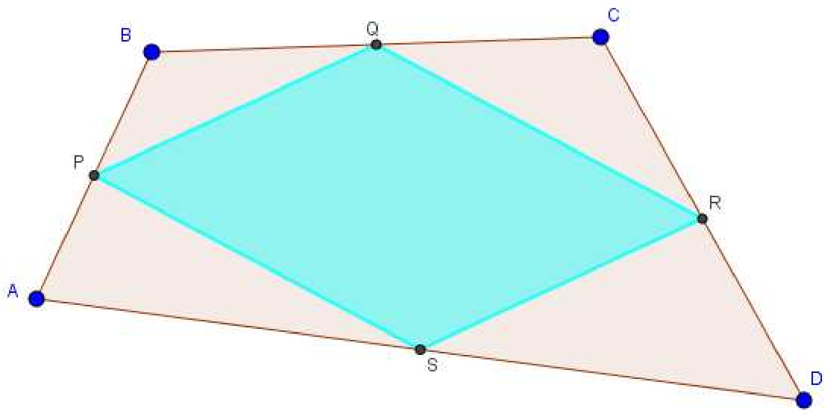
Resolvemos esta actividad para dar a conocer la herramienta disponible en GeoGebra para determinar la relación entre distintos objetos.

Dibujamos un cuadrilátero ABCD utilizando la herramienta **Polígono** .



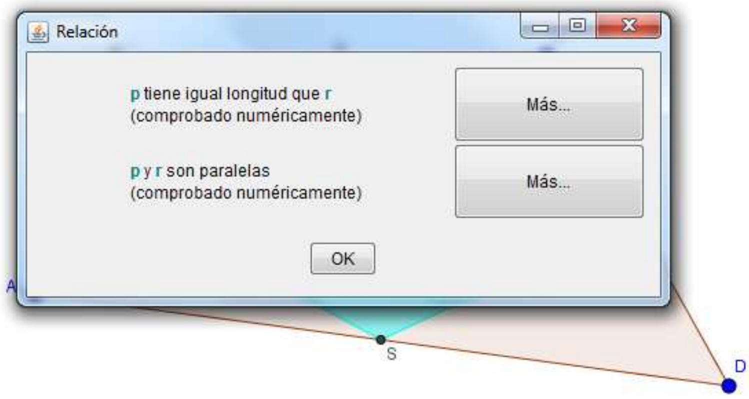
A continuación, con ayuda de la herramienta **Punto medio o Centro** , obtenemos los puntos medios de cada uno de los lados que renombramos con P, Q, R y S.

De nuevo, con la herramienta Polígono construimos el polígono PQRS.



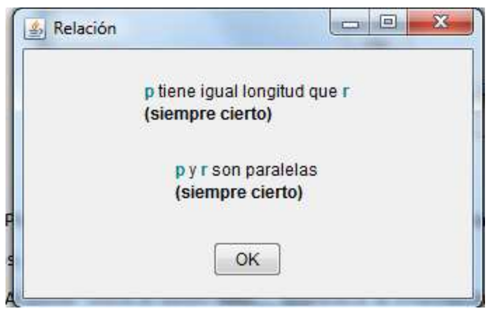
Una vez dibujado el cuadrilátero de Varignon, comprobamos las propiedades.

Para comprobar que es un paralelogramo utilizaremos la herramienta **Relación** , pulsando sobre los lados PQ y RS. Aparecerá la información siguiente:



Podemos observar que los dos lados tienen la misma longitud y que además son paralelos.

Al pulsar sobre el botón **Más…**, aparecerá la información siguiente:



Lo cual nos confirma que son ciertas las relaciones entre los dos lados.

El mismo resultado obtendremos al repetir el proceso sobre los lados PS y QR.

Por tanto, el cuadrilátero de Varignon es un paralelogramo.

Dejamos el resto de propiedades descritas en esta actividad para su resolución por cada participante.

Actividad para investigar I

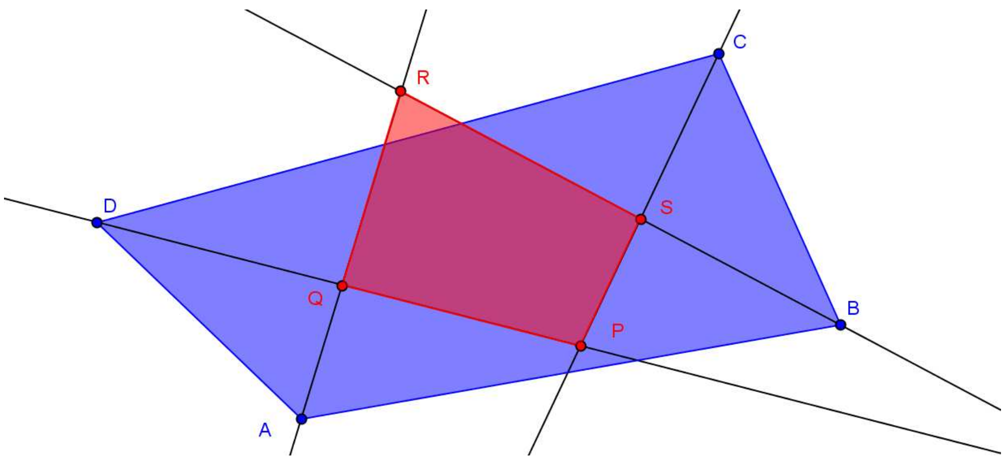
Intenta determinar en qué condiciones el cuadrilátero de Varignon será un rectángulo, un rombo o un cuadrado.

Actividad para investigar II

Si en un cuadrilátero ABCD se trazan las bisectrices de los ángulos interiores, las bisectrices de dos ángulos contiguos se cortan en un punto.

