CÚPULAS GEODÉSICAS CON GEOGEBRA

Débora Pereiro, Esperanza Gesteira, Sofía Cendán, Fernando Zacarías (Grupo XeoDin)

Actividad 1. Construir con GeoGebra 3D una cúpula geodésica de frecuencia 2

Configuración inicial:

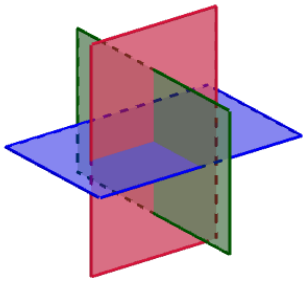
- Vistas: Vista algebraica, Vista gráfica 3D, Barra de entrada
- Opciones: Redondeo (3 cifras decimales), Etiquetado (solo nuevos Puntos)

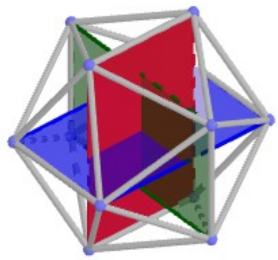
Paso 0: Construir un icosaedro

Aunque podríamos construir nuestra cúpula geodésica a partir de cualquier icosaedro, en esta práctica utilizaremos el icosaedro de centro el origen de coordenadas y vértices de coordenadas áureas:

(1,φ,0) ; (1, -φ,0) ; (-1, -φ,0) ; (-1,φ,0)
(0,1,φ) ; (0,1, -φ) ; (0,-1, φ) ; (0,-1,-φ)
(φ,0,1) ; (φ,0,-1) ; (-φ,0,1) ; (-φ,0,-1)

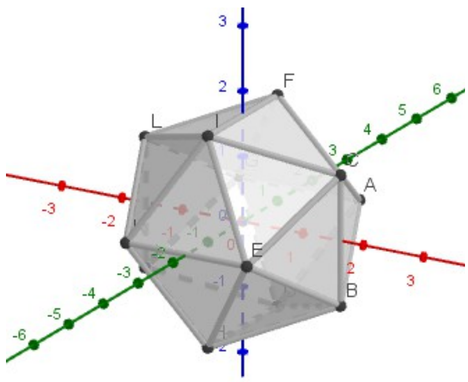
siendo $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número de oro





Se podrían escribir todos los vértices y unirlos mediante triángulos pero no lo haremos así e utilizaremos el comando **icosaedro que pasa por tres puntos**:

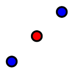
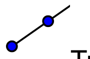
- Escribimos en la barra de entrada:
  - φ=(1+sqrt(5))/2
  - O=(0,0,0)
  - A=(1,φ,0)
  - B=(φ,0,-1)
  - C=(φ,0,1)
  - icosaedro(A,B,C)



- También escribimos en la barra de entrada el radio del icosaedro y la esfera circunscrita:
  - r=sqrt(1+φ^2) ($r=d(O,A)=\sqrt{1^2+\varphi^2}$ o también *r=Distancia(O,A)*)
  - b=Esfera(O,A)
- Ocultamos la esfera, los ejes y el plano XY

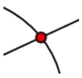
Paso 1: Obtener los triángulos de la cúpula correspondientes a una cara del icosaedro

Escogemos una cara del icosaedro, por ejemplo el triángulo de vértices **FIC** y dividiremos sus aristas en dos partes iguais. Luego proyectaremos sus puntos medios sobre la esfera circunscrita y uniremos dichos vértices mediante triángulos.

