Regole di derivazione

Una volta trovate ed imparate le regole per derivare le funzioni elementari, cerchiamo di capire come calcola da derivata di **una funzione che combina più funzioni elementari in una espressione**.

1 Derivata di una funzione del tipo $f(x) = K \cdot g(x)$

Iniziamo con un caso semplice: abbiamo una funzione che è la moltiplicazione di una costante (cioè un numero) per una funzione. Sono esempi di questo tipo le seguenti funzioni:

Funzione $f(x)$ che è il prodotto…	…di una **costante K**…	…per una **funzione $g(x)$**
$y = 3x^2$	3	x^2
$y = \frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{2}$	x^3
$y = -\frac{4\log x}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\log x$

Come faccio a calcolare la derivata di una qualsiasi di queste funzioni? Riprendiamo la definizione di rapporto incrementale:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ora devo inserire l'informazione che ho a proposito di $f(x)$: so che è $f(x) = K \cdot g(x)$ cioè il prodotto di un numero K per un'altra funzione $g(x)$. Come faccio a calcolare $f(x+h)$, cioè a valutare la funzione nel punto $x+h$? Aiutiamoci con i primi due esempi della nostra tabella. Valutiamoli prima in un punto qualsiasi (ad esempio -2) per ricordarci come si fa, e poi nel punto $x+h$

Funzione $f(x)$	Valutata nel punto $x = -2$	Valutata nel punto $x + h$
$y = 3x^2$	$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$	$f(x+h) = 3 \cdot (x+h)^2 = 3 \cdot (x^2 + h^2 + 2xh)$
$y = \frac{1}{2}x^3$	$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^3 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$	$f(x+h) = \frac{1}{2} \cdot (x+h)^3 = \cdots$
Vediamo che per valutare la funzione in un punto **mantenendo la costante e la moltiplichiamo per la funzione $g(x)$ valutata nel punto che ci interessa**, quindi in generale…		
$y = K \cdot g(x)$	$f(-2) = K \cdot g(-2)$	$f(x+h) = K \cdot g(x+h)$

Quindi per valutare la funzione $f(x)$ nel punto $x+h$ basta **moltiplicare la costante K per la funzione g valutata in $x + h$**. Sostituiamo questa espressione nel rapporto incrementale di $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{K \cdot g(x+h) - K \cdot g(x)}{h}$$

(Abbiamo anche sostituito a $f(x)$ l'espressione $K \cdot g(x)$, dalla definizione del tipo di funzioni che vogliamo derivare). Raccogliamo la costante K, che è fattore comune a numeratore:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{K\cdot g(x+h)-K\cdot g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{K\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{K\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

Forse hai studiato un teorema che dice, in parole semplici, che **una costante moltiplicata può essere portata fuori da limite**. In altre parole che puoi fare il limite di tutto il resto e moltiplicarlo alla fine per la costante. Se non hai mai incontrato questo teorema, puoi verificare che è vero, almeno in qualche semplice esempio (usiamo le solite funzioni, ad esempio per $x\to -3$):

Funzione $f(x)$	$\lim_{x\to -3} f(x)$	…che è la stessa cosa di…
$y=3x^2$	$\lim_{x\to -3} 3x^2=3\cdot(-3)^2=3\cdot 9=27$	$=3\cdot\lim_{x\to -3} x^2$, cioè fare il limite $\lim_{x\to -3} x^2$ e **poi** moltiplicarlo per 3
$y=\frac{1}{2}x^3$	$\lim_{x\to -3}\frac{1}{2}x^3=\frac{1}{2}\cdot(-3)^3=\frac{1}{2}\cdot(-27)=-\frac{27}{2}$	$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to -3} x^3$

Allora portiamo fuori la costante ed otteniamo

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left\{K\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}=K\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Il limite che è rimasto è, per definizione, la derivata di $g(x)$ (è il limite del **suo** rapporto incrementale), quindi abbiamo ottenuto che:

$$f(x)=K\cdot g(x)\quad\to\quad f'(x)=K\cdot g'(x)$$

Per derivare una funzione che è una costante K (un numero) per una funzione $g(x)$ basta moltiplicare la costante K per la derivata di $g(x)$.