Llamamos a estos puntos P, Q, R y S.

Clasifica el cuadrilátero PQRS según sea el cuadrilátero inicial ABCD.



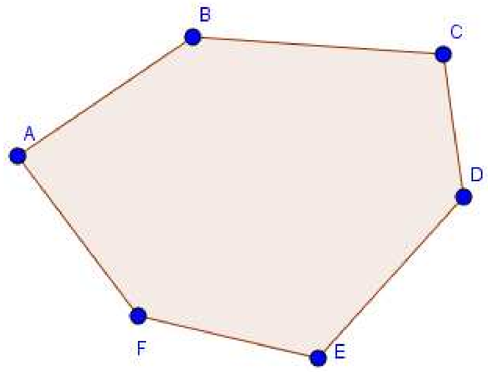
Actividades de Investigación III

a. Dado un polígono cualquiera, construye un nuevo polígono de un lado menos cuya área sea igual a la del polígono inicial.
b. A partir de un polígono cualquiera, construye un nuevo polígono de un lado más y cuya área sea igual a la del polígono inicial.

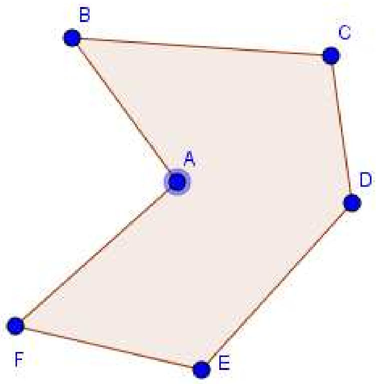
POLÍGONOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Un polígono se llama convexo cuando al unir dos puntos cualesquiera de éste el segmento que los une se queda dentro del mismo, caso contrario, si algún segmento se sale completamente o en parte fuera del polígono diremos que es cóncavo.

En un polígono cóncavo alguno de los ángulos interiores es mayor de 180º, mientras que en un polígono convexo todos los ángulos interiores son menores de 180º.

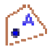


Polígono convexo

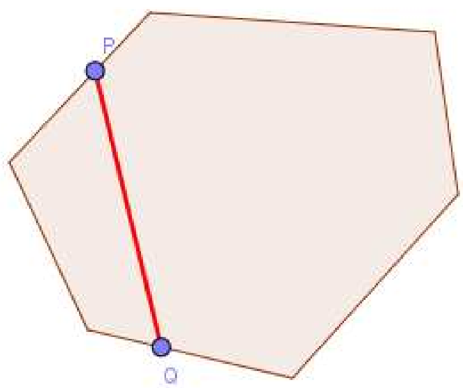


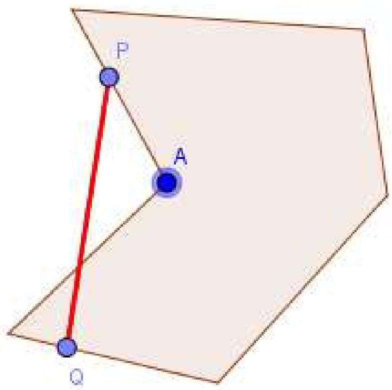
Polígono cóncavo

Realiza la actividad siguiente:

Dibuja un polígono cualquiera, ocultando sus vértices; dibujando a continuación dos puntos P y Q sobre los lados del polígono utilizando la herramienta **Punto en objeto**  .

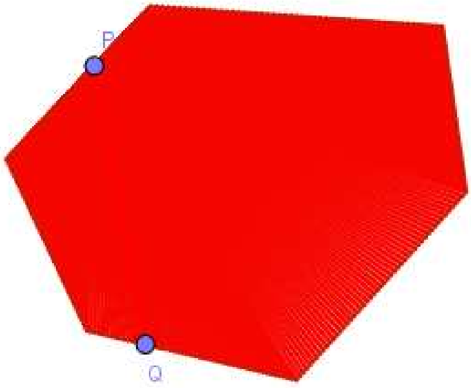
Dibuja el segmento PQ y le cambias el color y grosor.

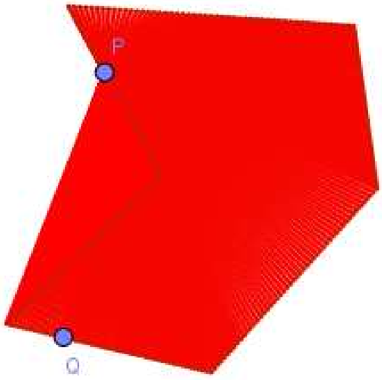




Activa el rastro del segmento PQ y anima el punto Q.

Cuando el polígono es convexo el rastro dibujará de nuevo el mismo polígono, mientras que en el caso de un polígono cóncavo, el rastro del segmento dibujará un nuevo polígono ya que dicho segmento no siempre será interior al polígono. Podemos observar las imágenes siguientes:



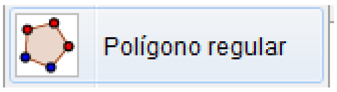


Finalmente activa el rastro del segmento PQ y comprueba lo que ocurre, si tu polígono cambia por completo de color será convexo y si aparece otro polígono distinto al tuyo éste es cóncavo.

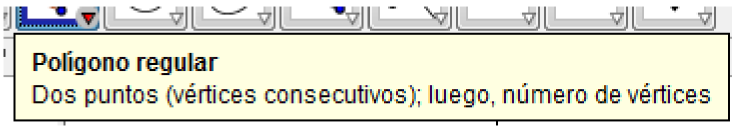
POLÍGONOS REGULARES

Un polígono regular se define como un polígono de tres o más lados iguales y tres o más ángulos iguales. Algunos polígonos regulares son el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono regular,…

Para construir polígonos regulares, GeoGebra dispone de la herramienta **Polígono regular**.

