5. Schnitt von Zylinder und Kegel

Aus ästhetischen Gründen werde die Kegelachse als z-Achse und die Spitze des Kegels als der Ursprung gewählt. Die x-Achse verlaufe parallel zu einem gemeinsamen Lot von Zylinder- und Kegelachse. Der Abstand der Zylinderachse zur y-Achse sei s und der Abstand der Zylinderachse zur x-Achse sei t. Ferner sei der von der Zylinderachse (*genauer von einer Parallelen zur Zylinderachse durch den Ursprung*) und der z-Achse eingeschlossene Winkel gleich ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Die Radien von Kegel und Zylinder seien R und r.

Da jedoch die Zylindergleichung $(x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2$ von einfacherer Gestalt als die Kegelgleichung $x^2 + y^2 = (Rz)^2$ ist und sich x mit ihrer Hilfe allein in Abhängigkeit von y ausdrücken lässt, werden die Gleichungen von Kegel und Zylinder zunächst geschrieben nach einer Drehung um den Winkel ϑ um die x-Achse:

$(x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2$ und

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)\\ 0 & -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -R^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)\\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \left(cos^2(\vartheta) - R^2 sin^2(\vartheta)\right)y^2 - 2sin(\vartheta)cos(\vartheta)(1+R^2)yz +$$
$$+ \left(sin^2(\vartheta) - R^2 cos^2(\vartheta)\right)z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \left(\frac{1}{2}(1-R^2) + \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\vartheta)\right)y^2 - (1+R^2)sin(2\vartheta)yz +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}(1-R^2) - \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\vartheta)\right)z^2 = 0$$

Diese Gleichung kann als eine (*höchstens*) quadratische Gleichung in z aufgefasst werden mit x und y als Parameter. Der erste wichtige Spezialfall ergibt sich für

$$\frac{1}{2}(1-R^2) - \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\vartheta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta = \frac{1}{2}arccos\left(\frac{1-R^2}{1+R^2}\right)$$

Hierfür vereinfacht sich die Kegelgleichung zu $x^2 + (1-R^2)y^2 - (1+R^2)sin(2\vartheta)yz = 0$ und da $sin(2\vartheta)$ im betrachteten Winkelbereich positiv ist, folgt weiter

$$(1+R^2)sin(2\vartheta) = (1+R^2)\sqrt{1-\left(cos(2\vartheta)\right)^2} = (1+R^2)\sqrt{1-\left(\frac{1-R^2}{1+R^2}\right)^2} =$$

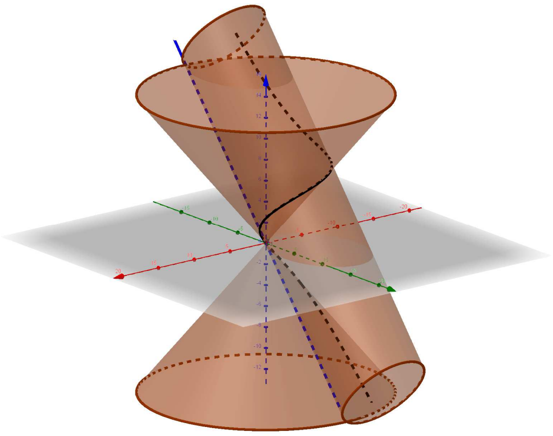
$$= \sqrt{(1+R^2)^2 - (1-R^2)^2} = \sqrt{4R^2} = 2R$$

und somit die Gleichung $x^2 + (1-R^2)y^2 - 2Ryz = 0$. Für y in den Grenzen $t-r$ bis $t+r$ und $y \neq 0$ lässt sie sich leicht nach z auflösen und man findet die Lösungskurve

$$\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} s \pm \sqrt{r^2 - (\eta - t)^2} \\ \eta \\ \frac{1}{2R\eta} \cdot \left(\left(s \pm \sqrt{r^2 - (\eta - t)^2} \right)^2 + (1 - R^2)\eta^2 \right) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \eta \in [t - r; t + r] \backslash \{0\}$$

Die ausgeschlossene Stelle $\eta = 0$ führte zunächst auf die Gleichungen $(x - s)^2 + t^2 = r^2$ und $x^2 = 0$, also auf $s^2 + t^2 = r^2$ als Bedingung für die Existenz von Schnittpunkten $(0|0|\zeta)$ mit $\zeta \in \mathbb{R}$.

Nachfolgend ist diese Lösungsgerade blau eingetragen für $R = 1$, $r = 5$, $s = -3$ und $t = 4$. Man beachte, dass Zylinder und Kegel um den Winkel ϑ um die x-Achse zurückgedreht wurden.