- Cambiamos de color al triángulo FIC
-  Dividimos las aristas del triángulo FIC en dos partes iguales. Nombres M, N y P
-  Trazamos las semirrectas con origen O que pasan por M, N y P respectivamente. También podemos escribir en la barra de entrada:

  f=Semirrecta(O, M)

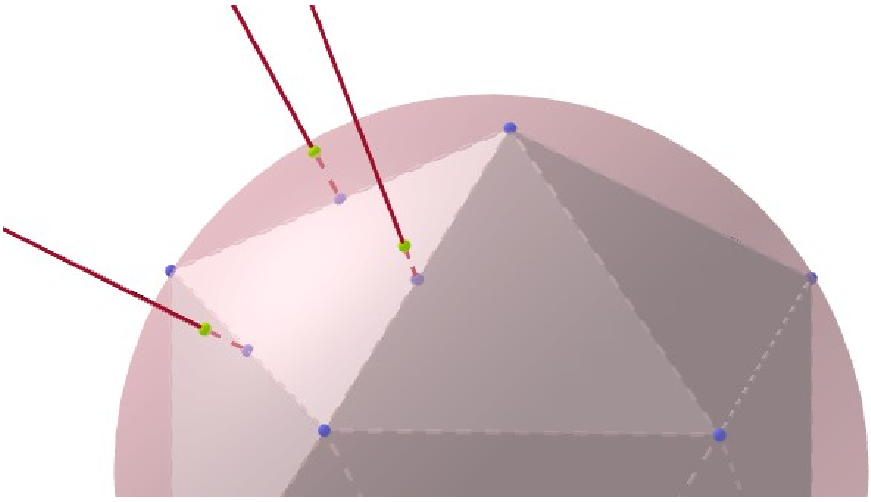
  g=Semirrecta(O, N)

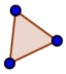
  h=Semirrecta(O, P)
- Mostramos la esfera b
-  Marcamos el punto intersección de cada semirrecta con la esfera b

  También podríamos escribir en la barra de entrada M'=Interseca(b,f)

  Les llamamos M', N', P'

- Ocultamos la esfera y los puntos M, N y P .

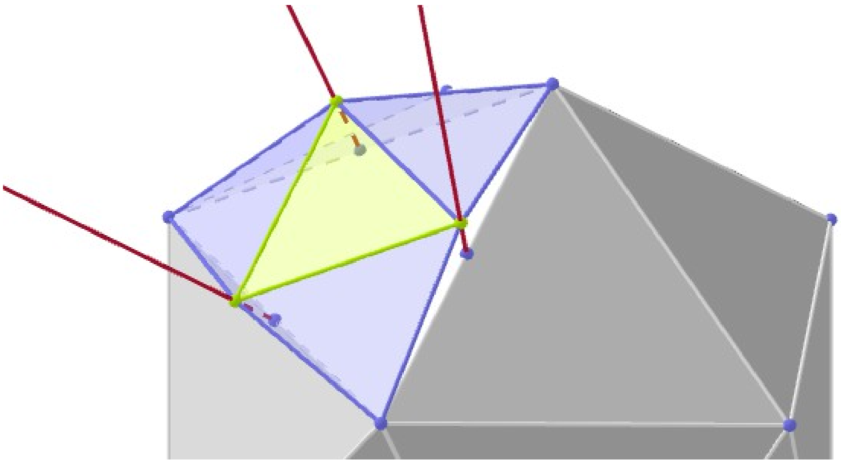


-  Trazamos los nuevos triángulos:

  Empezamos trazando los 3 triángulos que tienen por vértices: un vértice del triángulo de partida (cara del icosaedro) y dos de los vértices recién proyectados contiguos al primero. Nombres: t1,t2 y t3.

  (Podría ser: t1: FM'N' t2: IM'P' t3: CP'N')

  En cuarto lugar trazamos el triángulo central que está formado por los tres nuevos vértices M'N'P'. Le llamamos t4.
- Comprobamos que los nombres de los triángulos isósceles son t1, t2 y t3 (medida 0.5) y t4 el equilátero (medida 0.6).