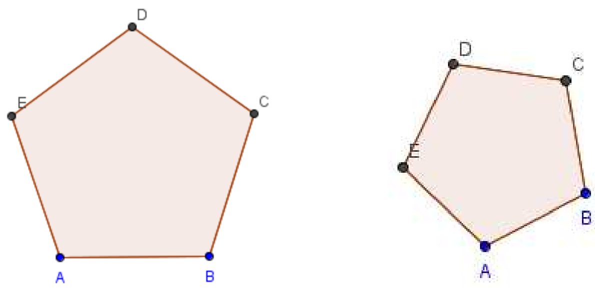


Al activar la herramienta nos pedirá dos vértices consecutivos del polígono que determinarán el lado y luego el número de vértices, que coincide con el número de lados



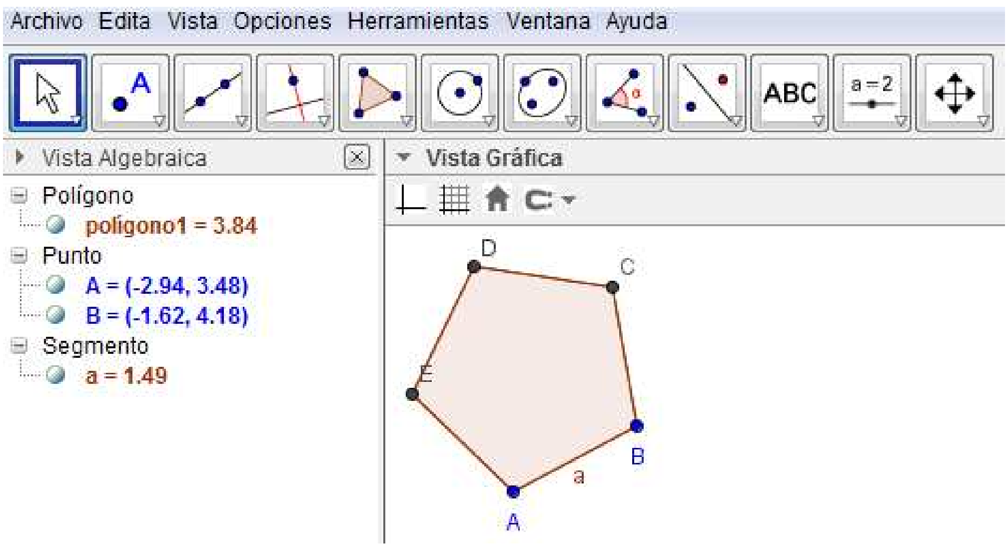
Los vértices que hemos utilizado son libres, los podremos mover libremente, por lo que hemos construido un polígono regular de un número de lados en función del lado.

En el ejemplo he construido un pentágono regular, en el que al mover los vértices A o B variará el pentágono

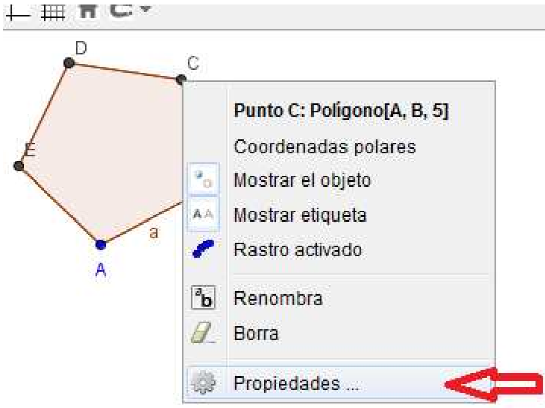


Los vértices C, D y E no se podrán mover ya que pertenecen a la construcción del pentágono regular y por tanto, dependen del lado AB.

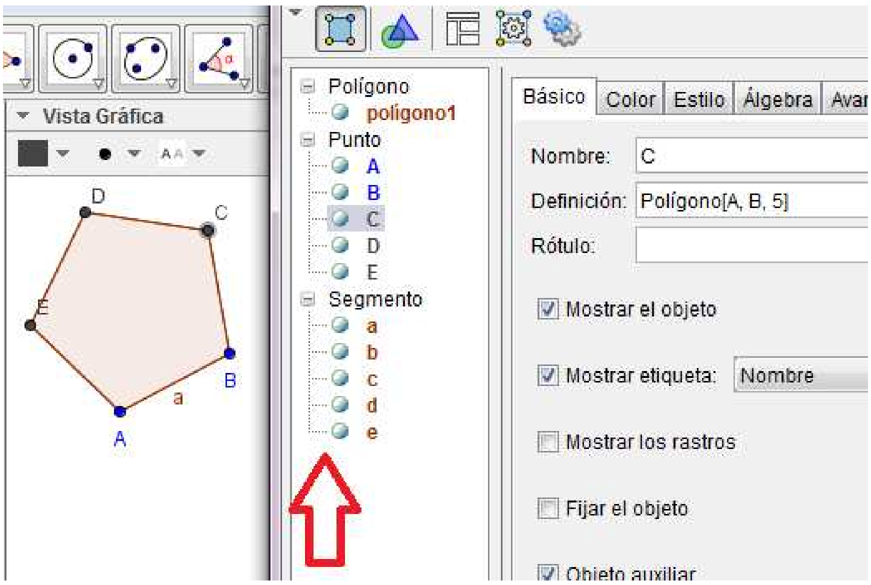
Obsérvese que los vértices A y B se distinguen de C, D y E por el color que el programa asigna. GeoGebra asigna diferente color a los elementos libres y a los elementos dependientes, en este caso el color negro de los vértices C, D y E que son dependientes.