Für das weitere sei $a := \frac{1}{2}(1 - R^2) - \frac{1}{2}(1 + R^2)cos(2\vartheta)$ verschieden von null. Die Kegelgleichung kann dann als eine quadratische Gleichung in z aufgefasst und mit der klassischen Lösungsformel gelöst werden. Für die zugehörige Diskriminante $D(\eta)$ mit $\eta \in [t - r; t + r]$ findet man

$$\begin{aligned} D(\eta) = \left((1 + R^2)sin(2\vartheta)\eta\right)^2 - [(1 - R^2) - (1 + R^2)cos(2\vartheta)] \\ \cdot [2x^2 + (1 - R^2) + (1 + R^2)cos(2\vartheta)\eta^2] \end{aligned}$$

Mit der weiteren Abkürzung $\bar{a} := \frac{1}{2}(1 + R^2) - \frac{1}{2}(1 - R^2)cos(2\vartheta)$ lässt sich nach kurzer Rechnung schreiben $D(\eta) = 2\bar{a} \cdot (1 + R^2)\eta^2 - 2a \cdot \left((1 - R^2) + 2x^2\right)$. Offensichtlich stellt wieder $s = 0$ einen Fall dar, den gesondert zu untersuchen sich lohnt. Es ist dann

$$\begin{aligned} D(\eta) &= 2\bar{a} \cdot (1 + R^2)\eta^2 - 2a \cdot \left((1 - R^2) + 2(r^2 - (\eta - t)^2)\right) = \\ &= (2\bar{a}(1 + R^2) + 4a)\eta^2 - 8at\eta - 2a\left((1 - R^2) + 2r^2 - 2t^2\right) \end{aligned}$$

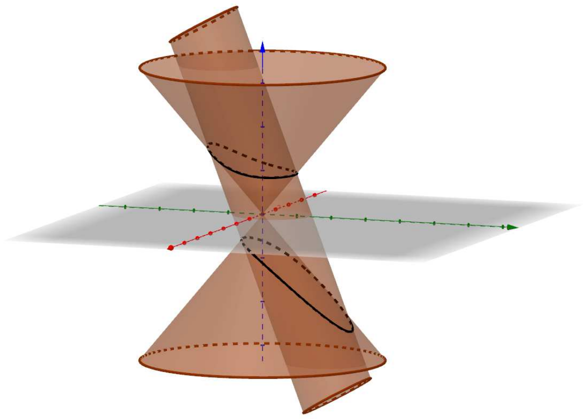
Der Vorfaktor von η^2 lautet $\left(1 + cos(2\vartheta)\right)R^4 - 2cos(2\vartheta)R^2 + 3 \cdot \left(1 - cos(2\vartheta)\right)$ und stellt eine biquadratische Funktion in R mit Parameter $cos(2\vartheta)$ dar. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ hat er den Wert $2R^2 + 6$, also jedenfalls positiv. Für $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ nimmt er sein Minimum für $R^2 = \frac{cos(2\vartheta)}{1+cos(2\vartheta)}$ an und hat dann den Wert $\frac{3-4\left(cos(2\vartheta)\right)^2}{1+cos(2\vartheta)}$. Somit ist der Vorfaktor von η^2 jedenfalls positiv für

$cos(2\vartheta) < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta > \frac{\pi}{12}$ und aus der Existenz von Nullstellen der Diskriminante $D(\eta)$ ergäbe sich möglicherweise ein Ausnahmeintervall $]\eta_{01}; \eta_{02}[$. Für kleinere Winkel schließlich ist das Vorzeichen und damit die Interpretation möglicher Nullstellen abhängig von R.

Die Lösungskurven sind gegeben durch

$$\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{r^2 - (\eta - t)^2} \\ \eta \\ \dfrac{(1 + R^2)sin(2\vartheta)\eta \pm \sqrt{D(\eta)}}{2a} \end{pmatrix}$$

worin die „$\pm$“-Zeichen unabhängig voneinander stehen und η abhängig von $D(\eta)$ das ganze Intervall $[t - r; t + r]$ oder nur (*von den Nullstellen der Diskriminante bestimmte*) Teile davon durchläuft.



Der Fall $s \neq 0$ ist nicht mehr so elementar lösbar, da die Suche nach Nullstellen der Diskriminante $D(\eta)$ nun auf eine Gleichung vierten Grades führt. Allerdings vermag *geogebra* die Lösungskurven

$$\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{r^2 - (\eta - t)^2} \\ \eta \\ \dfrac{(1 + R^2)sin(2\vartheta)\eta \pm \sqrt{D(\eta)}}{2a} \end{pmatrix}$$

auch in diesen Fällen für $\eta \in [t - r; t + r]$ darzustellen. Wenn Artefakte (*vgl. Bild unten*) auftreten, so kann es helfen, die Grafikansicht aufzufrischen. Sonst müssten die korrekten Definitionsintervalle individuell bestimmt werden, was derzeit leider nicht (*zuverlässig*) automatisch möglich ist. Nachfolgend ist ein solcher Fall gezeigt, wobei wieder Schnittkurven sowie Zylinder und Kegel abschließend um den Winkel ϑ um die x-Achse zurückgedreht wurden, damit ein *starrer* Kegel von einem *beweglichen* Zylinder geschnitten wird.