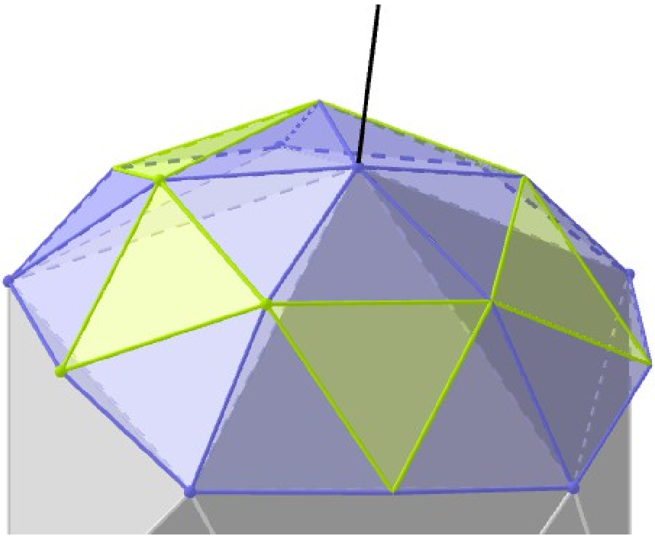


- Seleccionamos en la vista gráfica los triángulos de la misma medida y les asignamos un mismo color.
- Hacemos lo mismo para los segmentos y comprobamos que hay dos tamaños diferentes.
- Ocultamos las semirrectas.

La esfera geodésica se obtiene repitiendo el procedimiento anterior en el resto de triángulos del icosaedro aunque no lo haremos así.

Paso 2: Construir el primer nivel de la cúpula

Para obtener los **triángulos de la cúpula correspondientes a las cinco caras del icosaedro con vértice común F**, rotaremos los triángulos de la cara que hemos obtenido, un ángulo de 360º/5, alrededor de la recta que pasa por F y el centro del icosaedro.



- Escribimos en la barra de entrada el eje de rotación (recta OF) y el ángulo
  eje=Recta(O,F)
  α=360°/5
- Creamos una lista en la que guardaremos los triángulos isósceles (medida 0.5):
  l1={t1,t2,t3}
- Rotamos los triángulos alrededor del eje 5 veces. Lo haremos con un único paso con el comando secuencia
  l2=Secuencia(Rota(l1, i α, eje), i, 0, 4)
  l3=Secuencia(Rota(t4, i α, eje), i, 0, 4)
- Modificamos el color y estilo de las listas l2 y l3 (cada una de un color) . Opacidad superior al 50%

Paso 3: Obtener los triángulos de la cúpula correspondientes a otras caras del icosaedro

Para obtener el siguiente nivel de la cúpula (correspondiente a medio tambor del icosaedro) necesitamos proyectar los puntos medios de **dos triángulos contiguos del tambor** y construir únicamente los triángulos de la mitad superior de ambas caras.

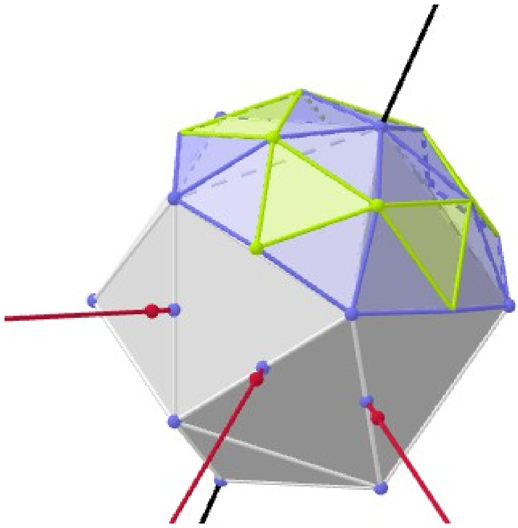
Escogemos dos triángulos por ejemplo **IEC** y **ECB** y repetimos el paso 1:

- Dividimos en dos partes iguales las aristas de dos triángulos contiguos (del tambor). Nombres T, U y V
- Construimos las semirrectas de origen O y que pasan por estos puntos.