Al utilizar la herramienta **Polígono regular**, en la ventana algebraica solo tendremos visibles los elementos que hemos utilizado para la construcción; es decir, los vértices A y B y el segmento correspondiente al lado a, así como el resultado final de la construcción, el pentágono regular construido.



Al no aparecer en la vista algebraica los vértices C, D y E, para poder variar las propiedades de los mismos debemos seleccionar cualquiera de ellos y entrar en propiedades, donde aparecerán todos los elementos que forman la construcción, tanto los independientes como los dependientes



Actividad 5

Dibuja un cuadrado que tenga 4 unidades de lado (Utiliza la herramienta *Polígono*) ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Mueve los vértices para intentar obtener otro polígono que tenga:

a. El mismo perímetro.
b. La misma área.
c. El mismo perímetro y la misma área.

Intenta hacer lo mismo para un cuadrado que tenga 3 unidades de lado. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Mueve los vértices para intentar obtener otro polígono que tenga:

a. El mismo perímetro.
b. La misma área.
c. El mismo perímetro y la misma área.

¿Qué diferencias hay entre los dos valores utilizados?

Actividad 6

Los elementos de un polígono regular son los lados, la apotema y las diagonales, dibuja un polígono regular de cinco lados y señala los tres elementos con diferentes colores

Actividad 7

Dado un segmento AB y construye sobre él:

a. Un triángulo equilátero
b. Un cuadrado
c. Un pentágono regular
d. Un hexágono regular
e. Y polígonos regulares de siete, ocho, nueve y diez lados. (Puedes definir un deslizador para que en una sola construcción puedas dibujar los ocho polígonos que se piden).

Actividad de investigación IV

Utilizando la construcción anterior, rellena la siguiente tabla:

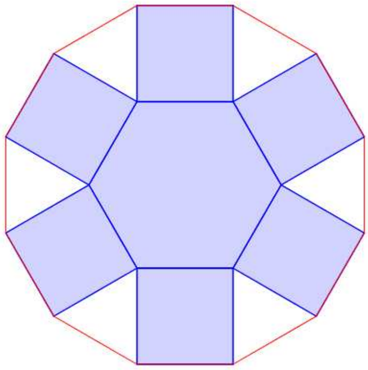
Nº de lados	3	4	5	6	7	8	…	12
Nº de diagonales								

Intenta encontrar una fórmula para obtener el número de diagonales de un polígono en función del número de lados.

Actividad 8

Dibuja un hexágono regular y sobre cada uno de sus lados construye un cuadrado.

Une los vértices por medio de segmentos para obtener una figura similar a la siguiente:



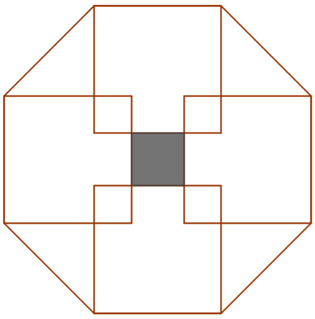
a. ¿Es regular esta nuevo polígono?

b. Puedes calcular el valor de la apotema en función de la medida del lado.

c. Si hacemos una construcción similar sobre los lados de un cuadrado. La figura obtenida ¿es un octógono regular?

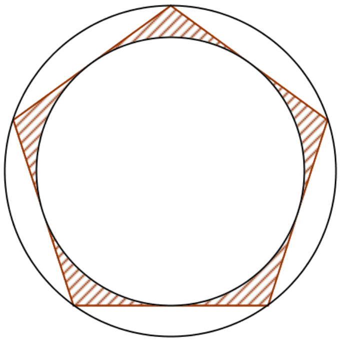
Actividad 9

Sobre los cuatro lados de un octógono regular de 1 unidad de lado se han dibujado cuatro cuadrados interiores de lado el mismo que el del octógono. Reproduce el dibujo y calcular el área de la zona sombreada.



Actividad 10. Pentágono regular

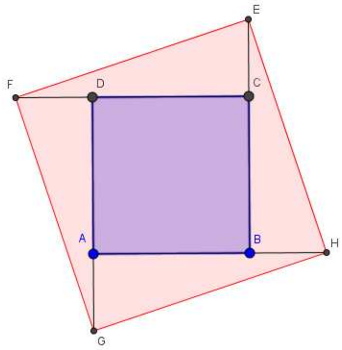
Realiza la siguiente construcción



¿Puedes hallar el área de la superficie rallada? Supongamos que el lado del pentágono regular es de 12 cm.

Actividad 11

Al prolongar longitudes iguales los lados de un cuadrado ABCD, se obtienen nuevos puntos E, F, G H. Comprobar que EFGH es también un cuadrado. ¿Qué relación hay entre sus áreas?

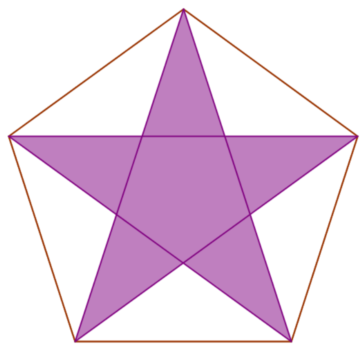


¿Ocurre igual con otros polígonos regulares?

