Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 28 - teorema fundamental del cálculo integral

1. Sea $f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}$ **para** $x>0$ **. Y sea** $F(x)$ **la primitiva de** $f(x)$ **, que cumple** $F(1)=2$ **.**

a) Calcula $F'(e)$ **.**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ **en el punto de abscisa** $x=e$ **.**

a) El Teorema fundamental del cálculo integral afirma: **si** $f(x)$ **es una función continua en** $[a,b]$ **, la función definida por** $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ **es una función continua y derivable, que a la vez es una primitiva de** $f(x)$ **y cumple la siguiente igualdad:** $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$ **. Es decir, la derivada de** $F(x)$ **coincide con la función** $f(x)$ **.**

Por lo tanto → $F'(e)=f(e)=\frac{\ln(e)}{2e}=\frac{1}{2e}$

b) Para obtener la recta tangente a una función $F(x)$ en un valor de abscisa $x=x_0$, necesitamos el punto (x_0,y_0) y la pendiente m de la recta en dicho punto.

La pendiente coincide con el valor de la derivada de la función en el punto. Y como razonamos en el apartado anterior $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b] \rightarrow F'(e)=f(e)=\frac{1}{2e}=m$.

El punto $(x_0,y_0)=(e,y_0)$ → Necesitamos obtener la imagen de $x=e$.

Nos falta, en consecuencia, la imagen de $x=e$. ¿Cómo obtener la fórmula de $F(x)$ donde evaluar $x=e$? Integrando $f(x)$, ya que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

$$F(x)=\int f(x)\,dx \rightarrow F(x)=\int \frac{\ln(x)}{2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2\cdot\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{4}\ln^2|x|+C$$

Donde hemos resuelto la integral inmediata recordando que la derivada de $\ln(x)$ es $\frac{1}{x}$.

De la familia de primitivas $F(x)=\frac{1}{4}\ln^2(x)+C$ elegimos la que cumple la condición del enunciado

$$F(1)=2 \rightarrow \frac{1}{4}\ln^2(1)+C=2 \rightarrow C=2$$

$F(x)=\frac{1}{4}\ln^2(x)+2$ → evaluamos $x=e$ → $F(e)=\frac{1}{4}\ln^2(e)+2=\frac{9}{4}$ → punto $\left(e,\frac{9}{4}\right)$

La ecuación punto-pendiente de la recta solución resulta:

$$\frac{1}{2e}=\frac{y-\frac{9}{4}}{x-e}$$

2. Obtener una función derivable $f(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ y sabiendo que $f(1)=1$

Debemos obtener una función $f(x)$ a partir de su función derivada $f'(x)$. Es decir, $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral sabemos que $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$ con $f'(x)$ continua en $x\in[a,b]$. Es decir, la integral y la derivada son procesos inversos. Si integramos $f'(x)$ en cada intervalo, obtendremos $f(x)$.

Un detalle importante: la función $f(x)$ es derivable, por lo que también será continua. Y este detalle lo usaremos al aplicar las condiciones de continuidad en el punto frontera de la función a trozos.

La función $f'(x)$ es continua en toda la recta real, ya que en $x<0$ la función es polinómica y en $x>0$ la función es exponencial más polinómica. En el punto frontera $x=0$ la función es continua, ya que $f'(0)=0$, los límites laterales son iguales $L^+=L^-=L=0$ y el límite coincide con el valor de la función en el punto.

Integremos en cada tramo de la función a trozos.

Si $x<0 \rightarrow f(x)=\int(x^2-2x)\,dx \rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+C$

Si $x\geq 0 \rightarrow f(x)=\int(e^x-1)\,dx \rightarrow f(x)=e^x-x+D$

De la condición del enunciado $f(1)=1 \rightarrow e-1+D=1 \rightarrow D=2-e$

El enunciado afirma que la función $f(x)$ es derivable. Y esto implica, a su vez, que también será continua. Por lo tanto, en $x=0$ los límites laterales en ese punto deben coincidir y ser iguales al valor de la función en ese punto (condición de continuidad de una función a trozos en un punto frontera).

$$f(0)=e^0-0+2-e=3-e$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3}{3}-x^2+C\right)=C \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(e^x-x+2-e)=1+2-e=3-e$$

Igualando ambos límites laterales → $C=3-e$

La función solución resulta $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}-x^2+3-e & si \quad x<0 \\ e^x-x+2-e & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

3. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$

b) $\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)\,dx$

c) $\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)\,dx$

a) Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, por el Teorema fundamental del cálculo integral sabemos que $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ y $F'(x)=f(x)$. Al aplicar la regla de Barrow en el intervalo $[a,b]$, se cumple $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

En nuestro ejercicio, al aplicar la regla de Barrow en el intervalo $[2,3]$:

$$\int_2^3 f(x)\,dx=[F(x)]_2^3=F(3)-F(2)=2-1=1$$

b) $I=\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)\,dx=5\int_2^3 f(x)\,dx-7\int_2^3 dx=5[F(x)]_2^3-7[x]_2^3=5\cdot(F(3)-F(2))-7\cdot(3-2)$

$$I=5\cdot(2-1)-7\cdot 1=5-7=-2$$

Donde hemos utilizado la aplicación de la regla de Barrow del apartado anterior.

c) Del Teorema Fundamental sabemos que se cumple: $F'(x)=f(x)$. Por lo tanto:

$$I=\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)\,dx=\int_2^3 F^2(x)\cdot F'(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}F^3(x)\right]_2^3$$

Donde nos damos cuenta que dentro de la integral definida tenemos la potencia de una función por la derivada de esa función. Aplicamos Barrow nuevamente en el intervalo $[2,3]$:

$$I=\frac{1}{3}\cdot(F^3(3)-F^3(2))=\frac{1}{3}\cdot(2^3-1^3)=\frac{7}{3}$$

4. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

La ecuación punto-pendiente de una recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Como la recta buscada es tangente a la función en $x=1$, la pendiente de la recta será igual a la derivada de la función evaluada en $x=1 \rightarrow f'(1)=\frac{(1-1)^2}{1+1}=0 \rightarrow m=0$.

Si $x_0=1$ entonces $y_0=f(1)$, ya que la función y la recta tangente coinciden en el punto $(1, f(1))$.

Para obtener el valor de la imagen $f(1)$ debemos integrar la función derivada $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$, para conseguir la función primitiva $f(x)$. La constante de integración inherente al proceso de integración podemos determinarla gracias a la condición del enunciado $f(0)=0$.

Si $f(x)$ una primitiva de $f'(x)$ podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Es decir, $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$, cumpliendo que $f(x)$ es continua y derivable en $x\in[a,b]$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral sabemos que $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$ con $x\in[a,b]$.

Es decir, la integral y la derivada son procesos inversos. Si integramos $f'(x)$, obtendremos $f(x)$.

$$f(x)=\int \frac{(x-1)^2}{x+1}\,dx=\int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx$$

Tenemos un cociente de polinomios. Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, realizamos la división.

$$\frac{Dividendo}{divisor}=Cociente+\frac{Resto}{divisor} \rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1}=x-3+\frac{4}{x+1}$$

$$f(x)=\int (x-3)\,dx+\int \frac{4}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|+C$$

La constante de integración queda definida de manera única con la condición $f(0)=0 \rightarrow C=0$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|$$

Una vez obtenida la función primitiva, podemos calcular $f(1)$

$$f(1)=\frac{1}{2}-3+4\ln|2|=\frac{-5}{2}+4\ln(2)\simeq 0{,}27$$

La recta tangente a la función en $x=1$ resulta una recta horizontal (pendiente nula).

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \rightarrow \quad 0=\frac{y-f(1)}{x-1} \quad \rightarrow \quad y=f(1) \quad \rightarrow \quad y\simeq 0{,}27$$

5. Considera la función $F:[0,+\infty)\rightarrow[0,+\infty)$ **definida por** $F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\,dt$ **. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de** F **en el punto de abscisa** $x=1$ **.**

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función F en el punto $x=1$ es:

$$F'(1)=\frac{y-F(1)}{x-1}$$

El Teorema fundamental del cálculo integral afirma: **si** $f(x)$ **es una función continua en** $[a,b]$ **, la función definida por** $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ **es una función continua y derivable, que a la vez es una primitiva de** $f(x)$ **y cumple la siguiente igualdad:** $F'(x)=f(x),\ \forall\, x\in[a,b]$ **. Es decir, la derivada de** $F(x)$ **coincide con la función** $f(x)$ **.**

En nuestro ejercicio, $f(t)=2t+\sqrt{t}$ y $F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\,dt$.