  Semirrecta(O, T)

  Semirrecta(O, U)

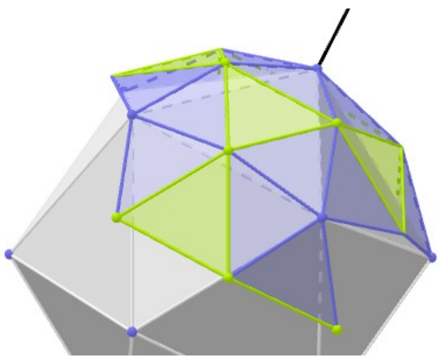
  Semirrecta(O, V)
- Mostramos la esfera b
- Marcamos los puntos intersección de las semirrectas con la esfera b



- Ocultamos la esfera ,los puntos medios (T, U y V) y las semirrectas.

- Trazamos los 4 nuevos triángulos y llamamos t5 al equilátero (su área es 0.6) y t6, t7, t8 a los isósceles (su áreas es 0.5).

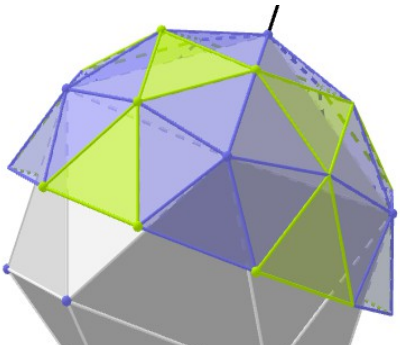
- Seleccionamos en la vista algebraica los triángulos de la misma medida y les asignamos un mismo color.
- Hacemos lo mismo para los segmentos.



Paso 4: Construir el segundo nivel de la cúpula

Para obtener los triángulos de la cúpula correspondientes a medio tambor del icosaedro procedemos del mismo modo que antes: creamos una lista en la que guardaremos los triángulos de la misma medida y rotaremos los triángulos alrededor del eje 5 veces.

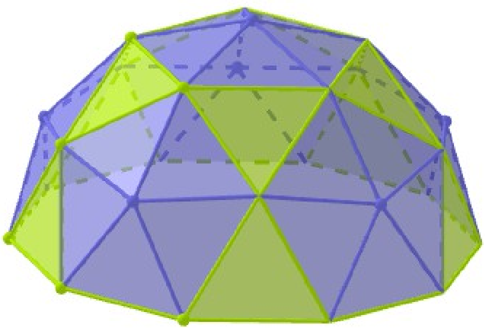
- Escribimos en la barra de entrada:
  l4={t6,t7,t8}
  l5=Secuencia(Rota(l4, i α, eje), i, 0, 4)
  l6=Secuencia(Rota(t5, i α, eje), i, 0, 4)



- Modificamos el color y estilo de las listas de modo que tengan el mismo color las que contienen triángulos de la misma medida (l2 y l5) y (l3 y l6).

Paso 5: Modificar el color de los segmentos de la base de la cúpula

Revisamos los colores de las aristas y comprobamos que **la base de la cúpula no es del mismo color y debiera serlo** (ya que los segmentos de la base forman todos parte de la periferia de los pentágonos y por tanto son del mismo tamaño).



- Localizamos en la vista 3D una arista de la base de la cúpula que no esté del color que debiera y cuyos extremos o vértices sean visibles (es decir, es un segmento que no forma parte de una lista) y lo renombramos como lado.
- Rotamos el segmento como hemos hecho hasta ahora:
  l7=Secuencia(Rota(lado, i α, eje), i, 0, 4)
- Y le asignamos el mismo color que al de las listas l3 y l6.
- Ocultamos: las listas l1 y l4, el eje, el icosaedro, los triángulos y todos los vértices.
- Comprobamos que no haya etiquetas en la vista 3D y guardamos la construcción como **cupulaV2.ggb**

Actividad 2: Obtener los tamaños de las aristas, el área y el volumen de una cúpula geodésica de frecuencia 2 y de radio R.