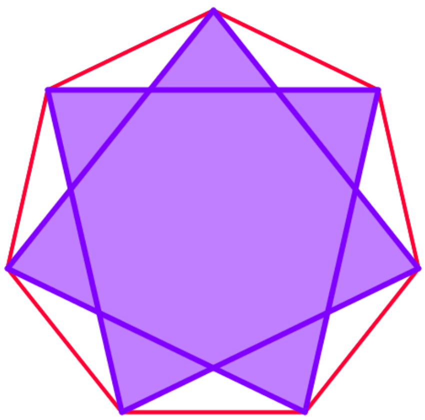
POLÍGONOS ESTRELLADOS

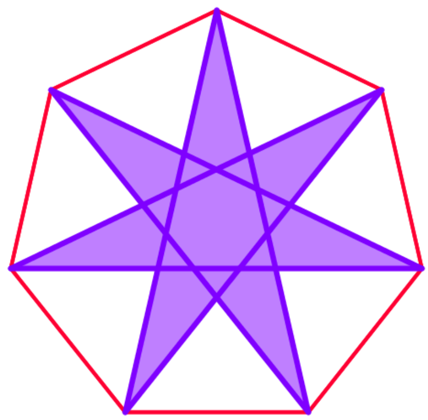
Si en un polígono regular unimos los vértices no consecutivos se obtienen distintos polígonos estrellados.

En el caso del pentágono regular lo podemos hacer uniendo los vértices cada dos, obteniendo.



Si partimos un polígono de siete lados podemos obtener dos polígonos estrellados.



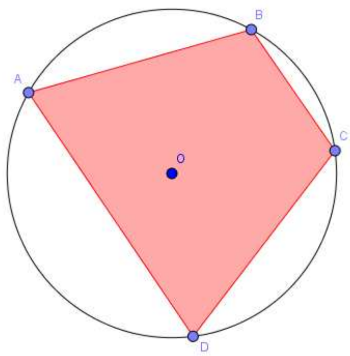


Encuentra todos los polígonos estrellados para polígonos regulares de 8, 9, 10 y 11 lados.

¿Qué conclusiones puedes sacar?

CUADRILÁTERO CÍCLICO

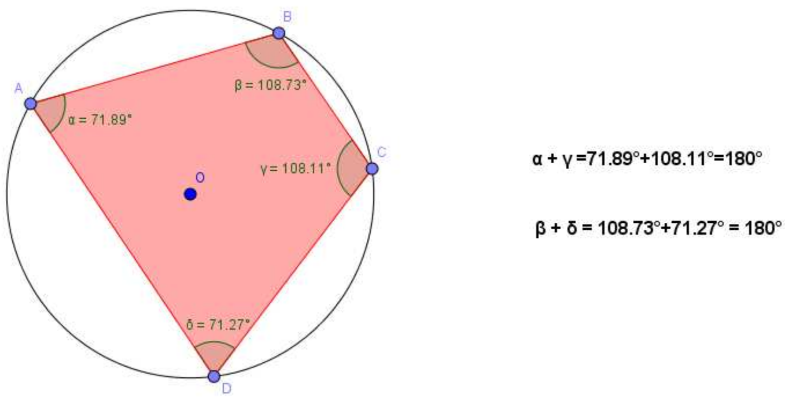
Si en una circunferencia marcamos cuatro puntos y dibujamos el polígono formado por ellos, obtendremos un cuadrilátero denominado cíclico.



Llamaremos cuadrilátero cíclico a aquél que se puede inscribir en una circunferencia. El cuadrilátero que hemos construido lo es; pero ¿son cíclicos todos los cuadriláteros? ¿Qué condición se ha de cumplir para que un cuadrilátero sea cíclico? Vamos a investigarlo.

Selecciona la herramienta ***Ángulo*** y crea los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero. Para ello, una vez seleccionada la herramienta, señala tres vértices consecutivos del cuadrilátero, en el sentido de las agujas del reloj, para construir el ángulo formado en el segundo de los vértices seleccionados.

Calcula la suma de los ángulos opuestos: $\alpha+\gamma$ y $\beta+\delta$.



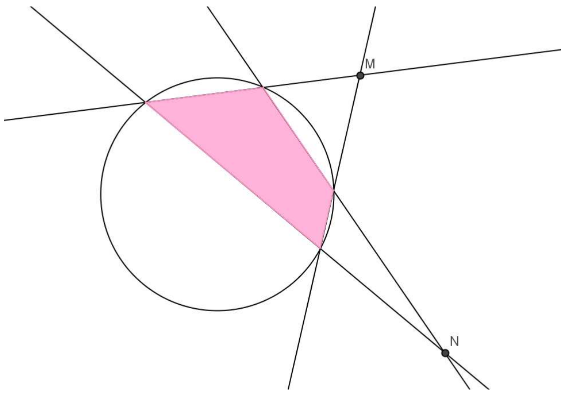
Mueve los vértices del cuadrilátero, ¿se mantiene constante el valor de esas sumas? ¿Sabrías justificar por qué?

Tal vez te venga bien recordar la relación que existe entre el ángulo inscrito en una circunferencia y el ángulo central que abarcan el mismo arco.

Basándote en los valores anteriores, ¿es posible que un cuadrilátero cóncavo sea cíclico? ¿Por qué?

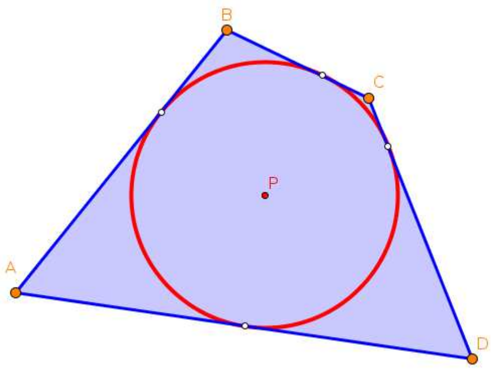
Actividad 12

Si ABCD es un cuadrilátero cíclico, y M y N son los puntos de intersección de los lados opuestos. Comprueba que la intersección de las bisectrices de los ángulos en estos puntos M y N con el cuadrilátero inicial determinan cuatro puntos A', B', C' y D' que forman un rombo.

