Familii de funcții de gradul al doilea

1) Fie familia de functii de gradul al doilea: $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 1$, unde m este un parametru real.

a) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta de ecuație $y = x - 2$;

b) Ce porțiune din această dreaptă cuprinde vârfurile parabolelor cu ramurile în sus?

2) Se consideră familia de functii de gradul al doilea: $f_m(x) = x^2 - (2m-1)x + 4m + 3$, unde m este un parametru real. Să se arate că parabolele asociate funcțiilor f_m trec printr-un punct fix.

3) Se consideră familia de funcții de gradul al doilea: $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - 2mx + 1$, unde m este un parametru real. Arătați că există două parabole asociate acestor funcții, care sunt tangente axei Ox. Arătați apoi că aceste două parabole au vârfurile simetrice față de originea sistemului de axe de coordonate.

4) Fie familia de funcții de gradul al doilea: $f_m(x) = mx^2 - 2(m-2)x - (m+10)$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să admită rădăcini reale;

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția pentru $m = 2$.

5) Se consideră familia de funcții de gradul al doilea: $f_m(x) = (m-2)x^2 + (m+1)x + 4$, $m \in \mathbb{R}$

a) Aflați valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x) = 0$ nu admite rădăcini reale;

b) Aflați $m \in \mathbb{R}$, pentru care $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

c) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția dată pentru $m = 1$.

6) Se consideră familia de funcții de gradul al doilea: $f_m(x) = mx^2 + (1-3m)x + 2m - 1$, $m \in \mathbb{R}$. Să se arate că parabolele asociate acestor funcții trec prin două puncte fixe.

7) Se consideră funcțiile de gradul al doilea: $f_m(x) = mx^2 + 2(m+n)x + m + 2n$, $m \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că, pentru n fixat, vârfurile parabolelor acestor funcții se găsesc pe o dreaptă.

b) Fie A, B punctele de intersecție ale unei parabole oarecare cu axa Ox, iar F, proiecția vârfului V al parabolei pe axa Ox. Să se arate că $\forall m \in \mathbb{R}^*$, $2 \cdot VF = |n| \cdot AB$.

c) Să se arate că toate parabolele definite în ipoteză trec printr-un punct fix.

8) Fie familia de funcții de gradul al doilea: $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, $m \in \mathbb{R}$

a) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta de ecuație $y = x + 1$.

b) Să se arate că toate parabolele definite anterior trec printr-un punct fix.

9) Fie familia de funcții: $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m se află pe dreapta $y + x = 0$;

b) Să se arate că parabolele asociate acestor funcții trec printr-un punct fix.

10) Fie familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -1$,

a) Să se arate că parabolele asociate funcţiilor f_m trec printr-un punct fix ;

b) Să se arate că vârfurile acestor parabole se află pe dreapta de ecuaţie $y + x = 0$;

c) Determinați porţiunea din dreapta b) conţinând vârfurile parabolelor cu ramurile în sus.

d) Să se determine parametrul real m astfel încât vârfurile parabolelor să fie:

1. deasupra axei Ox;
2. sub axa Ox;
3. în dreapta axei Oy;
4. pe dreapta de ecuație $y = 1$;
5. sub dreapta de ecuație $y = -2$.

de văzut https://www.geogebra.org/m/rhNtGgFw