Vistas: Vista algebraica, Vista gráfica 3D, Vista CAS y Hoja de cálculo

En la vista **hoja de cálculo** de la construcción en a que estamos trabajando, **cupulaV2.ggb,** creamos una tabla que iremos cubriendo a lo largo de esta actividad :

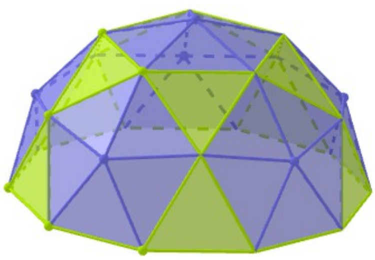
	Nuestra cúpula V2	Cúpula V2 unitaria	Cúpula V2 de radio R
Radio			
Arista menor			
Arista mayor			
Área			
Volumen			

Medida de las aristas de la cúpula

La cúpula geodésica V2 puede verse como 6 pentágonos unidos quedando entre ellos (5+5) triángulos equiláteros). Llamaremos coloquialmente *radio y lado de los pentágonos* a las aristas laterales y básicas respectivamente de las pirámides pentagonales.

En la vista algebraica de cupulaV2.ggb podemos comprobar que los segmentos son de 3 tamaños diferentes:

- 2cm : las aristas del icosaedro (objetos auxiliares)
- 1.04 cm: los radios de los pentágonos
- 1.18 cm: los lados de los pentágonos

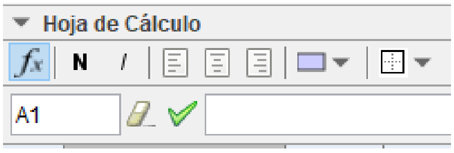


Por comodidad **cambiaremos el nombre de dos de los segmentos diferentes de la cúpula.** Renombramos:

- **a** : a uno de los segmentos de medida **1.04 cm**
- **b** : a uno de los segmentos de medida **1.18 cm**

Cubrimos la tabla en la hoja de cálculo:

En la hoja de cálculo activaremos en la barra de estilo la función ***fx*** (campo de entrada).



Medidas de nuestra cúpula:

- En la celda B2 escribimos **r** (radio de nuestra cúpula $r=\sqrt{1^2+\varphi^2}$)
- En las celdas B3 y B4 escribimos **a** y **b** que son las medidas de nuestra cúpula.

Medidas de la cúpula unitaria

Para obtener las medidas de de una cúpula de radio 1 tendremos que dividir las medidas de nuestra cúpula entre el radio de la cúpula (r). Entonces:

- En la celda C2 escribimos **1**
- En las celdas C3 y C4 escribimos: **a/r** y **b/r** respectivamente.

Medidas de una cúpula de radio R

Los tamaños de las aristas de una cúpula de de radio R se obtendrán multiplicando por R a las medidas de la cúpula unitaria. Entonces:

- En D2 escribimos un valor cualquiera para el radio. Por ejemplo: **75**
- En las celdas D3 y D4 escribimos: **C3 D2** y **C4 D2** respectivamente.

	Nuestra cúpula V2	Cúpula V2 unitaria	Cúpula V2 de radio R
Radio	**r**	**1**	**75**
Arista menor	**a**	**a/r**	**C3 D2**
Arista mayor	**b**	**b/r**	**C4 D2**

El resultado debería ser:

	Nuestra cúpula V2	Cúpula V2 unitaria	Cúpula V2 de radio R
Radio	1,902	1	75
Arista menor	1,040	0,547	40,990
Arista mayor	1,176	0,618	46,353

Área de la cúpula

El área de la cúpula se puede obtener como la suma de las áreas de los triángulos que la componen. Como el valor numérico que GeoGebra asocia a cada polígono es su área, sólo tendremos que sumar los valores de todos los triángulos de la cúpula: **6 · 5** triángulos isósceles y **5+5** triángulos equiláteros.

Si **t1** es un triángulo isósceles (triángulo central del pentágono, medida 0.5) y **t4** es un triángulo equilátero (medida 0.6), el área de la cúpula será **30 t1+10 t4** .

- En la **vista CAS** escribimos:

  A_T:= 30 t1+10 t4 ≈

El área de la cúpula de radio 1 se obtendrá dividiendo el área de nuestra cúpula entre r^2 (r es radio de nuestra cúpula) y el área de una cúpula de radio R se obtendrá multiplicando por R^2 el área de la cúpula unitaria.