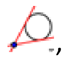


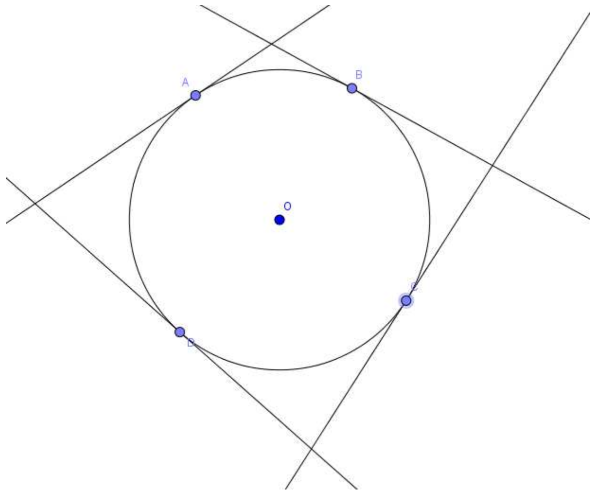
CUADRILÁTERO TANGENCIAL

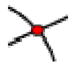
Un cuadrilátero tangencial es aquél en el que se puede inscribir una circunferencia, de modo que todos sus lados sean tangentes a dicha circunferencia. Vamos a tratar de descubrir cuáles son las características de los cuadriláteros tangenciales.

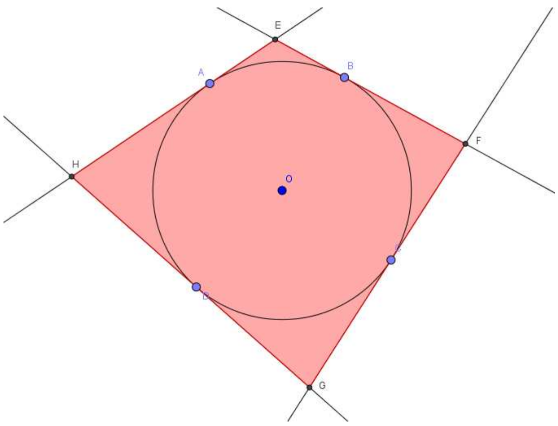


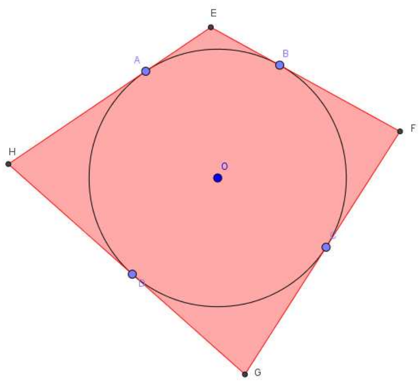
Para construir un cuadrilátero tangencial dibujamos una circunferencia sobre la que dibujamos cuatro puntos A, B, C y D.

A continuación, utilizando la herramienta **Tangentes** , trazamos la tangente a la circunferencia por cada uno de los puntos anteriores.



La herramienta utilizando la herramienta **Intersección**  nos permitirá obtener los puntos de intersección de cada par de rectas tangentes. Estos puntos E, F, G y H forman el cuadrilátero tangencial que dibujaremos utilizando la herramienta **Polígono**. Ocultando las rectas tangentes aparecerá destacado el cuadrilátero tangencial.

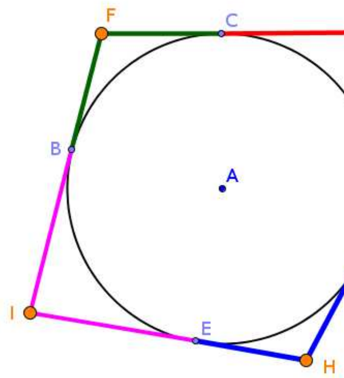




Utiliza ahora la herramienta **Distancia o Longitud**  para hallar las longitudes de los lados.

Suma las longitudes de los pares de lados opuestos. ¿Qué observas?

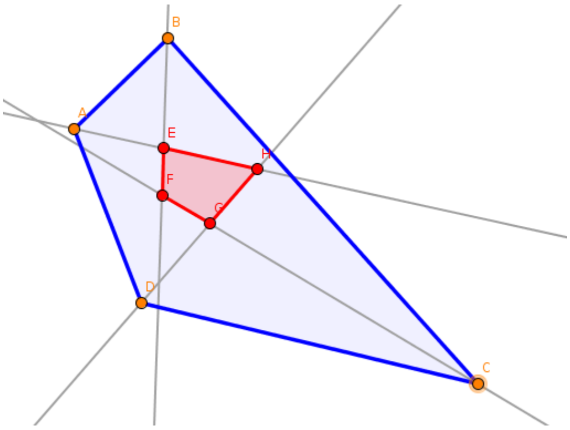
Mueve ahora los puntos de tangencia con la circunferencia, para modificar el cuadrilátero. ¿Se mantiene constante dicha suma? ¿Sabrías justificar por qué? La siguiente figura te proporciona alguna pista:



¿Qué relación hay entre las longitudes de los segmentos que tienen el mismo color? ¿Por qué? ¿Qué ocurre cuando sumas las longitudes de dos lados opuestos?