Usiamo la regola che abbiamo appena trovato per calcolare le derivate dei nostri esempi:

Funzione $f(x)=K\cdot g(x)$	$f'(x)=K\cdot g'(x)$
$y=3x^2$	$y'=3\cdot 2x=6x$
$y=\frac{1}{2}x^3$	$y'=\frac{1}{2}\cdot 3x^2=\frac{3}{2}x^2$
$y=\frac{-4\log(x)}{5}$	$y'=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{4}{5x}$

2 Derivata di $f(x)=g(x)+t(x)$ (somma di funzioni)

Un esempio di somma di funzioni è $y=4x+5x^2$, oppure $y=3x+2-x^3$. Se abbiamo una funzione $f(x)=g(x)+t(x)$, valutare $f(x)$ nel punto $x+h$ è (forse) più intuitivo: dobbiamo valutare $g(x)$ in $x+h$ e sommargli $t(x)$ valutata in $x+h$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{g(x+h)+t(x+h)}^{\text{f(x+h)}}-\overbrace{[g(x)+t(x)]}^{\text{f(x)}}}{h}$$

Nota le parentesi nella seconda parentesi, che ci garantiscono i giusti segni. Ora svolgiamo i calcoli:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + t(x+h) \; - g(x) - t(x)}{h}$$

Raggruppiamo i termini che si riferiscono alla stessa funzione invertendo il II° ed il III° termine, poi spezziamo la frazione in due frazioni:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x) + t(x+h) \; - t(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{t(x+h) \; - t(x)}{h} \right]$$

Un altro teorema ci dice che per calcolare il limite di una somma basta calcolare il limite di ogni addendo e sommare i risultati, cioè che possiamo "spezzare" il limite di una somma nella somma dei due limiti. Applichiamo questa proprietà (magari senza accorgercene) ad esempio quando calcoliamo:

$$\lim_{x \to 2} x^2 + x^3 = \lim_{x \to 2} x^2 \; + \; \lim_{x \to 2} x^3 \; = 4 \; + \; 8 \; = 12$$

"Spezziamo" quindi il limite della somma che abbiamo trovato nella somma dei limiti dei due addendi

$$f'(x) = \boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}} + \lim_{h \to 0} \frac{t(x+h) \; - t(x)}{h} = \boldsymbol{g'(x)} + t'(x)$$

L'ultimo passaggio si spiega notando che il primo limite è la derivata di $g(x)$ ed il secondo è quella di $t(x)$; abbiamo quindi trovato la regola per derivare una somma di funzioni:

$$f(x) = g(x) + t(x) \quad \to \quad f'(x) = \; g'(x) + t'(x)$$

Per derivare una funzione che è somma di due funzioni basta derivare le due funzioni e sommarle.

Vediamo qualche esempio

$$D[x^2 + x^4] = D[x^2] + D[x^4] = 2x + 4x^3$$

$$D\left[\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x} + 5\right] = D\left[x^{\frac{2}{3}}\right] + D[x^{-1}] + D[5] = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + 0$$

Combinando con la regola del fattore costante abbiamo ad esempio

$$D[3x^3 + 2x^4] = spezzo\ la\ somma = D[3x^3] + D[2x^4] = in\ ognuno\ porto\ fuori\ i\ fattori\ costanti$$

$$= 3 \cdot D[x^3] + 2 \cdot \; D[x^4] = svolgo\ le\ derivate = 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot \; 4x^3 = 9x^2 + 8x^3$$

L'insieme delle regole che abbiamo appena ottenuto, cioè

1) se una funzione presenta un fattore costante posso mantenere il fattore e calcolare il limite della parte rimanente, in altre parole **un fattore costante può essere portato fuori dal limite**
2) se una funzione è la somma di due funzioni il suo limite è la somma dei limiti dei due addendi, in altre parole **posso "spezzare" il limite di una somma nella somma dei limiti dei due addendi**

costituiscono la proprietà di <u>linearità dei limiti</u>. Detto in termini semplici, il termine linearità deriva dal fatto che queste due operazioni (somma e prodotto per costanti) sono proprio quelle che, applicate alle variabili $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$, definiscono l'espressione generale di una retta (linea) che la cui forma più generale è

$$ax + by + c = 0$$

Derivata di $f(x) = g(x) \cdot t(x)$ (prodotto di funzioni)

Esempi di prodotti di funzioni sono $y = x(x^3 + 3)$, oppure $y = 3x \cdot 2^x$. Ormai abbiamo capito come si fa:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot t(x+h) - g(x) \cdot t(x)}{h}$$

Per ottenere dei rapporti incrementali, **usiamo un trucco: sottraiamo e sommiamo una stessa quantità**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot t(x+h) - g(x) \cdot t(x+h) + g(x) \cdot t(x+h) - g(x) \cdot t(x)}{h}$$

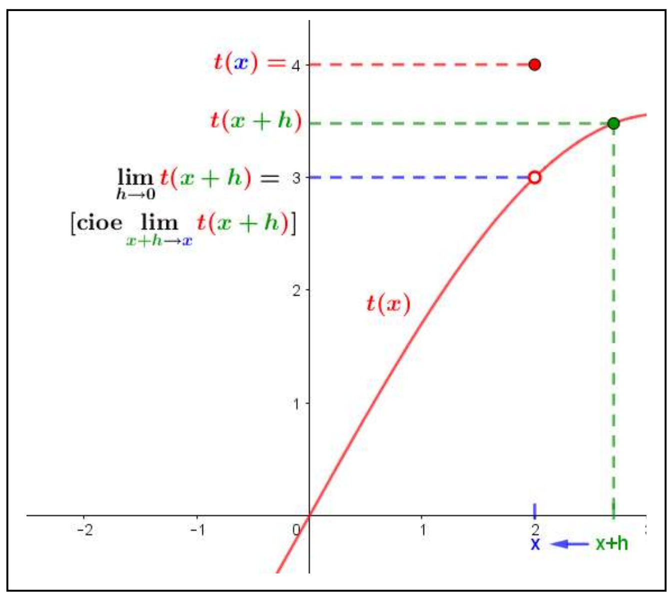
Non è cambiato niente: **le due parti rosse, sommate, spariscono**, ma raccogliendo tra il primi due termini il fattore in comune, e facendo lo stesso tra i secondi due, ci permettono di trovare espressioni interessanti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{t(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)] + g(x) \cdot [t(x+h) - t(x)]}{h}$$

Spezziamo le frazioni nella somma di frazioni e poi i limiti, come abbiamo fatto prima:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{t(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot [t(x+h) - t(x)]}{h}$$

$g(x)$ é il risultato della funzione g nel punto x: non dipende dal valore di h (è un **fattore costante** rispetto ad h) e quindi per la linearità del limite può essere portato fuori da esso.



Le cose sono leggermente più complicate per $t(x+h)$: $x + h$ quando $h \to 0$ tende a x. **Se vogliamo essere precisi, però, non è detto che se $x + h$ tende a x allora $t(x+h)$ tende a $t(x)$: questo è vero solo se la funzione t è continua nel punto x.**

Nella figura a fianco si vede infatti che se la funzione è discontinua nel punto x, quando h tende a zero x+h tende ancora a x ma il corrispondente risultato $t(x+h)$ non tende a $t(x)$ (che nell'esempio vale 4] bensì al risultato y a cui si avvicina la funzione (che nell'esempio vale 3).

Se però supponiamo che la funzione t sia continua nel punto x (un teorema afferma che una funzione per avere la derivata in un punto <u>**deve**</u> essere continua in quel punto), **allora possiamo dire che $\lim_{h \to 0} t(x+h) = t(x)$, e dato che $t(x)$ non dipende più da h lo possiamo portare fuori dal limite come abbiamo fatto per $g(x)$.**

Otteniamo quindi:

$$f'(x) = t(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} = t(x) \cdot g'(x) + t'(x) \cdot g(x)$$

I due limiti sono rispettivamente i limiti dei rapporti incrementali di g e di t, quindi abbiamo ottenuto che

$$f'(x) = t(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot t'(x)$$

Dato che nei prodotti l'ordine non conta, posso ordinare tutto in modo più mnemonico, ed ottengo:

$$f(x) = g(x) \cdot t(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot \mathrm{t}(x) + \mathrm{g}(x) \cdot \mathrm{t}'(x)$$

Per derivare il prodotto di due funzioni se ne deriva una, lasciando l'altra così com'è, e poi viceversa, e si sommano i due contributi così ottenuti.

Derivata di $f(x) = \frac{g(x)}{t(x)}$ (rapporto di funzioni)

Esempi di prodotti di funzioni sono $y = \frac{x-3}{\sin x}$, oppure $y = \frac{\ln x + 4}{3x}$. Procediamo con il solito approccio:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x+h)}{t(x+h)} - \frac{g(x)}{t(x)}}{h}$$

Per sommare le frazioni facciamo il denominatore comune (e riscriviamo come frazione "a un solo piano").

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x+h) \cdot t(x) - g(x) \cdot t(x+h)}{t(x+h) \cdot t(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) \cdot t(x) - g(x) \cdot t(x+h)}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h}$$

Per ottenere dei rapporti incrementali, <u>**usiamo ancora il trucco di sottrarre e sommare una stessa quantità**</u>:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) \cdot t(x) - g(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot t(x) - g(x) \cdot t(x+h)}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h}$$

Spezziamo la frazione applicando la proprietà distributiva della divisione

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) \cdot t(x) - g(x) \cdot t(x)}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h} + \frac{g(x) \cdot t(x) - g(x) \cdot t(x+h)}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h}$$

in ognuno delle due frazioni raccogliamo la parte in comune a numeratore (cambiamo i colori per mettere in evidenza cosa otteniamo). Notiamo che per far apparire il rapporto incrementare di t con i segni corretti nella seconda frazione è necessario raccogliere $-g(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{t(x)[g(x+h) - g(x)]}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h} + \frac{-g(x) \cdot [t(x+h) - t(x)]}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h}$$

Spezziamo il limite della somma nella somma di limiti per la linearità dei limiti

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{t(x)[g(x+h) - g(x)]}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h} + \lim_{h\to 0} \frac{-g(x) \cdot [t(x) - t(x+h)]}{t(x+h) \cdot t(x) \cdot h}$$

Vediamo che

- nelle due frazioni sono comparsi i rapporti incrementali rispettivamente di $g(x)$ e di $t(x)$

- potremmo semplificare $t(x)$ nella prima frazione, ma non lo facciamo perché vedremo che sarà più comodo tenerli per fare il denominatore comune alla fine
- I fattori $t(x)$ e $g(x)$ **(ed il segno meno che precede questa)** non dipendono da h e quindi possono essere portati fuori
- Con ragionamento analogo a quello fatto per la derivata del prodotto, supponendo che la funzione t sia continua possiamo dire che quando h tende a zero $t(x+h)$ tende a $t(x)$, che non dipende più da h e quindi può essere portato fuori insieme all'altro $t(x)$. Quindi in totale fuori abbiamo $[t(x)]^2$

$$f'(x) = \frac{t(x)}{[t(x)]^2} \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{g(x)}{[t(x)]^2} \lim_{h \to 0} \frac{t(x) - t(x+h)}{h}$$

Terminiamo sostituendo al posto dei limiti dei rapporti incrementali le corrispondenti derivate, e facendo il denominatore comune

$$f'(x) = \frac{t(x)}{[t(x)]^2} g'^{(x)} - \frac{g(x)}{[t(x)]^2} t'(x) = \frac{t(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot t'(x)}{[t(x)]^2}$$

Abbiamo ottenuto cioè la regola di derivazione del rapporto di due funzioni, che riassumiamo qui di seguito

$$f(x) = \frac{g(x)}{t(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot \mathrm{t}(x) - \mathrm{g}(x) \cdot \mathrm{t}'(x)}{t^2(x)}$$

La derivata del rapporto di due funzioni è una frazione che

- a denominatore ha il quadrato della funzione a denominatore

- a numeratore ha un'espressione simile alla formula della derivata del prodotto ma **è essenziale iniziare derivando il numeratore** – cioè partire da $g'(x)$ - dato che i due termini sono sottratti e quindi **non** possono essere scambiati tra loro.