Así que añadimos estos cálculos en la tabla de la **hoja de cálculo**

	Nuestra cúpula V2	Cúpula V2 unitaria	Cúpula V2 de radio R
Radio	r	1	75
Arista menor	a	a/r	C3 D2
Arista mayor	b	b/r	C4 D2
Área	**A_T**	**A_T/r^2**	**C5 D2^2**

El resultado debería ser:

	Nuestra cúpula V2	Cúpula V2 unitaria	Cúpula V2 de radio R
Radio	1,902	1	75
Arista menor	1,040	0,547	40,990
Arista mayor	1,176	0,618	46,353
Área	21,104	5,833	32810,432

Volumen de la cúpula

Para calcular el volumen de la cúpula tendremos en cuenta que la cúpula sólida se puede descomponer en pirámides triangulares de base los triángulos de la cúpula y con vértice el centro de la cúpula.

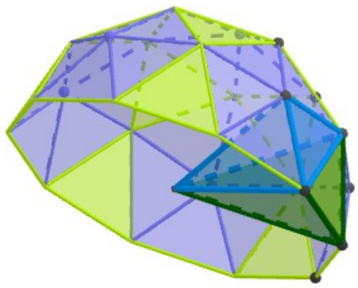
Comprobamos en la vista algebraica que el punto **O=(0,0,0)** , **t1** es un triángulo isósceles (medida 0.5) y **t4** es un triángulo equilátero (medida 0.6).

- En la barra de entrada escribimos:

  p1=Pirámide(t1,O)

  p2=Pirámide(t4,O)

- Ocultamos las pirámides.



Como el valor numérico de los poliedros en GeoGebra es su volumen y la cúpula sólida está formada 30 pirámides iguales a p1 y 10 pirámides iguales a p2, el volumen de la cúpula puede calcularse como : **30 p1 +10 p2**

- En la Vista CAS escribimos en una nueva fila:

  V_T:= 30 p1 +10 p2 ≈

El volumen de la cúpula de radio 1 se obtendrá dividiendo el volumen de nuestra cúpula entre el radio al cubo; y el volumen de una cúpula de radio R se obtendrá multiplicando por R^3 el volumen de la cúpula unitaria.

En la tabla de la **hoja de cálculo** añadimos los cálculos correspondientes:

	Nuestra cúpula V2	Cúpula V2 unitaria	Cúpula V2 de radio R
Radio	r	1	75
Arista menor	a	a/r	C3 D2
Arista mayor	b	b/r	C4 D2
Área	A_T	A_T/r^2	C5 D2^2
Volumen	**V_T**	**V_T/r^3**	**C6 D2^3**

El resultado debería ser:

Volumen	12,589	1,829	771759,606

Modificando el valor del radio en la tabla (D2) obtendremos las medidas de la cúpula correspondiente.

Actividad 3:

Calcular las medidas de las aristas de una cúpula geodésica de frecuencia 3 utilizando geometría analítica y GeoGebra CAS.

Del mismo modo que en el ejercicio anterior (cúpula geodésica V2) partiremos del icosaedro de coordenadas aúreas

A=(1,φ,0) B=(φ,0,-1) C=(φ,0,1) y el radio del icosaedro(A,B,C) es $r=\sqrt{1^2+\varphi^2}$

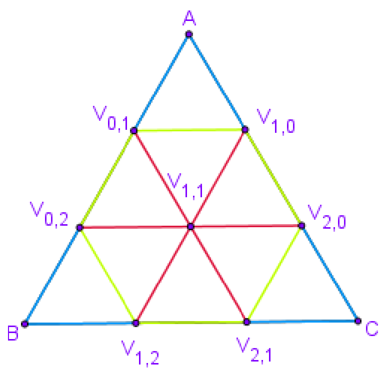
Por sencillez y para facilitar los cálculos le aplicaremos a este icosaedro una homotecia de centro O=(0,0,0) y razón 1/r, siendo r el radio del icosaedro inicial. De este modo, este nuevo icosaedro estará centrado en el origen de coordenadas y su radio será 1. **Y la cúpula que construyamos será unitaria**.