Actividad de investigación V. Una propiedad de las bisectrices

Utilizando la herramienta **Polígono** construye un cuadrilátero convexo., selecciona a continuación la herramienta **Bisectriz** y crea las bisectrices interiores de los ángulos del cuadrilátero. Observa que las bisectrices, al intersecar entre sí, forman un cuadrilátero. Utiliza las herramientas **Intersección** y **Polígono** para crear dicho cuadrilátero.

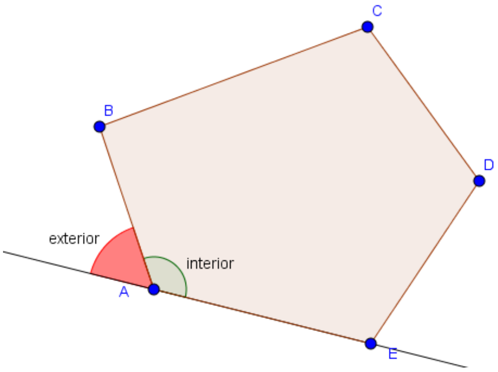


Mueve los vértices del cuadrilátero original y observa qué ocurre con el cuadrilátero formado por sus bisectrices interiores.

¿Puedes conseguir que las bisectrices sean concurrentes y, por tanto, el cuadrilátero formado por su intersección quede reducido a un punto? ¿Cómo tiene que ser el cuadrilátero inicial para lograrlo?

ÁNGULOS EN UN POLÍGONO

En un polígono convexo, en cada vértice definimos dos ángulos: interior y exterior.

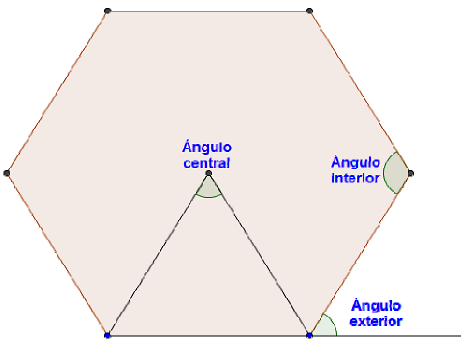


Comprueba que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual 180º (n-2), siendo n el número de lados.

Y que la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es 360º.

Ángulos en un polígono regular

En un polígono regular podemos dibujar los ángulos siguientes:



Investiga la medida de estos ángulos en los distintos polígonos regulares.

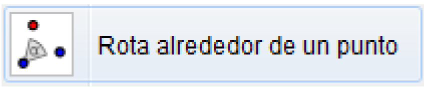
Encuentra alguna relación para determinar los ángulos para cualquier polígono regular en relación al número de lados del mismo

Otras formas de construir polígonos regulares

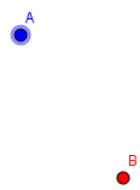
Atendiendo al número de vértices o lados de un polígono regular los ángulos centrales e interiores se resumirían en la siguiente tabla

Nº de lados	Ángulo Central	Ángulo Interior
3	120°	60°
4	90°	90°
5	72°	108°
6	60°	120°
7	360°/7	$180° - \frac{360°}{7}$
8	45°	135°
k	360°/k	$180° - \frac{360°}{k}$

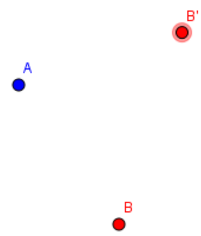
Los valores anteriores permitirán construir polígonos regulares usando la herramienta **Rota alrededor de un punto**.



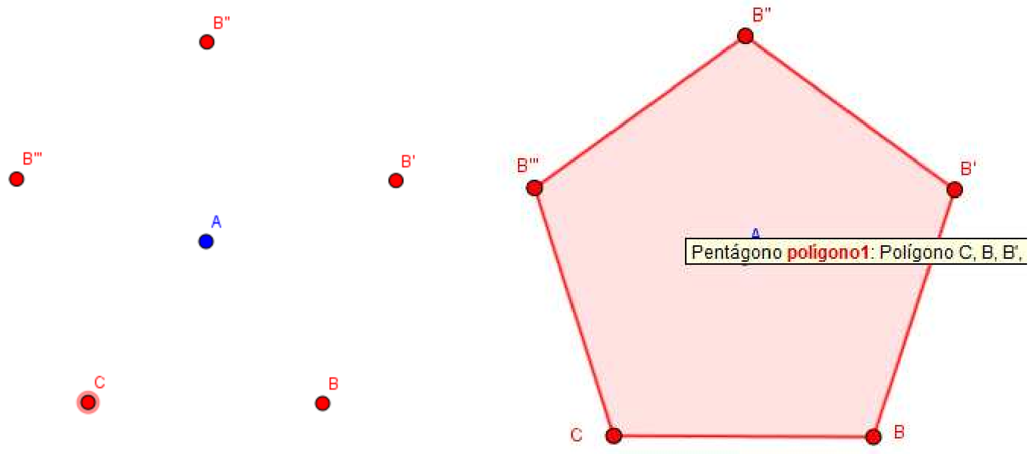
Por ejemplo, para construir un pentágono regular, dibujamos un punto A que será el centro y otro punto cualquiera B que será uno de sus vértices.



A continuación, rotamos el punto B alrededor de A un ángulo de 72º, obteniendo un nuevo punto B´.



Repitiendo el proceso para B´ obtendremos un nuevo vértice, sobre el que repetimos el proceso, y al repetir una vez más sobre el nuevo punto, completaremos los vértices del pentágono regular que podemos dibujar utilizando la herramienta **Polígono**.



GEOPLANO

Activando la cuadrícula y la atracción de puntos a la cuadrícula podremos utilizar GeoGebra como un geoplano.

Actividad 13

Dibuja una figura cualquiera utilizando la herramienta **Polígono**.