Por lo tanto, $F'(1)=f(1) \rightarrow F'(1)=2\cdot 1+\sqrt{1}=3$

La recta queda:

$$3=\frac{y-F(1)}{x-1}$$

Nos falta obtener la imagen de $F(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Es decir:

$F(1)=\int_0^1 (2t+\sqrt{t})\,dt$ → Aplicamos Barrow a la integral definida.

$$F(1)=\left[\frac{2t^2}{2}+\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 \rightarrow F(1)=\left[1+\frac{2}{3}-(0+0)\right]=\frac{5}{3}$$

Quedando la recta:

$$3=\frac{y-\frac{5}{3}}{x-1} \rightarrow 3x-3=y-\frac{5}{3} \rightarrow y=3x-\frac{4}{3}$$

6. Sea la función $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $F(x)=\int_0^x (sen(t^2))\,dt$ **. Calcula** $\lim_{x\to 0}\frac{x\,F(x)}{sen(x^2)}$ **.**

Al evaluar en el límite, obtenemos indeterminación 0/0. Por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Derivamos numerador y denominador por separado, y volvemos a evaluar.

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+x\cdot F'(x)}{\cos(x^2)\cdot(2x)}$$

En el numerador, debemos evaluar la función F(x) en x=0. Como esta función está definida a partir de una integral definida, al hacer x=0, tendremos la integral definida entre x=0 y x=0. Y eso es igual a 0 (la integral definida en un intervalo formado por un punto, vale 0).

Por lo tanto, al evaluar, obtenemos nuevamente la indeterminación 0/0. Por lo que aplicamos otra vez L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)+F'(x)+x\cdot F''(x)}{-sen(x^2)\cdot(2x)\cdot(2x)+\cos(x^2)\cdot 2}$$

Si evaluamos nuevamente, llegamos a la siguiente expresión entre numerador y denominador.

$$\frac{2\cdot F'(0)}{2}=F'(0)$$

Es decir, tras evaluar, el límite se resume a evaluar la derivada de la función F(x) en el punto x=0.

Aquíe entra el Teorema fundamental del cálculo integral, que nos afirma que la integral es el proceso inverso de la derivada. Y se cumple que si F(x) es una primitiva de la función $f(t)=sen(t^2)$, la derivada de F(x) resulta:

$$F'(x)=sen(x^2)$$

Que al evaluar en x=0, tendremos:

$$F'(0)=sen(0)=0$$

7. Sea la función $f(x)=1+\int_0^x t\cdot e^t\,dt$ **. Estudiar su curvatura.**

Podemos operar de dos maneras.

Primero, resolviendo la integral definida en el intervalo $[0,x]$ con ayuda de la regla de Barrow.

$\int_0^x t\cdot e^t\,dt$ → aplicamos partes

$u=t \rightarrow u'=1$

$v'=e^t \rightarrow v=e^t$

$$\int_0^x t\cdot e^t\,dt=[t\cdot e^t]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=[x\cdot e^x-0]-[e^x-e^0]=x\cdot e^x-[e^x-1]=(x-1)\cdot e^x+1$$

Por lo tanto:

$f(x)=1+\int_0^x t\cdot e^t\,dt=1+(x-1)\cdot e^x+1=2+(x-1)\cdot e^x$ → dominio toda la recta real

Obtenemos la segunda derivada.

$f'(x)=0+1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x=x\cdot e^x$

$f''(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)\cdot e^x$

Condición necesaria de punto de inflexión: segunda derivada igual a cero. Así obtenemos los candidatos a puntos de inflexión.

$f''(x)=0 \rightarrow (x+1)\cdot e^x=0 \rightarrow x=-1$ ya que la exponencial nunca se anula.

Evaluamos la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del candidato a punto de inflexión.

$f''(-10)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$f''(+10)>0 \rightarrow f(x)$ convexa

Una **segunda forma de razonar** es aplicando el Teorema Fundamental del cálculo integral, ya que al derivar la función orifinal nos encontramos con la derivada de un integral definida.

$$f(x)=1+\int_0^x t\cdot e^t\,dt \rightarrow f'(x)=0+\frac{d}{dx}[\int_0^x t\cdot e^t\,dt]$$

Por el Teorema fundamental, la derivada de la integral de una función en un intervalo $[0,x]$, donde la función es continua, coincida con el valor de la función que estamos integrando evaluada en el límite superior del intervalo.

$f'(x)=x\cdot e^x$

Y a partir de aquí hemos llegado a la misma derivada que en el razonamiento anterior, por lo que el resto del ejercicio se resolvería exactamente igual.