Por tanto las coordenadas de sus vértices serán:

$$A=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(1,\varphi,0) \qquad B=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\varphi,0,-1) \qquad C=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\varphi,0,1)$$

Para obtener las coordenadas de los vértices de la cúpula procedemos como sigue:

- Dividimos las aristas del triángulo ABC en tres partes iguales, obteniendo 9 triángulos iguales más pequeños y nuevos vértices $\mathbf{V_{ij}}$
- Proyectamos sobre la esfera unitaria los vértices V_{ij} : $\mathbf{P_{ij}}$



Sean los vectores: $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Las coordenadas de los vértices se pueden obtener como:

$$\overrightarrow{OV_{i,j}}=\overrightarrow{OA}+i\cdot\vec{u}+j\cdot\vec{v} \qquad 0\le i\le 3 \quad , \quad 0\le j\le 3 \quad , \quad 0\le i+j\le 3$$

Y las coordenadas de los vértices de la cúpula ($\mathbf{P_{ij}}$) se corresponden con las del vector unitario de $\overrightarrow{OV_{i,j}}$,es decir, $\overrightarrow{OP_{i,j}} = \mathit{VectorUnitario}\left(\overrightarrow{OV_{i,j}}\right)$

Las aristas de la cúpula son de **tres tamaños diferentes**. Llega con calcular:

- las coordenadas de tres vectores, por ejemplo, los vectores de extremos $P_{1,0}$, $P_{2,0}$ y $P_{1,1}$
- y la medida de tres aristas: $AP_{1,0}$, $P_{1,0}P_{2,0}$ y $P_{1,0}P_{1,1}$

Pasos guiados con GeoGebra

Configuración inicial:

- Vistas: Vista CAS, Vista gráfica 3D, Vista algebraica, Barra de entrada
- Opciones: Redondeo (3 cifras decimales), Etiquetado (solo nuevos Puntos)

Escribimos en la barra de entrada:

φ=(1+sqrt(5))/2 (número de oro)
r=sqrt(1+φ^2) (radio del icosaedro de coordenadas áureas)
k =1 /r (razón de semejanza para obtener la cúpula de radio 1)
A=k (1,φ,0)
B=k (φ,0,-1)
C=k (φ,0,1)
icosaedro(A,B, C) (icosaedro de radio 1)

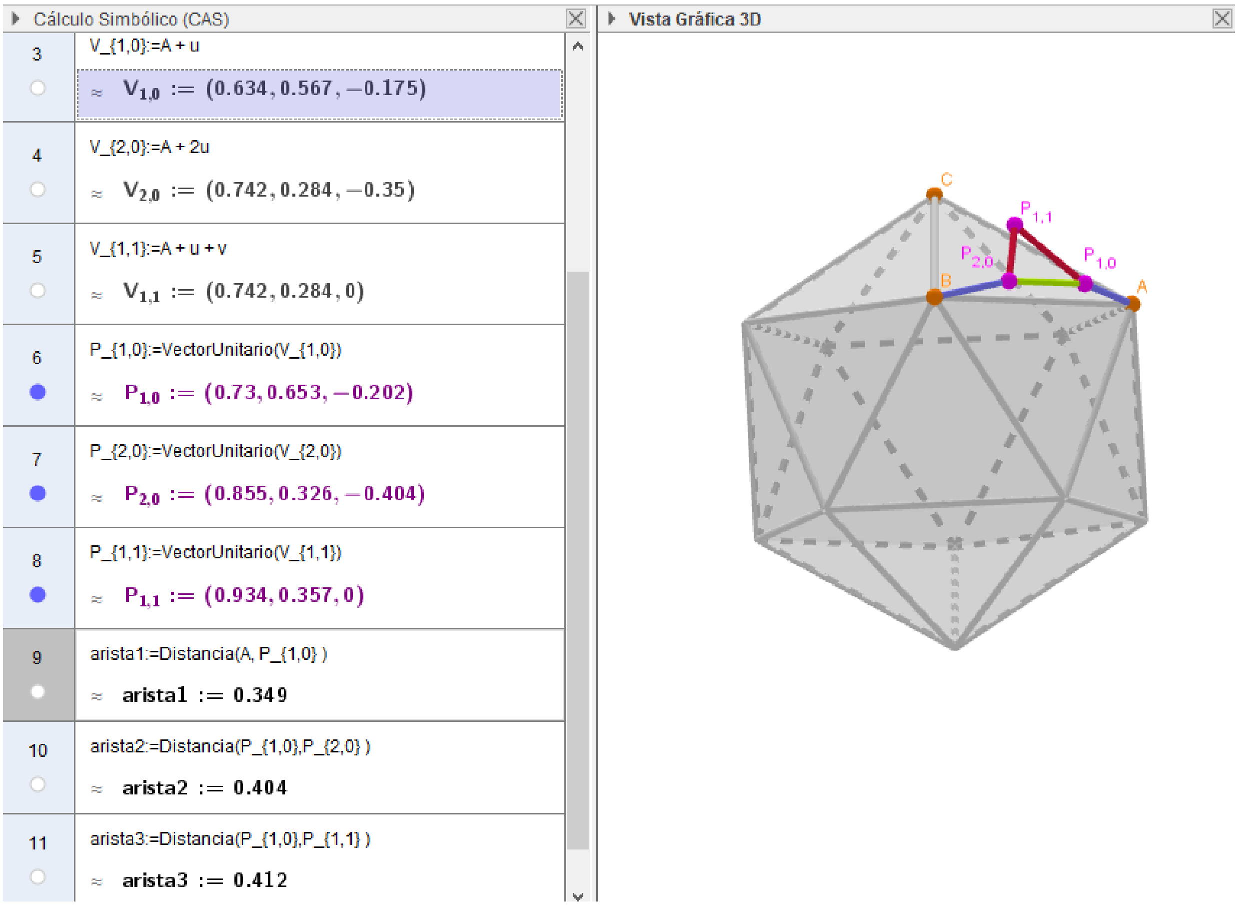
Escribimos en la vista CAS:

- Vectores $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
  - u:=(B-A)/3 ≈
  - v:=(C-A)/3 ≈
- Coordenadas de los vértices **V**$_{ij}$: $\overrightarrow{OV_{1,0}}=\overrightarrow{OA}+\vec{u}$, $\overrightarrow{OV_{2,0}}=\overrightarrow{OA}+2\vec{u}$ y $\overrightarrow{OV_{1,1}}=\overrightarrow{OA}+\vec{u}+\vec{v}$
  - V_{1,0}:=A + u ≈
  - V_{2,0}:=A + 2u ≈
  - V_{1,1}:=A + u + v ≈
- Coordenadas de los vértices **P**$_{ij}$: $\overrightarrow{OP_{i,j}} = VectorUnitario\left(\overrightarrow{OV_{i,j}}\right)$
  - P_{1,0}:=VectorUnitario(V_{1,0}) ≈
  - P_{2,0}:=VectorUnitario(V_{2,0}) ≈
  - P_{1,1}:=VectorUnitario(V_{1,1}) ≈

Ocultamos los vectores u, v y los puntos V_{1,0}, V_{2,0}, V_{1,1}

- Medidas de las aristas: $d(A, P_{1,0})$, $d(P_{1,0}, P_{2,0})$ y $d(P_{1,0}, P_{1,1})$

  En la vista 3D trazamos dichos segmentos y la vista CAS escribimos:
  - arista1:=Distancia(A, P_{1,0}) ≈
  - arista2:=Distancia(P_{1,0},P_{2,0}) ≈
  - arista3:=Distancia(P_{1,0},P_{1,1}) ≈



Podemos realizar una tabla con las medidas de las diferentes aristas de la cúpula geodésica V3.

	Cúpula V3 unitaria	Cúpula V3 de radio R
Radio	1	R
Arista1	0,349	0,349 R
Arista2	0,404	0,404 R
Arista3	0,412	0,412 R