Intenta dibujar en otra posición del geoplano otra figura distinta que tenga:

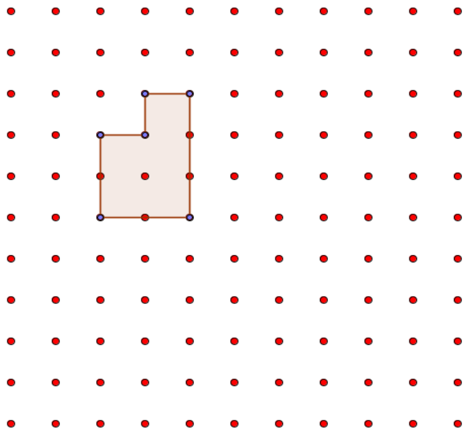
a. El mismo perímetro.
b. La misma área.
c. El mismo perímetro y la misma área.
d. El doble de perímetro.
e. La mitad del área.

Actividad 14

Crea todos los polígonos que puedas de manera que solo tengan un punto interior.

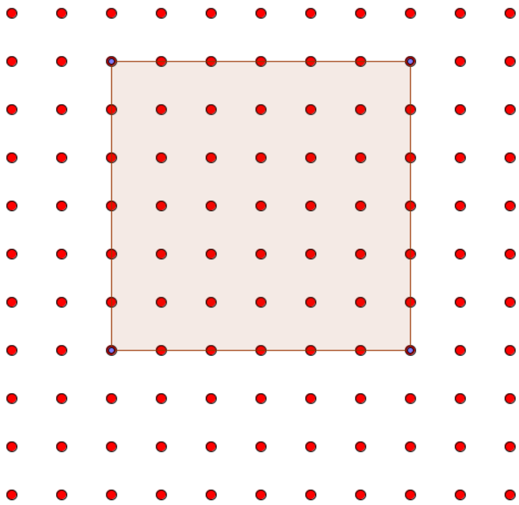
Calcula su área y su perímetro considerando que la distancia entre dos puntos es 1 unidad.

Averigua cuál tiene mayor perímetro y mayor área.



Actividad 15

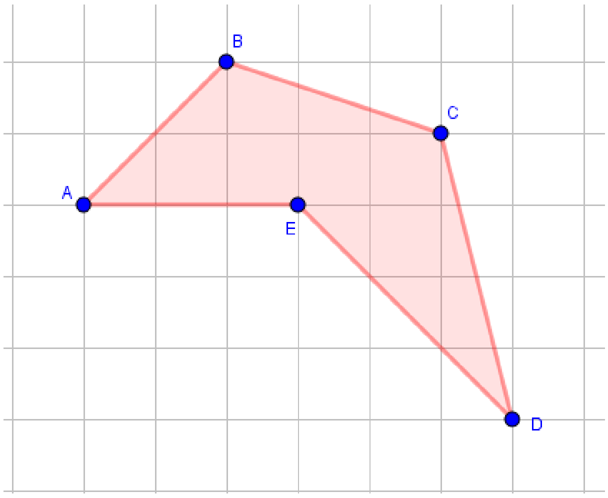
Dibuja un cuadrado e intenta dividirlo en dos partes de igual área.



¿Hay más de una forma de obtener la división anterior?

Actividad Teorema de Pick

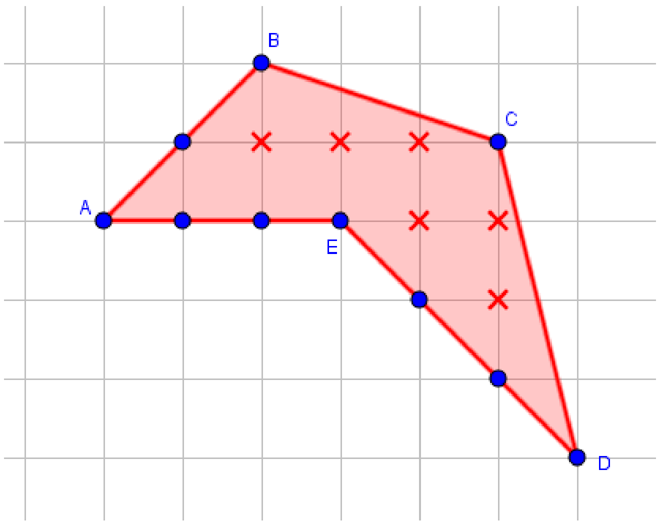
A partir de una cuadrícula en la que todos los puntos tienen coordenadas enteras, el teorema de Pick permite obtener el área de un polígono simple, que no tenga agujeros, cuyos vértices estén situados sobre la cuadrícula.



Si d es el número de vértices de la cuadrícula que están dentro del polígono y p el número de puntos de la cuadrícula que están sobre alguno de los lados del polígono, el área del polígono será:

$$A = d + \frac{p}{2} - 1$$

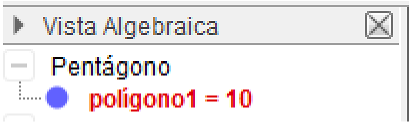
En el polígono de la figura tenemos 6 puntos dentro del polígono (d = 6) y 10 puntos en los lados del triángulo (p = 10).



Por tanto, el área de este polígono será:

$$A = 6 + \frac{10}{2} - 1 = 6 + 5 - 1 = 10\ u^2$$

Valor que coincide con el que aparece en la Vista algebraica para este polígono.



Una demostración del teorema de Pick se puede encontrar en http://gaussianos.com/el-teorema-de-pick/

Actividad 16

Utilizando el teorema de Pick determina el área de los polígonos representados en la siguiente figura: